QM-2-L3-14041210

Wednesday, February 25, 2026 10:37 AM

برهمکنش ذره باردار (الکترون) با میدان الکترومغناطیسی خارجی :

معادله شرودینگر :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = H\psi(\vec{x},t)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi$$

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{x},t) \quad , \quad \varphi = \varphi(\vec{x},t)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

با فرض :

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}) \quad , \quad \varphi = \varphi(\vec{x})$$

$$\psi(\vec{x},t) = T(t)\psi(\vec{x}) \curvearrowright T(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

معادله ویژه مقداری انرژی $\rightarrow$

$$\boxed{\left\{\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi + V(\vec{x})\right\}\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})}$$

مثال ۱   الکترون در حضور میدان مغناطیسی همگن

$$\vec{B} = B\hat{e}_z \quad , \quad B = \text{const}$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

پیمانه کولنی : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \quad , \quad \varphi = 0$

فعلاً $V(\vec{x}) = 0$

با انتخاب $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x}\times\vec{B} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} H\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \curvearrowright H = H_0 + H_B \\ H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}) \\ H_B = \underbrace{\vec{\mu}\cdot\vec{B}}_{(1)} + \underbrace{\frac{e^2\vec{B}^2}{8m_ec^2}\rho^2}_{(2)} \\ \vec{\mu} \quad \text{گشتاور مغناطیسی Magnetic Moment} \\ \vec{\mu} = \mu_B\frac{\vec{L}}{\hbar} \quad , \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_ec} \end{array}}$$

$$\frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}} \cong 1.1\times10^{-10}\, B$$

در صورتیکه میدان مغناطیسی کوچک باشد می‌توان از جمله (2) صرف‌نظر کرد

مثال ۱ $\longleftarrow$ • اتم هیدروژن‌گونه در حضور میدان مغناطیسی همگن

اثر بهنجار زیمن   Normal Zeeman Effect

$$V(\vec{x}) = \frac{-Ze^2}{r}$$

جمله اول :

$$\vec{\mu}\cdot\vec{B} \underset{\vec{B}=B\hat{e}_z}{=} \frac{eB}{2m_e}L_z \equiv H_B^{(1)}$$

نکته :

$$[L_z, H] = 0 \qquad H_0 = \frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{Ze^2}{r}$$

$$H_0|nlm\rangle = E_n|nlm\rangle$$

پس : $[L_z , H] = 0$ $\qquad$ $H_0 = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}$

H , L_z ویژه‌حالتهای مشترک دارند

$H_0 |nlm_l\rangle = E_n |nlm_l\rangle \qquad E_n = -\frac{1Ry}{n^2}$

$L_z |nlm_l\rangle = \hbar m_l |nlm_l\rangle$

نتیجه :

$$H |nlm_l\rangle = E |nlm_l\rangle$$

$$(H_0 + H_B^{(1)}) |nlm_l\rangle = E |nlm_l\rangle$$

طیف جدید انرژی در اثر زیمن :

$$\boxed{E_n + \frac{eB}{2m_e c}\hbar m_l = E}$$

فرکانس لارمور $\omega_L = \frac{eB}{2m_e c}$ $\rightsquigarrow$ $E_{n,m_l} = E_n + \hbar\omega_L m_l$

Larmor frequency.

$$\begin{cases} n = 1, 2, \dots \\ l = 0, 1, 2, \dots n-1 \\ -l \leq m_l \leq l \end{cases}$$

$l=2$: $m_l = -2$, $m_l = -1$, $m_l = 0$, $m_l = 1$, $m_l = 2$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} m_l=-1 \\ m_l=0 \end{matrix}\right\} \Delta E$

$2l+1$ تراز انرژی جدید

$$\Delta E = \hbar\omega_L$$

$l=1$: $m_l = -1$, $m_l = 0$, $m_l = 1$

$l=0$: $m_l = 0$

مثال ۲ : اثر میدان مغناطیسی قوی (از بخش زیمان صرفنظر می‌کنیم)

$$H = H_0 + H_B^{(1)} + H_B^{(2)}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\vec{\nabla}^2 + \frac{eB}{2m_e c}L_z + \frac{e^2B^2}{8m_e c^2}\rho^2 \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\vec{x} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$H_B^{(1)} = \frac{e}{2m_e c}\vec{L}\cdot\vec{B} \underset{\vec{B} = B\hat{e}_z}{=} \frac{eB}{2m_e c}L_z = \frac{eB}{2m_e c}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

در دستگاه استوانه‌ای

$$(A) \quad \boxed{E\psi(\vec{x}) = \frac{-\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{eB}{2m_e c}L_z + \frac{e^2B^2\rho^2}{8m_e c^2}\Big\}\psi(\vec{x})}$$

Ansatz : $\psi(\vec{x}) = \psi(\rho,\varphi,z) = e^{ik_z z}\, e^{im\varphi}\, u(\rho)$

$\hbar k_z = P_z$, $[\hat{P}_z, H] = 0$ ⌒ ویژه حالت مشترک دارند

$\hat{P}_z f(z) = P_z f(z)$

$\to f(z)$ ویژه تابع $f(z) = e^{\frac{i}{\hbar}P_z z}$

(A) جایگذاری در رابطه

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - k^2\right) + \frac{eB}{2m_e c}\hbar m + \frac{e^2B^2\rho^2}{8m_e c^2}\right\}\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \underbrace{\frac{e^2B^2}{4\hbar^2c^2}}\rho^2 + \left(\frac{2m_e E}{\hbar^2} - \frac{eB}{\hbar c}m - k^2\right)\right\}u(\rho) = 0$$

تغییر متغیر $x = a\rho$ with $a = \left(\frac{eB}{2\hbar c}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\left\{a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - a^2\frac{m^2}{x^2} - \overbrace{a^4\frac{1}{a^2}x^2} + \left(\frac{2m_eE}{\hbar^2} - \frac{eB}{\hbar c}m - k_z^2\right)\right\}u(x) = 0$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{m^2}{x^2} - x^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)\left(E - \frac{\hbar eB}{2m_eC}m - \frac{\hbar^2k_z^2}{2m_e}\right)\right\}u = 0$$

می‌رسیم به

$$(B) \quad \boxed{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{m^2}{x^2} - x^2 + \lambda\right)u(x) = 0 \\ \text{که در آن} \quad \lambda = \frac{4m_ec}{eB\hbar}\left(E - \frac{\hbar^2k_z^2}{2m_e}\right) - 2m\end{array}}$$

برای تعیین جواب این رابطه رفتار جواب را در حد $x \to 0$ و $x \to \infty$ ابتدا بدست میاوریم

a) $x \to 0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{m^2}{x^2}\right)u(x) \simeq 0$$

$$u(x) \sim x^{|m|}$$

$$\left(|m|(|m|-1) + |m| - m^2\right)x^{|m|-2} = 0 \checkmark$$

b) $x \to \infty$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2\right)u(x) \simeq 0$$

$$u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\boxed{u(x) = x^{|m|}e^{-x^2/2}G(x)}$$

جواب را به صورت زیر مجدداً حدس می‌زنیم :

جواب را به صورت زیر مجدداً حدس می‌زنیم :

$$\boxed{u(x) = x^{|m|}\, e^{-x^2/2}\, G(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x) + \left(\frac{2|m|+1}{x} - 2x\right)\frac{dG}{dx} + (\lambda - 2 - 2|m|)\,G(x) = 0$$

$$x^2 \equiv y$$

$$\boxed{\frac{d^2}{dy^2}G(y) + \left(\frac{|m|+1}{y} - 1\right)\frac{dG}{dy} + \frac{(\lambda - 2 - 2|m|)}{4y}\,G(y) = 0}$$

$L_r^s(y)$ این معادله دیفرانسیل تابع لاگر وابسته است

$$\left(L_r^s\right)'' + \left(\frac{s+1}{y} - 1\right)\left(L_r^s\right)' + \frac{(r-s)}{y}\,L_r^s(y) = 0$$

مقایسه →

$$s \equiv |m|$$

$$\frac{1}{4}(\lambda - 2 - 2|m|) = r - s = r - |m| \rightarrow r = \frac{1}{4}(\lambda - 2 + 2|m|)$$

$$n_r = r - s$$

تعداد صفرهای لاگر

$$n_r = \frac{1}{4}(\lambda - 2 - 2|m|) \longrightarrow \lambda = 4n_r + 2|m| + 2 = \frac{4m_e c}{eB\hbar}\left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e}\right) - 2m$$

مطلوب است E برحسب n_r, m

$$\boxed{E_{n_r,m} - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e} = \frac{eB\hbar}{2m_e c}\left(2n_r + |m| + 1 + m\right)}$$

انرژی جنبشی در راستای z به موازات میدان مغناطیسی

$$\boxed{u(x) = e^{-x^2/2}\, x^{|m|}\, L^{s=|m|}_{r=n_r+|m|}(x)}$$

به همراه ضریب نرمالیزاسیون

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{eB}{m_e c} \equiv \omega_B \\ &E_{n_r,m} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e} + \hbar\omega_B\left(n_r + \frac{m + |m| + 1}{2}\right) \end{aligned}}$$

فرکانس سیکلوترون