QM-2-L4-14041211

Wednesday, February 25, 2026 10:38 AM

ترازهای Landau الکترون آزاد

$$H = \frac{1}{2m_e}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$$

در شکل قبل استفاده شد از $\vec{A} = \left(-\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0\right)$ یا $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B}$ تا میدان مغناطیسی در جهت z تولید شود

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = B\hat{e}_z$$

می‌خواهیم در شکل جدید پیمانه را تغییر دهیم و از $\vec{A}' = (0, Bx, 0)$ استفاده کنیم

$$\vec{A}' - \vec{A} = \left(\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0\right) = -\vec{\nabla}\lambda \qquad \lambda = -\frac{xy}{2}B$$

با این کار، هامیلتونی ذره باردار در حضور میدان مغناطیسی ثابت را به هامیلتونی نوسانگر هماهنگ تبدیل کرد

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + \left(P_y - \frac{eB}{c}x\right)^2 + P_z^2\right)$$

(c) $\boxed{\text{هامیلتونی}\quad H = \frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dy} - \frac{eB}{c}x\right)^2 - \hbar^2\frac{d^2}{dz^2}\right)}$

معادله ویژه مقداری $\quad H\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$

$$\left.\begin{array}{l}[H, \hat{P}_y] = 0\\ [H, \hat{P}_z] = 0\end{array}\right\} \longrightarrow$$

ذره باردار در راستای y و z مانند ذره آزاد است، تابع موج آن موج تخت است

مشاهده

به همین ترتیب

$$\underbrace{\hat{P}_y}_{\text{عملگر}} e^{ik_y y} = \underbrace{P_y}_{\text{ویژه مقدار}} e^{ik_y y} \qquad k_y = \frac{P_y}{\hbar}$$

$$\hat{P}_z e^{ik_z y} = P_z e^{ik_z z} \qquad k_z = \frac{P_z}{\hbar}$$

در حل معادله ویژه مقداری، فقط حرکت در صفحه x-y را در نظر می‌گیریم و از حرکت در جهت z (راستای میدان مغناطیسی) صرف نظر می‌کنیم:

$$H\psi(x,y) = E\psi(x,y) \quad , \quad \psi(x,y) = e^{ik_y y}\psi(x)$$

جایگذاری در معادله (c)

$$\frac{1}{2m_e}\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dy} - \frac{eB}{c}x\right)^2\right)e^{ik_y y}\psi(x) = E\,e^{ik_y y}\psi(x)$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dy}e^{ik_y y} = \hbar k_y e^{ik_y y}$$

$$\frac{1}{2m_e}\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} + \left(\hbar k_y - \frac{eB}{c}x\right)^2\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\left(-\hbar^2 \quad d^2 \quad \cdot \; 1 \; \left(\frac{eB}{}\right)^2 \left(x \quad \frac{\hbar c k_y}{}\right)^2\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dx^2}+\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{eB}{c}\right)^2}_{\frac{1}{2}m_e\omega_B^2}\left(x-\frac{\hbar c k_y}{eB}\right)^2\right)\psi(x)=E\psi(x)}$$

Def: $\frac{eB}{m_e c}\equiv\omega_B$

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$ همیلتونی نوسانگر هماهنگ

$$x_0\equiv\frac{\hbar c k_y}{eB}$$

$$H=\frac{P_x^2}{2m_e}+\frac{1}{2}m_e\omega_B^2(x-x_0)^2$$

که همیلتونی نوسانگر هماهنگ در جهت x است . نوسان حول $x=x_0$

$$E_n=\hbar\omega_B\left(n+\frac{1}{2}\right)$$ ترازهای انرژی Landau

که در آن $n\in\mathbb{N}_0$

$$\omega_B=\frac{eB}{m_e c}$$ Cyclotron frequency

ویژه‌حالتها همان توابع هرمیت که در مورد نوسانگر هماهنگ داشتیم .

• اثر Aharonov-Bohm

تبدیلات پیمانه‌ای :

$$\varphi\longrightarrow\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

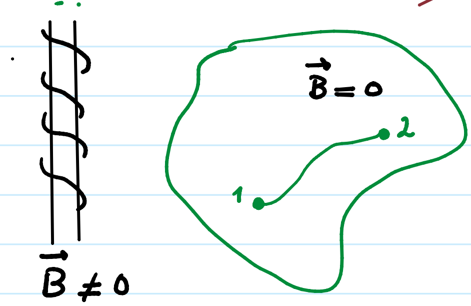
$$\vec{A}\longrightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\lambda$$

درخواست ما : معادله شرودینگر تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا باشد

$$\left(\frac{1}{2m_e}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+\cancel{e\varphi}\right)\psi(\vec{x})=E\psi(\vec{x})$$

$\varphi=0$ پیمانه کولن

در آن صورت $\psi\longrightarrow\psi'(\vec{x},t)=e^{\frac{ie}{\hbar c}\lambda}\psi(\vec{x},t)$



$$\vec{B}=\vec{0}\quad\curvearrowright\quad\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}=\vec{0}\Rightarrow\vec{A}=-\vec{\nabla}\lambda$$

تبدیل پیمانه‌ای

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\lambda=-\vec{\nabla}\lambda+\vec{\nabla}\lambda=0$$

$$\vec{A}'=\vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{2m_e}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\underbrace{\vec{A}'}_{=0}\right)^2+V(\vec{x})\right)\psi'(\vec{x},t)=i\hbar\,\partial_t\psi'(\vec{x},t)$$

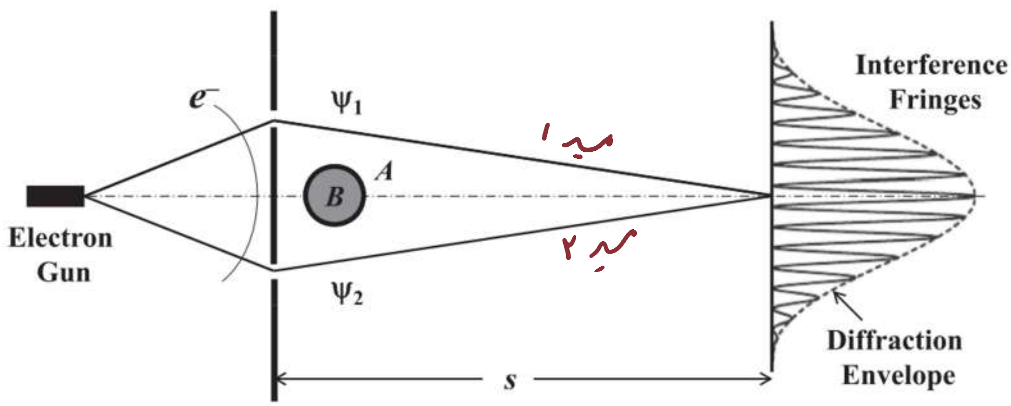
پس در آن منطقه‌ای که $\vec{B}=\vec{0}$ است ، می‌توان $\vec{A}$ را از معادله شرودینگر حذف کرد به شرط اینکه ψ یک فاز غیر بدیهی بگیرد

$$\psi'(\vec{x},t)=\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda\right)\psi(\vec{x},t)$$

[illegible]

$$\boxed{\begin{gathered}\psi'(\vec{x},t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\lambda\right)\psi(\vec{x},t) \\ \vec{A} = -\vec{\nabla}\lambda \longrightarrow \lambda(\vec{x},t) = -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s}\cdot\vec{A} \quad \text{با استدلال بالا} \\ \longrightarrow \psi'(\vec{x},t) = \exp\left(\frac{-ie}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s}\cdot\vec{A}(\vec{s})\right)\psi(\vec{x},t)\end{gathered}}$$

آزمایش Aharonov - Bohm



$$\psi_1 = e^{-i\alpha_1}\psi_0 \qquad \alpha_i = \frac{e}{\hbar c}\int_{C_i}\vec{A}\cdot d\vec{s}$$

$$\psi_2 = e^{-i\alpha_2}\psi_0$$

$$\psi_B = \psi_1 + \psi_2 = \left(e^{-i\alpha_1} + e^{-i\alpha_2}\right)\psi_0$$

$$|\psi_B|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = \left(e^{-i\alpha_1} + e^{-i\alpha_2}\right)\left(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}\right)|\psi_0|^2$$

$$= \left(2 + e^{-i(\alpha_1-\alpha_2)} + e^{+i(\alpha_1-\alpha_2)}\right)|\psi_0|^2$$

$$= 2\left(1 + \cos(\alpha_1-\alpha_2)\right)|\psi_0|^2$$

اختلاف فاز

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{e}{\hbar c}\left(\int_{C_1}\vec{A}\cdot d\vec{s} - \int_{C_2}\vec{A}\cdot d\vec{s}\right) = \frac{e}{\hbar c}\oint_{\underset{\text{مسیر بسته}}{C}}\vec{A}\cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{e}{\hbar c}\int_{\underbrace{S(C)}_{\text{سطح بسته}}}(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{F} = \underbrace{\frac{e}{\hbar c}\int_{S(C)}\vec{B}\cdot d\vec{F}}_{\text{شار مغناطیسی}}$$

Magnetic flux Φ_B

$$\boxed{\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{e}{\hbar c}\Phi_B}$$

$$\psi_B = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0\left(e^{-i\alpha_1} + e^{-i\alpha_2}\right) = \psi_0 e^{-i\alpha_1}\left(1 + e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}\right)$$

$$\psi_B = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 \left(e^{-i\alpha_1} + e^{-i\alpha_2}\right) = \psi_0 e^{i\alpha_1}\left(1 + e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}\right)$$

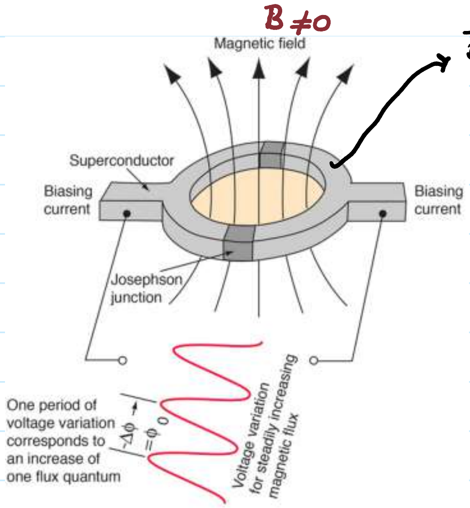
$$\boxed{\psi_B = \psi_0 e^{i\alpha_1}\left(1 + e^{\frac{ie}{\hbar c}\Phi_B}\right)}$$

با تغییر شار مغناطیسی خطوط تداخلی روی صفحه تغییر میکنند

کوانتش شار مغناطیسی

$B \neq 0$

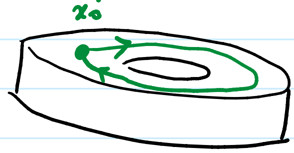
$\vec{B} = \vec{0}$



SQUID MAGNETOMETER

See: [SQUID Magnetometer and Josephson Junctions]

$\vec{x}_0$



$$\psi_B(\vec{x}) = \exp\left(\frac{i\,2e}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A}\cdot d\vec{s}\right)\psi_0(\vec{x})$$

$2e$ بار الکتریکی جفت کوپر را داریم اینجا Cooper pair

اگر جفت کوپر یک مسیر بسته از $\vec{x}_0$ تا $\vec{x}_0$ را طی کند داریم :

$$\psi_0(\vec{x}_0) = \psi_B(\vec{x}_0) = \exp\left(\frac{2ie}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_0} \vec{A}\cdot d\vec{s}\right)\psi_0(\vec{x}_0) = \exp\left(\frac{2ie}{\hbar c}\underbrace{\oint \vec{A}\cdot d\vec{s}}_{\Phi_B}\right)\psi_0(\vec{x}_0)$$

$$\longrightarrow \quad e^{\frac{2ie}{\hbar c}\Phi_B} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{2e}{\hbar c}\Phi_B = 2\pi n \quad \rightarrow \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

کوانتش شار مغناطیسی

$$\boxed{\Phi_B = \frac{2\pi\hbar c}{2e}\, n = \Phi_0\, n}$$

کوانتوم شار مغناطیسی

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} = 2.07 \times 10^{-7}\ \mathrm{G\,cm^2}$$

کوانتوم شار