# QM-2-L6-14041219

Tuesday, April 7, 2026 3:03 PM

$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ عملگر اسپین

فرمول بندی اسپین:

$S_z \, |s, m_s\rangle = \hbar m_s \, |s, m_s\rangle$

$\vec{S}^2 \, |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) \, |s, m_s\rangle$

$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$

$[S_i, S_j] = i\hbar \, \epsilon_{ijk} S_k$

بیانگر:

$L_z \, |l, m_l\rangle = \hbar m_l \, |l, m_l\rangle$

$\vec{L}^2 \, |l, m_l\rangle = \hbar^2 l(l+1) \, |l, m_l\rangle$

$[L_i, L_j] = i\hbar \, \epsilon_{ijk} L_k$

$S_z \, |\uparrow\rangle = +\frac{\hbar}{2} \, |\uparrow\rangle$

$S_z \, |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} \, |\downarrow\rangle$

$|\uparrow\rangle = |s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle$

$S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z) \qquad S_x = ? \qquad S_y = ?$

$S_\pm = S_x \pm i S_y$

$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$

$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$

$S_+ |\uparrow\rangle = 0 \qquad S_+ |\downarrow\rangle = \hbar |\uparrow\rangle$

$S_- |\uparrow\rangle = \hbar |\downarrow\rangle \qquad S_- |\downarrow\rangle = 0$

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \qquad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ Pauli Matrices

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \, \epsilon_{ijk} \sigma_k$

ویژه حالتهای $S_z$:

$|\uparrow\rangle = |\underset{s}{\tfrac{1}{2}}, \underset{m_s}{+\tfrac{1}{2}}\rangle \qquad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\downarrow\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \qquad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

نمایش برداری اسپینورها

---

$|\alpha\rangle$ اسپینور دلخواه در فضای برداری اسپینوری

$$\boxed{|\alpha\rangle = \alpha_+ |\uparrow\rangle + \alpha_- |\downarrow\rangle}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_+ &= \langle\uparrow|\alpha\rangle \\ \alpha_- &= \langle\downarrow|\alpha\rangle \end{aligned}}$$

$|\alpha\rangle = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\alpha\rangle + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\alpha\rangle$

$|\alpha\rangle = \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right) |\alpha\rangle$

$A|n\rangle = a_n|n\rangle$ قضیه بسط

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle}$$

$$\boxed{c_n = \langle n|\psi\rangle}$$

$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle$

$$\boxed{\text{کاملیت} \quad 1 = \sum_n |n\rangle\langle n|}$$

$$|\alpha\rangle = \big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\big)\,|\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = 1}$$

Analogy

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$$

$$|\alpha\rangle = \alpha_+|\uparrow\rangle + \alpha_-|\downarrow\rangle$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \big(\langle\uparrow|\alpha_+^* + \langle\downarrow|\alpha_-^*\big)\big(\alpha_+|\uparrow\rangle + \alpha_-|\downarrow\rangle\big)$$

$$\boxed{1 = |\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Rightarrow \boxed{\sum_n |c_n|^2 = 1}$$

تعبیر احتمالاتی (۱)

تعبیر احتمالاتی (۲)

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_n |c_n|^2 a_n$$

$$\langle\alpha|S_z|\alpha\rangle = ? \qquad \begin{cases} S_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle \\ S_z|\downarrow\rangle = \frac{-\hbar}{2}|\downarrow\rangle \end{cases}$$

یادآوری

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{n,m}\langle\psi|n\rangle\langle n|\hat{A}|m\rangle\langle m|\psi\rangle = \sum_{n,m} a_m\, c_n^* c_m \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{nm}}$$

$$= \sum_n a_n |c_n|^2$$

در مورد اسپین

$$\langle\alpha|S_z|\alpha\rangle = \langle\alpha|\uparrow\rangle\underbrace{\langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle}_{=\frac{\hbar}{2}\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}}\langle\uparrow|\alpha\rangle + \langle\alpha|\downarrow\rangle\underbrace{\cancel{\langle\downarrow|S_z|\uparrow\rangle}}_{=\frac{\hbar}{2}\langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0}\langle\uparrow|\alpha\rangle$$
$$+ \langle\alpha|\uparrow\rangle\underbrace{\cancel{\langle\uparrow|S_z|\downarrow\rangle}}_{= -\frac{\hbar}{2}\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0}\langle\downarrow|\alpha\rangle + \langle\alpha|\downarrow\rangle\underbrace{\langle\downarrow|S_z|\downarrow\rangle}_{= -\frac{\hbar}{2}\langle\downarrow|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}}\langle\downarrow|\alpha\rangle$$

از طرفی

$$\left.\begin{aligned} \langle\uparrow|\alpha\rangle &= \alpha_+ \\ \langle\alpha|\uparrow\rangle &= \alpha_+^* \\ \langle\downarrow|\alpha\rangle &= \alpha_- \\ \langle\alpha|\downarrow\rangle &= \alpha_-^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle\alpha|S_z|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2}\big(|\alpha_+|^2 - |\alpha_-|^2\big)$$

$$= \frac{\hbar}{2}|\alpha_+|^2 + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)|\alpha_-|^2$$

(۱) $|\alpha_+|^2$ یعنی احتمال اینکه با اندازه‌گیری $S_z$ اسپین ذره $+\frac{\hbar}{2}$ بدست بیاید

(۲) $|\alpha_-|^2$ یعنی احتمال اینکه با اندازه‌گیری $S_z$ اسپین ذره $-\frac{\hbar}{2}$ بدست بیاید

---

قضیه بسط

(۱) با در نظر گرفتن درجات آزادی مکانی (بدون اسپین)

$$|\psi\rangle = \int d^3x'\; c_{\vec{x}'}\,|\vec{x}'\rangle$$

ضرایب

$$c_{\vec{x}'} = \langle\vec{x}'|\psi\rangle$$

اثبات

$$|\psi\rangle = \int d^3x'\; |\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

چون

$$\int d^3x'\; |\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'| = 1$$

$$\int d^3x' \, |\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'| = 1$$

سؤال: فضای کت‌ها با درنظر گرفتن درجات آزادی مکانی و اسپین؟

نکته: $[\vec{S},\vec{x}]=0 \quad , \quad [\vec{S},\vec{P}]=0 \, , \quad [\vec{S},\vec{L}]=0 \quad \dots$

بطور کلی در مکانیک کوانتومی

$$\boxed{|\text{حالت‌های مکانی}\rangle \otimes |\text{حالت‌های اسپینی}\rangle}$$

$$\boxed{|\psi\rangle = \int d^3x' \left( c_+(\vec{x}')\, |\vec{x}'\rangle \otimes |\uparrow\rangle + c_-(\vec{x}')\, |\vec{x}'\rangle \otimes |\downarrow\rangle \right)}$$

$$\curvearrowright \langle\vec{x}|\psi\rangle = \int d^3x' \left( c_+(\vec{x}')\, \underbrace{\langle\vec{x}|\vec{x}'\rangle}_{\delta(\vec{x}-\vec{x}')} \otimes |\uparrow\rangle + c_-(\vec{x}')\, \underbrace{\langle\vec{x}|\vec{x}'\rangle}_{\delta(\vec{x}-\vec{x}')} \otimes |\downarrow\rangle \right)$$

$$= c_+(\vec{x})\, |\uparrow\rangle + c_-(\vec{x})\, |\downarrow\rangle$$

نویسش برداری $|\uparrow\rangle , |\downarrow\rangle$

$$= c_+(\vec{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_-(\vec{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\vec{x}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_+(\vec{x}) \\ c_-(\vec{x}) \end{pmatrix}}$$

سؤال: مقدار $c_+$ و $c_-$ چیست؟

$$\langle\vec{x}|\psi\rangle = c_+\, |\uparrow\rangle + c_-\, |\downarrow\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle\uparrow| \otimes \langle\vec{x}|\psi\rangle &= c_+(\vec{x}) \underbrace{\langle\uparrow|\uparrow\rangle}_{=1} + c_-(\vec{x}) \underbrace{\langle\uparrow|\downarrow\rangle}_{=0} = c_+(\vec{x}) \\ \langle\downarrow| \otimes \langle\vec{x}|\psi\rangle &= c_+(\vec{x}) \underbrace{\langle\downarrow|\uparrow\rangle}_{=0} + c_-(\vec{x}) \underbrace{\langle\downarrow|\downarrow\rangle}_{=1} = c_-(\vec{x}) \end{aligned}}$$

فضای هیلبرت کامل $\qquad \mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$

$|c_+(\vec{x})|^2$ چگالی احتمال اینکه ذره در مکان $\vec{x}$ و با اسپین بالا یافت شود

$|c_-(\vec{x})|^2$ چگالی احتمال اینکه ذره در مکان $\vec{x}$ و با اسپین پایین یافت شود

---

حل معادله شرودینگر در حضور میدان الکترومغناطیسی و اسپین:

آنچه داشتیم

$$H = \frac{1}{2m_e} \left( \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi$$

$$H = H_0 + H_B^{(1)}$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{\ } \vec{\nabla}^2$$

$$H = H_0 + H_B^{(1)}$$
$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\vec{\nabla}^2$$

$$H_B^{(1)} = \vec{\mu}\cdot\vec{B} \quad \curvearrowright \quad \vec{\mu} = \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad \curvearrowright \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$$
$$= \vec{\mu}_L \cdot \vec{B}$$

تغییر $H_B^{(1)} = \mu_B \dfrac{\vec{J}\cdot\vec{B}}{\hbar}$ $\qquad \vec{J} = \vec{L} + 2\vec{S}$

$$\boxed{-\frac{e}{2m_e c}(2\vec{S})\cdot\vec{B}}$$

درنکته: به تقریب رسید جمله اضافه شامل اسپین

ساختار معادله شرودینگر

$$H = \boxed{\frac{1}{2m_e}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi}\,\mathbb{1} + \boxed{\frac{e g_s}{2m_e c}\,\vec{S}\cdot\vec{B}} \qquad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

عدد

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ماتریس یک 2x2 $\qquad$ ماتریس 2x2 $\qquad$ ماتریس Pauli

$g_s = 2$

$$\frac{e g_s}{2m_e c}\frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = ?$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = \sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} B_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B_z$$
$$= \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m_e}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi + \frac{e\hbar g_s}{4m_e c}B_z & \frac{e g_s \hbar}{4m_e c}(B_x - iB_y) \\ \frac{e g_s \hbar}{4m_e c}(B_x + iB_y) & \frac{1}{2m_e}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi - \frac{e\hbar g_s}{4m_e c}B_z \end{pmatrix}$$

معادله شرودینگر $\qquad i\hbar\,\partial_t \Psi(\vec{x},t) = H_{2\times 2}\,\Psi(\vec{x},t)$

$$\Psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{x},t) \\ \Psi_-(\vec{x},t) \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

مسئله ۲: فقط بخش اسپین را در نظر می‌گیریم

$\Psi(\vec{x},t) =$ فضای مکانی $\otimes$ فضای اسپینی

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_+(t)\,|\uparrow\rangle + \alpha_-(t)\,|\downarrow\rangle\,;$$

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_+(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_-(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_+(t) \\ \alpha_-(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{i\hbar\,\partial_t|\Psi(t)\rangle = \frac{e g_s \hbar}{\ }\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,|\Psi(t)\rangle = \frac{e g_s \hbar B}{\ }\,\sigma_z\,|\Psi(t)\rangle} \qquad *$$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_+(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_-(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_+(t)\\ \alpha_-(t)\end{pmatrix}$$

$$\boxed{i\hbar\,\partial_t|\psi(t)\rangle = \frac{eg_s\hbar}{4m_ec}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\,|\psi(t)\rangle = \frac{eg_s\hbar B}{4m_ec}\,\sigma_3\,|\psi(t)\rangle} \qquad *$$

$\vec{B} = B\hat{e}_3$

با توجه به اینکه همیلتونی به زمان بستگی ندارد

(از بخش مکانی صرف نظر کرده‌ایم) جدا سازی بخش زمانی و بخش اسپینی $\longleftarrow$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar}\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} \qquad E = \hbar\omega = ?$$

با جایگذاری در معادله * خواهیم داشت:

$$\frac{eBg_s\hbar}{4m_ec}\,\sigma_3\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}$$

$$\frac{eBg_s\hbar}{4m_ec}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}$$

$$\frac{eBg_s\cancel{\hbar}}{4m_ec}\begin{pmatrix}\alpha_+\\ -\alpha_-\end{pmatrix} = \cancel{\hbar}\omega\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}$$

جایگذاری

$$\omega_L \equiv \frac{eBg_s}{4m_ec} \underset{g_s=2}{\uparrow}{=} \frac{eB}{2m_ec}$$

فرکانس لارمور Larmor frequency

$$\omega_L\alpha_+ = \omega\alpha_+ \Rightarrow \omega_1 = +\omega_L$$
$$\omega_L\alpha_- = -\omega\alpha_- \Rightarrow \omega_2 = -\omega_L$$

1) $\omega = \omega_L$ $\qquad \begin{pmatrix}\alpha_+\\ -\alpha_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_- = 0$, $\alpha_+$ هر چیزی می‌تواند باشد

$\begin{pmatrix}\alpha_+\\ 0\end{pmatrix} = \alpha_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ویژه حالت مربوط به ویژه مقدار $\omega = \omega_L$ عبارت است از

2) $\omega = -\omega_L$ $\qquad \begin{pmatrix}-\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_+ = 0$, $\alpha_-$ هر چیزی می‌تواند باشد

ویژه حالت مربوط به ویژه مقدار $\omega = -\omega_L$ عبارت است از

$\begin{pmatrix}0\\ \alpha_-\end{pmatrix} = \alpha_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

نتیجه:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_+(t)\\ \alpha_-(t)\end{pmatrix} = \alpha_+ e^{-i\omega_1 t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_- e^{-i\omega_2 t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$= \alpha_+ e^{-i\omega_L t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_- e^{+i\omega_L t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_+ e^{-i\omega_L t}\\ \alpha_- e^{+i\omega_L t}\end{pmatrix}}$$

$|\psi(0)\rangle = (\alpha_+$ $\qquad$ شرط اولیه در $t=0$

شرط اولیه در $t=0$ $\qquad |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}$

---

مسئله : فرض کنید در لحظه $t=0$ اسپین در ویژه حالت عملگر $S_x$ به ازای ویژه مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ باشد.

الف) مقدار $\alpha_+$ و $\alpha_-$ را بدست آورید $\qquad |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}$

ب) مقدار چشمداشتی $S_x$ و $S_y$ در این حالت به اندازه تحت زمان $t$ بدست آورید.

حل مسئله :

الف)

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

معادله ویژه مقداری در $S_x$

$$S_x\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\frac{\hbar}{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = \cancel{\frac{\hbar}{2}}\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_-\\ \alpha_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha_+ = \alpha_-$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix} = \alpha_+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \underset{\uparrow\ \text{Normalization}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \qquad \alpha_+ = \alpha_- = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_+ e^{-i\omega_L t}\\ \alpha_- e^{+i\omega_L t}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\omega_L t}\\ e^{+i\omega_L t}\end{pmatrix} \quad ; \quad \omega_L = \frac{eBg_s}{4mec}}$$

$$\langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{+i\omega_L t} & e^{-i\omega_L t}\end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\omega_L t}\\ e^{+i\omega_L t}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}e^{i\omega_L t} & e^{-i\omega_L t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\omega_L t}\\ e^{-i\omega_L t}\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}\left(e^{2i\omega_L t} + e^{-2i\omega_L t}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{4}\, 2\cos 2\omega_L t = \frac{\hbar}{2}\cos 2\omega_L t$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle S_x\rangle &= \frac{\hbar}{2}\cos 2\omega_L t\\ \text{بهمین ترتیب} \qquad \langle S_y\rangle &= \frac{\hbar}{2}\sin 2\omega_L t\\ \langle S_z\rangle &= 0 \end{aligned}}$$

بردار $\vec{S}$ حول جهت $z$ (جهت میدان مغناطیسی) حرکت تقدیمی می کند.