

معادله شرودینگر ذره باردار در حضور میدان الکترومغناطیس:

a) $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$ تبادلی:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad m \ddot{\vec{x}} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) = \vec{F}_L$$

b) $H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -p_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{q}{c} A_i \right)$$

تعریف \vec{p} و \vec{x} جدید

$m \dot{\vec{x}} = \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$

\vec{p} عملگر $\longleftrightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ $\longleftrightarrow \vec{A}(\vec{x}, t)$ در معادله شرودینگر

\vec{x} عملگر $\longleftrightarrow \vec{x}$

$\varphi(\vec{x}, t)$ $\longleftrightarrow \varphi(\vec{x}, t)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi \right) \psi(\vec{x}, t)$$

معادله شرودینگر ذره باردار در حضور میدان الکترومغناطیس

$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$

پایه ماژرنیج

در پایه جاچاگر

$[x_i, m\dot{x}_j] = [x_i, p_j - \frac{q}{c} A_j] = i\hbar \delta_{ij}$

$m\dot{x}_i = p_i - \frac{q}{c} A_i$

$[x_i, x_j] = 0 = [p_i, p_j]$

$[m\dot{x}_i, m\dot{x}_j] = [p_i - \frac{q}{c} A_i, p_j - \frac{q}{c} A_j] = [p_i, p_j] - \frac{q}{c} [A_i, p_j] - \frac{q}{c} [p_i, A_j] + \frac{q^2}{c^2} [A_i, A_j]$

(a) $[A_i, p_j] f = -i\hbar [A_i, \partial_j] f(\vec{x}, t)$
 $= -i\hbar (A_i \partial_j f - \partial_j (A_i f)) = -i\hbar (A_i \partial_j f - (\partial_j A_i) f - A_i \partial_j f)$
 $= +i\hbar \partial_j A_i f$

$\longrightarrow [A_i, p_j] = i\hbar \partial_j A_i = -\hbar \partial_j A_i$

$$\rightarrow [A_i, p_j] = i\hbar \partial_j A_i = -\frac{\hbar}{i} \partial_j A_i$$

$$\begin{aligned} (b) [p_i, A_j] f &= -i\hbar [\partial_i, A_j] f \\ &= -i\hbar (\partial_i (A_j f) - A_j \partial_i f) = -i\hbar ((\partial_i A_j) f + A_j \cancel{\partial_i f} - A_j \cancel{\partial_i f}) \\ &= -i\hbar (\partial_i A_j) f \end{aligned}$$

$$[p_i, A_j] = \frac{\hbar}{i} \partial_i A_j$$

$$\begin{aligned} [m\dot{x}_i, m\dot{x}_j] &= -\frac{q}{c} ([A_i, p_j] + [p_i, A_j]) \\ &= -\frac{q}{c} \left(-\frac{\hbar}{i}\right) (\partial_j A_i - \partial_i A_j) = -\frac{q}{c} \frac{\hbar}{i} F_{ij} \\ &= i\hbar \frac{q}{c} F_{ij} = i\hbar \frac{q}{c} \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned}$$

$$[m\dot{x}_i, m\dot{x}_j] = i\hbar \frac{q}{c} \epsilon_{ijk} B_k$$

ناوردانی همبسته ای، همادله میگردانند:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi \right) \psi(\vec{x}, t)$$

$$\vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \lambda(\vec{x}, t)$$

$$\varphi'(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(\vec{x}, t)$$

گازدخواست کنیم و همادله میگردانند، تبدیلات همبسته ای همادله باشند، در آنوقت نام موج باید به صورت زیر تغییر کند:

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \lambda(\vec{x}, t)\right) \psi(\vec{x}, t)$$

نکته: با وجود اینکه تغییر ψ به صورت یک فاز است، همادله میگردانند ولی در وجود فاز می تواند اثر داشته باشد.

→ Aharonov-Bohm effect
→ گزایش طاقی و گزایش برای ۱

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi \right) \psi(\vec{x}, t)$$

همادله میگردانند از برای انرژی

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi \right) \psi(\vec{x}, t)$$

اگر φ, \vec{A} مرتبه مع بزرگی کم باشند. همیونی بزرگان داشته نیت؛

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \psi(\vec{x})$$

تعداد درجه آزادی:

$$\left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi \right) \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x})$$

فرض: $\varphi=0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A}=0$ بماند لونی

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \vec{\nabla}^2 - \frac{\hbar}{i} \frac{q}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{\hbar}{i} \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} - \frac{\hbar}{i} \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q^2}{c^2} \vec{A}^2 \right) \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x})$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi - \frac{q}{mc} \frac{\hbar}{i} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi + \frac{q^2}{2mc^2} \vec{A}^2 \psi = E \psi(\vec{x})$$

این تعارض نیست

در ادامه حالت (1)، (2) را جداگانه در نظر بگیریم
فرض: انتخاب سازه ازین بماند برای سیمه میدان تعارضی در جهت می باشد

$$\vec{B} = B \hat{e}_3 \\ = (0, 0, B)$$

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{x} \times \vec{B} \Rightarrow -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} x_j B_k = A_i \\ A_1 = -\frac{1}{2} \epsilon_{123} x_2 B_3 = -\frac{1}{2} y B \\ A_2 = -\frac{1}{2} \epsilon_{213} x_1 B_3 = +\frac{1}{2} x B$$

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} B (y, -x, 0)$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ جدا اول} \quad -\frac{q}{mc} \frac{\hbar}{i} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi &= -\frac{q}{mc} \vec{A} \cdot \vec{p} \psi = \frac{q}{2mc} (\vec{x} \times \vec{B}) \cdot \vec{p} \psi \\ &= \frac{q}{2mc} \epsilon_{ijk} x_i B_j p_k \psi = -\frac{q}{2mc} \epsilon_{ikj} x_i p_k B_j \psi \\ &= -\frac{q}{2mc} (\vec{x} \times \vec{p}) \cdot \vec{B} \psi = -\frac{q}{2mc} \vec{L} \cdot \vec{B} \psi \end{aligned}$$

$$(1) \text{ در این مرتبه جدا اول} \quad = -\frac{q\hbar}{2mc} \frac{\vec{L}}{\hbar} \cdot \vec{B} \psi$$

$$q = -e \quad \text{الکترون} \\ m = m_e$$

$$\text{لونی} \quad \frac{e\hbar}{2mc} \equiv \mu_B \quad \text{Bohr Magnetron}$$

$$\vec{\mu} = \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad \text{Magnetic Moment}$$

جدا بار تعارضی

$$(1) \text{ جدا اول} \quad = \vec{\mu}_B \cdot \vec{B} \psi$$

$$\vec{\mu}_B \cdot \vec{B} = \mu_B \frac{L_z}{\hbar} B \quad ; \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$$

اگر بار تعارضی در جهت می باشد

جهت پاریتالیسی

$$\vec{\mu}_B \cdot \vec{B} = \mu_B \frac{L_z}{\hbar} B \quad ; \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$$

(2) $\frac{q^2}{2mc^2} \vec{A}^2 \psi = \frac{q^2}{8mc^2} \vec{B}^2 \psi^2$

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} B (y, -x, 0) \rightarrow \vec{A}^2 = \frac{1}{4} B^2 (x^2 + y^2)$$

جهت پاریتالیسی $\vec{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$

جهت پاریتالیسی

$$(2) = \frac{e^2}{8m_e c^2} \vec{B}^2 \psi^2$$

سؤال: نسبت درجه، لذا چه اثر بیشتری دارد؟

نسبت بدین شکل $\frac{(2)}{(1)} = \frac{\frac{e^2}{48m_e c^2} \vec{B}^2 \langle \psi^2 \rangle}{\frac{e}{2m_e c} \langle \vec{B} \cdot \vec{L} \rangle} = \frac{e^2}{4\hbar c} \frac{B}{e} \frac{a_0^2}{e} = \frac{1}{4} \alpha \frac{B}{\frac{e}{a_0^2}} = 1.1 \times 10^{-10} B$

a) $\langle \psi^2 \rangle = a_0^2$ a_0 Bohr's radius $\uparrow \uparrow a_0 = \frac{\hbar}{m_e \alpha} ; \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$

b) $\langle \vec{B} \cdot \vec{L} \rangle = B \langle L_z \rangle = B \hbar m_l \sim B \hbar$
 $L_z |nlm_l\rangle = \hbar m_l |nlm_l\rangle$ \uparrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{بدین درشتی افزودن این ترم} \\ \text{دقتی محاسبه می شود} \end{array} \right.$

(2) = (1) $(1.1 \times 10^{-10} B)$ نسبت:

i) $B \sim 100 T = 10^6 G$ اگر پاریتالیسی درجه باشد $\left(\frac{\text{پاریتالیسی درجه باشد}}{\text{پاریتالیسی درجه باشد}} \right)$
 $\rightarrow (2) \approx (1) (10^{-4}) \Rightarrow (2) \ll (1)$

ii) $B \sim 10^{15} - 10^{18} G$ اگر پاریتالیسی درجه باشد
 $(2) = (1) (1.1 \times 10^{-10} \times 10^{15}) \sim (1) 10^5 \Rightarrow (2) \gg (1)$

$$\text{مورد اول + مورد دوم} = \left(\vec{\mu}_B \cdot \vec{B} + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m_e c^2} \right) \psi(\vec{x}, t)$$

جهت پاریتالیسی $x_m > 0$ $x_m < 0$ جهت پاریتالیسی

Normal Zeeman Effect

اثر نرمال زیمان \leftarrow

$$H = H_0 + H_B$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{Ze^2}{r}$$

$$H_B = \frac{-g}{2m_e c} B L_z$$

صاف است جهت اول در نظر گرفته شود (جهت خاص در B)

پاریتالیسی جهت در جهت \uparrow

.....

$$H_B = \frac{-q}{2m_e c} B L_z$$

بدان نفایس مختلف در لایه 3

مطرب است تغییرات انرژی اتم هیدروژن
 یادآوری: تغییرات انرژی اتم هیدروژن

$$E_n = 13.6 \left(\frac{-1}{n^2} \right)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

$$-l \leq m_l \leq l$$

$$13.6 = \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 \sim 13.6 \text{ eV}$$

هر دو عملگر همزمان در فرآیند توابع مشترک دارند

$$H_0 |nlm_l\rangle = E_n |nlm_l\rangle \quad (1)$$

$$[H_0, L_z] = 0 \rightarrow [H_0, H] = 0$$

بنابراین ساده فرآیند است

$$H |nlm_l\rangle = E |nlm_l\rangle$$

$$\left(H_0 - \frac{qB}{2m_e c} L_z \right) |nlm_l\rangle = E |nlm_l\rangle$$

Use (1) & $L_z |nlm_l\rangle = \hbar m_l |nlm_l\rangle$

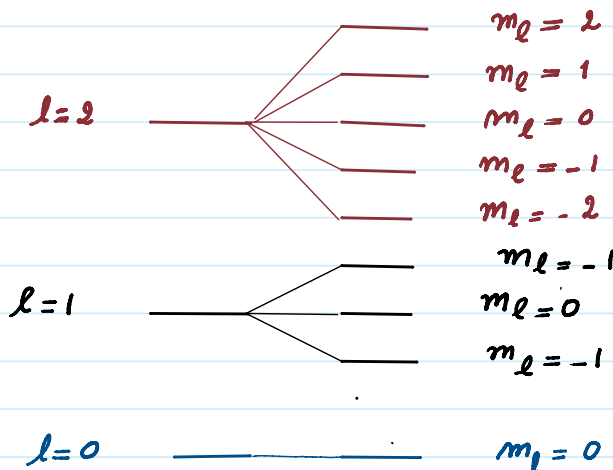
$$\left(E_n - \frac{qB}{2m_e c} \hbar m_l \right) |nlm_l\rangle = E |nlm_l\rangle$$

$$\rightarrow E_{n m_l} = E_n - \frac{qB\hbar}{2m_e c} m_l = E_n + \hbar \omega_L m_l$$

Larmor فرکانس $\omega_L \equiv \frac{eB}{2m_e c}$ با فرض $q = -e$

$$\Delta E = E_{n, m_l+1} - E_{n, m_l} = \cancel{E_n + \hbar \omega_L (m_l+1)} - \cancel{E_n - \hbar \omega_L m_l} = \hbar \omega_L$$

$$\Delta E = \hbar \left(\frac{eB}{2m_e c} \right) = 13.6 \times 4 \times 10^{-10} \text{ B}$$



بدان مرتبه همگی فرکانس از سن رفت
 هر فرکانس انرژی به $+1$ از فرکانس می شود

$$\Delta E = \hbar \omega_L$$

$$\Delta E = \hbar \omega_L$$