QM-2-L18-1404-2

Tuesday, May 26, 2026 5:17 PM

سیستم‌های با N ذره یکسان (II)

خلاصه : بوزون‌ها

$|\lambda_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ حالت تک ذره‌ای

$|\lambda_1\rangle_{(1)} \otimes |\lambda_2\rangle_{(2)} \otimes \cdots \otimes |\lambda_N\rangle_{(N)} = |\lambda_1 \dots \lambda_N\rangle \in \mathcal{H}_N$ حالت N ذره‌ای

$$\boxed{\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_1^{(1)} \otimes \mathcal{H}_1^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1^{(N)}}$$

$|\lambda_1 \dots \lambda_N\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P\in S_N} |\lambda_{P(1)} \dots \lambda_{P(N)}\rangle$ تابع موج متقارن سازی شده

$|\widetilde{\lambda_1 \dots \lambda_N}\rangle_+ = \left(\frac{1}{n_1!\, n_2! \cdots}\right)^{\frac{1}{2}} |\lambda_1 \dots \lambda_N\rangle_+$

$\sum_{\alpha=1}^{\infty} n_\alpha = N$ که در آن n_i عدد اشغال جایگاه i ام است.

$|n_1 \dots n_\alpha \dots\rangle \in \mathcal{F}_N$ فضای Fock برای N ذره بوزونی

عملگرهای خلق و فنای بوزونی :

$a_i^+ : \mathcal{F}_N \to \mathcal{F}_{N+1}$ عملگر خلق

$a_i : \mathcal{F}_N \to \mathcal{F}_{N-1}$ عملگر فنا

عملگر خلق $a_i^+ |\dots n_i \dots\rangle = \sqrt{n_i+1}\, |\dots \boxed{n_i+1} \dots\rangle$ عملگر خلق

که یک ذره در جایگاه i ام خلق شده است

عملگر فنا $a_i |\dots n_i \dots\rangle = \sqrt{n_i}\, |\dots \boxed{n_i-1} \dots\rangle$ عملگر فنا

در جایگاه i ام یک ذره نابود شده است

به جای عملگر افزاینده و کاهنده از نام عملگر خلق و فنا استفاده می‌کنیم

$$\boxed{\text{Fock فضای} \qquad \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2^{(s)} \oplus \mathcal{F}_3^{(s)} \oplus \cdots}$$

symmetryed.

$\mathcal{F}_0$ فضای برداری که در همه جایگاه‌ها هیچ ذره‌ای نداریم $|00 \dots 0 \dots\rangle \equiv |0\rangle$ خلاء

که جایگاه اول خالی

که جایگاه دوم خالی

$|0\rangle = |00 \dots 0 \dots\rangle$

$a_i^+ |0\rangle = |00 \dots 1 \dots\rangle$

که در جایگاه i ام یک ذره خلق شده

$a_i^+ |0\rangle \quad |0\,0 \ldots \ldots\rangle$

که در جایگاه i ام یک ذره خلق شده

روابط جابجایی عملگرهای خلق و فنا

$$[a_i, a_j] = 0 \qquad [a_i^+, a_j^+] = 0 \qquad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$$

اثبات رابطه فوق برای $i=j$ $\qquad a_i a_i^+ - a_i^+ a_i = 1 \quad ?$

$$(a_i a_i^+ - a_i^+ a_i)\,|\ldots n_i \ldots\rangle = \left(\sqrt{(n_i+1)^2} - \sqrt{n_i^2}\right)|\ldots n_i \ldots\rangle$$
$$= 1 \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$
$$\Rightarrow \boxed{[a_i, a_i^+] = 1}$$

- جمله دوم $\quad a_i \,|\ldots n_i\rangle = \sqrt{n_i}\,|\ldots n_i - 1 \ldots\rangle$

$$a_i^+ a_i \,|\ldots n_i\rangle = \sqrt{n_i}\; a_i^+ |\ldots n_i - 1 \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\sqrt{(n_i-1+1)}\,|\ldots n_i - 1 + 1 \ldots\rangle$$
$$= \sqrt{n_i^2}\,|\ldots n_i \ldots\rangle = n_i \,|\ldots n_i \ldots\rangle \quad \checkmark$$

- جمله اول $\quad a_i^+ \,|\ldots n_i \ldots\rangle = \sqrt{n_i+1}\,|\ldots n_i + 1 \ldots\rangle$

$$a_i a_i^+ \,|\ldots n_i \ldots\rangle = \sqrt{n_i+1}\; a_i \,|\ldots n_i + 1 \ldots\rangle = \sqrt{(n_i+1)^2}\,|\ldots n_i \ldots\rangle$$
$$a_i a_i^+ \,|\ldots n_i \ldots\rangle = (n_i + 1)\,|\ldots n_i \ldots\rangle \quad \checkmark$$

$$a_i^+ \,|0 \ldots \underset{\text{جایگاه i ام}}{0} \ldots\rangle = |0 \ldots 1\, 0 \ldots\rangle$$

$$(a_i^+)^2 \,|0 \ldots 0 \ldots\rangle = \sqrt{2}\,|0 \ldots 2\, 0 \ldots\rangle$$
$$(a_i^+)^3 \,|0 \ldots 0 \ldots\rangle = \sqrt{2 \times 3}\,|0 \ldots 3\, 0 \ldots\rangle$$

$$(a_i^+)^N \,|0 \ldots 0 \ldots\rangle = \sqrt{N!}\,|0 \ldots N\, 0 \ldots\rangle$$

$$\boxed{|n_1\, n_2 \ldots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \ldots}} (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \ldots |0\rangle}$$

عملگر اشغال $\hat{n}_i$:

$$\hat{n}_i = a_i^+ a_i$$
$$\hat{n}_i \,|\ldots n_i \ldots\rangle = n_i \,|\ldots n_i \ldots\rangle$$

$\hat{n}_i$ عملگری است که تعداد ذرات در جایگاه i را می‌شمرد.

$$\boxed{\hat{N} = \sum_i a_i^+ a_i}$$ عملگر شمارش برای همه ذرات

$$\boxed{\hat{N}\,|\ldots n_i \ldots\rangle = \sum n_i \,|\ldots n_i \ldots\rangle = N\,|\ldots n_i \ldots\rangle}$$

$$\boxed{\hat{N} = \sum_i a_i^{\dagger} a_i}$$ عملگر تعداد ذرات

$$\boxed{\hat{N} \,|\ldots n_i \ldots\rangle = \underbrace{\sum_i n_i}_{N} \,|\ldots n_i \ldots\rangle = N\,|\ldots n_i \ldots\rangle}$$

فرمیون‌ها : تابع موج فرمیون‌ها باید تحت جابجایی حالت هر دو ذره دلخواه پادمتقارن باشد .

پادمتقارن سازی :

$$|\lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle_- = S_- \,|\lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} \boxed{(-1)^P} \,|\lambda_{P(1)} \ldots \lambda_{P(N)}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} |\lambda_1\rangle_{(1)} & \cdots & |\lambda_N\rangle_{(1)} \\ |\lambda_1\rangle_{(2)} & \cdots & |\lambda_N\rangle_{(2)} \\ \vdots & & \\ |\lambda_1\rangle_{(N)} & \cdots & |\lambda_N\rangle_{(N)} \end{pmatrix} \in \underset{\text{antisym.}}{\mathcal{E}_N^{(a)}}$$

Slater determinant

اصل طرد Pauli : هیچ دو الکترونی نمی‌توانند در حالت یکسان باشند $=$ اگر دو سطر این ماتریس مانند هم باشند، دترمینان آن صفر است .

فضای Fock در یک سیستم از N فرمیون :

$$|n_1\, n_2 \ldots n_i \ldots\rangle \quad \text{with} \quad n_i = 0, 1 \quad \forall i$$

در هر جایگاه یا هیچ ذره فرمیونی ندارید یا فقط یک ذره فرمیونی دارید :

فضای Fock فرمیون‌ها : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2^{(a)} \oplus \ldots$

عملگرهای خلق و فنای فرمیونی :

آنچه داریم $\quad |\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_N\rangle_- = -\,|\lambda_2\, \lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle_- \quad \star$

خلاء فرمیونی $\quad |0\rangle$

$$a_{\lambda_\alpha}^{\dagger}\,|0\rangle = |\lambda_\alpha\rangle$$

$$\boxed{a_{\lambda_1}^{\dagger}\, a_{\lambda_2}^{\dagger}}\, a_{\lambda_3}^{\dagger} \ldots a_{\lambda_N}^{\dagger}\, |0\rangle = |\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_N\rangle_-$$

$$\overset{\star}{=} -\,|\lambda_2\, \lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle_-$$

$$= \boxed{-\,a_{\lambda_2}^{\dagger}\, a_{\lambda_1}^{\dagger}}\, a_{\lambda_3}^{\dagger} \ldots a_{\lambda_N}^{\dagger}\, |0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \{a_{\lambda_1}^{\dagger}, a_{\lambda_2}^{\dagger}\} = 0 \qquad \boxed{\{a_i^{\dagger}, a_j^{\dagger}\} = 0}$$

$(a_i^{\dagger})^2 = 0$

$\Rightarrow \quad \{a_{x_1}, a_{x_2}\} = 0$ $\qquad$ $\boxed{\{a_i, a_j\} = 0}$

اگر i و j مساوی باشند $\quad (a_i^+)^2 = 0 \rightarrow$ به همین دلیل دو ذره فرمیونی نمی‌توانند یک حالت را اشغال کنند.

$$\boxed{|n_1\, n_2, \dots\rangle = (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \dots |0\rangle \qquad n_i = 0,1 \qquad \forall i = 1,2,\dots}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_i^+ \,|\dots n_i \dots\rangle &= (1-n_i)\,(-1)^{\sum_{j<i} n_j}\,|\dots n_i+1 \dots\rangle \\ a_i \,|\dots n_i \dots\rangle &= n_i\,(-1)^{\sum_{j<i} n_j}\,|\dots n_i-1 \dots\rangle \end{aligned}}$$

مثال

$$a_5^+ |1 0 0 1 0 1 0 \dots\rangle = \underbrace{(1-1)}_{=0}\,(-1)^{\sum_{j<5} n_j}\,|0 0 1 0 (1+1) \dots\rangle = 0$$

هیچ ذره در حالت اول

هیچ ذره در حالت دوم

یک ذره در حالت سوم

$$a_5^+ |0 0 1 0 0 1 0 \dots\rangle = (1-0)\,(-1)^{\sum_{j<5} n_j}\,|0 0 1 0 (0+1) 1 0 \dots\rangle$$
$$= (-1)^{0+0+1+0}\,|0 0 1 0 1 1 0 \dots\rangle$$
$$= -\,|0 0 1 0 1 1 0 \dots\rangle$$

$$a_5 \,|1 0 1 0 1 0 \dots\rangle = 1\,(-1)^{\sum_{j<5} n_j}\,|1 0 1 0 (1-1) 1 0 \dots\rangle$$
$$= (-1)^{1+0+1+0}\,|1 0 1 0 \; 0 \; 1 0 \dots\rangle$$
$$= +\,|1 0 1 0 0 1 0 \dots\rangle$$

$$a_5 \,|0 0 1 0 0 0 \dots\rangle = 0\,(-1)^{\sum_{j<5} n_j}\,|0 0 1 0 (0-1) 0 \dots\rangle = 0$$

ادعا

$$\{a_i, a_i^+\} = 1$$
$$a_i a_i^+ + a_i^+ a_i = 1$$

پادجابجاگر:
$$\{A, B\} = AB + BA$$

جمله اول

$$a_i a_i^+ |\dots n_i \dots\rangle = (1-n_i)\,(-1)^{\sum_{j<i} n_j}\,a_i\,|\dots n_i+1 \dots\rangle$$
$$= (1-n_i)(1+n_i)\left((-1)^{\sum_{j<i} n_j}\right)^2 |\dots n_i \dots\rangle$$
$$= (1-n_i^2)\,(+1)\,|\dots n_i \dots\rangle$$

$$1 - n_i^2 = 1 - n_i$$

n_i یا مساوی 0 یا مساوی 1 است

اگر 0 باشد $\quad 1-0=1$

$$\Rightarrow \boxed{a_i a_i^+ |\dots n_i \dots\rangle = (1-n_i)\,|\dots n_i \dots\rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_i a_i^+ |\ldots n_i \ldots\rangle = (1-n_i)\, |\ldots n_i \ldots\rangle}$$

n_i یا 0 یا 1 است

اگر 0 باشد $1-0=1$

اگر 1 باشد $1-1=0$

چهارم

$$a_i^+ a_i |\ldots n_i \ldots\rangle = n_i \, (-1)^{\sum_{j<i} n_j} a_i^+ |\ldots n_i - 1 \ldots\rangle$$

$$= n_i (1 - n_i + 1) \left((-1)^{\sum_{j<i} n_j}\right)^2 |\ldots n_i - 1 + 1 \ldots\rangle$$

$$= n_i (2 - n_i) \, (+1) \, |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$= 2n_i - n_i \, |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$\boxed{a_i^+ a_i |\ldots n_i \ldots\rangle = n_i \, |\ldots n_i \ldots\rangle}$$

$$(a_i a_i^+ + a_i^+ a_i) |\ldots n_i \ldots\rangle = (1 - n_i + n_i) |\ldots n_i \ldots\rangle = 1 \, |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\{a_i, a_i^+\} = 1}$$