QM-2-L17-1404-2

Wednesday, May 20, 2026 5:14 PM

Hyperfine Structure ساختار فوق ریز

قبلاً: اثر تصحیح نسبیتی انرژی الکترون + اثر اسپین مدار + ترم داروین را به عنوان تصحیحات ساختار ریز شرح دادیم.

در ادامه اثر دیگری که ناشی از گشتاور (ممان) مغناطیسی هسته اتم است را بر طیف اتم هیدروژن بررسی می‌کنیم:

کمیتهای زیر را در نظر بگیرید:

$\vec{I}$ اسپین هسته اتم

g_N ضریب ژیرومغناطیسی هسته

Ze بار هسته

M_N جرم هسته

(N = Nucleus هسته)

تعریف: گشتاور مغناطیسی هسته اتم Nuclear Magnetic moment.

$$\vec{\mu}_N = \gamma_N \vec{I} \longleftarrow \boxed{\vec{\mu}_N = \frac{Zeg_N}{2M_N c}\vec{I}}$$

به مشابه با گشتاور مغناطیسی الکترون

$$\vec{\mu}_s = \gamma_e \vec{S} \longleftarrow \vec{\mu}_s = -\frac{eg_s}{2m_e c}\vec{S}$$

← از الکترومغناطیس می‌دانیم که از $\vec{\mu}_N$ می‌توان $\vec{A}(\vec{r})$ پتانسیل برداری تعریف کرد

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi}\left(\vec{\mu}_N \times \vec{\nabla}\right)\frac{1}{r}$$

← واز $\vec{A}(\vec{r})$ می‌توان به میدان مغناطیسی رسید

$$\vec{B}_N = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$= -\vec{\nabla}\times\left(\vec{\mu}_N \times \vec{\nabla}\right)\frac{1}{4\pi r} = -\epsilon_{mnk}\,\epsilon_{npq}\,\partial_m (\mu_N)_p\,\partial_q \frac{1}{4\pi r}\,\hat{e}_k$$

$$= +\epsilon_{nmk}\,\epsilon_{npq}\,(\mu_N)_p\,\partial_m\partial_q\frac{1}{4\pi r}\,\hat{e}_k$$

$$= \left(\delta_{mp}\delta_{kq} - \delta_{mq}\delta_{kp}\right)(\mu_N)_p\,\partial_m\partial_q\frac{1}{4\pi r}\,\hat{e}_k$$

$$\boxed{\vec{B}_N = \vec{\nabla}\left(\vec{\mu}_N\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{1}{4\pi r} - \vec{\mu}\,\Delta\frac{1}{4\pi r}}$$

میدان مغناطیسی ناشی از گشتاور مغناطیسی هسته

این میدان مغناطیسی با اسپین الکترون برهمکنش می‌کند:

$$\longrightarrow \quad H_{HF} = -\vec{\mu}_S\cdot\vec{B}_N$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\mu}_N &= \gamma_N\vec{I}\\ \vec{\mu}_s &= \gamma_e\vec{S}\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\gamma_N &\equiv \frac{Zeg_N}{2M_N c}\\ \gamma_e &\equiv \frac{-eg_s}{2m_e c}\end{aligned}}$$

$$H_{HF} = -\gamma_e\left(\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{\mu}_N\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{1}{4\pi r} - \vec{S}\cdot\vec{\mu}_N\,\Delta\frac{1}{4\pi r}\right)$$

$$\boxed{H_{HF} = -\gamma_e\gamma_N\left(\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\left(\vec{I}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{1}{4\pi r} - \vec{S}\cdot\vec{I}\,\Delta\frac{1}{4\pi r}\right)}$$

$$\boxed{H_{HF} = -\gamma_e \gamma_N \left(\vec{S}\cdot\vec{\nabla}(\vec{I}\cdot\vec{\nabla})\frac{1}{4\pi r} - \vec{S}\cdot\vec{I}\,\Delta\frac{1}{4\pi r}\right)}$$

رابطه پیچیده‌ای که شامل دو بخش اسپینی و مکانی است. با انتخاب پایه‌هایی که این همیلتونی را قطری می‌کنند می‌توان تصحیح مرتبه اول انرژی را به طیف اتم هیدروژن بدست آورد.

مثال خاص: تعیین تصحیح مرتبه اول برای حالت $l=0$ اتم هیدروژن

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle s, m_s | \langle n\, l\, m_l | H_{HF} | n\, l\, m_l \rangle | s, m_s \rangle$$

$$\langle \vec{r} | n l m \rangle = Y_{lm}(\theta,\varphi)\, R_{nl}(r)$$

الف) بخش مکانی

$$-\gamma_e \gamma_N \quad \vec{S}\cdot\vec{\nabla}(\vec{I}\cdot\vec{\nabla})\frac{1}{4\pi r} = \text{جمله اول}$$

$$= -\gamma_e \gamma_N \; S_i \; I_j \; \partial_i \partial_j \frac{1}{4\pi r}$$

مطلوب است

$$\langle n, l=0, m_l=0 | \partial_i \partial_j \frac{1}{4\pi r} | n, l=0, m_l=0 \rangle$$

$$= \int d^3r \; |Y_{00}\cancel{(\theta,\varphi)}|^2 \; |R_{n0}(r)|^2 \; \boxed{\partial_i \partial_j \frac{1}{4\pi r}} = \frac{1}{3}\Delta\frac{1}{4\pi r}\delta_{ij}$$

به علت تقارن کروی ارتباطی $(l=0)$

$$= \underbrace{\int d^3r}_{?} \; |R_{n0}(r)|^2 \; \frac{1}{3}\left(-\frac{\cancel{4\pi}\,\delta^3(\vec{r})}{\cancel{4\pi}}\right)\delta_{ij}$$

$$= -\frac{1}{3}\,|R_{n0}(0)|^2\,\delta_{ij}$$

$$\boxed{\text{جمله اول} = +\frac{1}{3}\gamma_e\gamma_N\,|R_{n0}(0)|^2\,\vec{I}\cdot\vec{S}}$$

$$+\gamma_e\gamma_E \quad \vec{S}\cdot\vec{I} \quad \Delta\frac{1}{4\pi r} \qquad \text{جمله دوم}$$

مطلوب است

$$\langle n, l=0, m_l=0 | \Delta\frac{1}{4\pi r} | n, l=0, m_l=0 \rangle$$

$$= \int d^3r \; |Y_{00}(\theta,\varphi)|^2 \; |R_{n0}(r)|^2 \; \underbrace{\Delta\frac{1}{4\pi r}}_{-\delta^3(\vec{r})} = -|R_{n0}(0)|^2$$

$$\boxed{\text{جمله دوم} = -\gamma_e\gamma_N\,|R_{n0}(0)|^2\,\vec{I}\cdot\vec{S}}$$

هر دو جمله باهم

$$\text{فقط بخش مکانی}\quad \langle H_{HF} \rangle_{n,l=0} = -\frac{2}{3}\gamma_e\gamma_N\,|R_{n0}(0)|^2\,\vec{I}\cdot\vec{S}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{eg}{2m_e c}\right)\left(\frac{Zeg_N}{2M_c}\right)|R_{n0}(0)|^2\,\vec{I}\cdot\vec{S}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{eg}{2m_e c}\right)\left(\frac{Zeg_N}{2M_N c}\right) |R_{n0}(0)|^2 \; \vec{I}\cdot\vec{S}$$

$$\boxed{\text{بخش فضائی}\; \langle H_{HF}\rangle_{n,l=0} = \frac{4}{3} g_N \frac{m_e}{M_N} (Z\alpha)^4 m_e c^2 \frac{1}{n^3} \frac{\vec{S}\cdot\vec{I}}{\hbar^2}}$$

$$\frac{m_e}{M_N} \sim \frac{1}{1836}$$

ب) محاسبه مقدار چشیداشتی $\vec{S}\cdot\vec{I}$ (بخش اسپینی)

یادآوری: در شاره اسپین مدار $\langle \vec{S}\cdot\vec{L}\rangle$

a) $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$

b) $\{H_0, \vec{L}^2, L_z, \vec{S}, S_z\} \longrightarrow \{H_0, \vec{J}^2, J_z; \vec{L}^2, \vec{S}^2\}$

$$|nlm_l\rangle|s,m_s\rangle = |nlm_l\rangle|\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle \longrightarrow |j=l\pm\tfrac{1}{2}, m_j; l,s\rangle$$

$$\boxed{\vec{S}\cdot\vec{L}\;|j=l\pm\tfrac{1}{2}, m_j; l,s\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\begin{cases} l & \text{for } j=l+\frac{1}{2} \\ -(l+1) & \text{for } j=l-\frac{1}{2}\end{cases}}$$

در اینجا: بجای $\langle \vec{S}\cdot\vec{L}\rangle$ می‌خواهیم $\langle \vec{S}\cdot\vec{I}\rangle$ را محاسبه کنیم:

تعریف

$$\vec{F} = \vec{S} + \vec{I}$$

$$\vec{F}^2 = \vec{S}^2 + \vec{I}^2 + 2\vec{I}\cdot\vec{S} \qquad [\vec{I},\vec{S}]=0$$

$$\longrightarrow \vec{I}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\left(\vec{F}^2 - \vec{S}^2 - \vec{I}^2\right)$$

تغییر پایه

$$\{\vec{I}^2, I_z, \vec{S}^2, S_z\} \longrightarrow \{\vec{F}^2, F_z; \vec{I}^2, \vec{S}^2\}$$

$$\vec{I}^2|\dots I\dots\rangle = \hbar^2 I(I+1)|\dots I\dots\rangle$$

$$\vec{S}^2|\dots S\dots\rangle = \hbar^2 S(S+1)|\dots S\dots\rangle \qquad S=\frac{1}{2}$$

$$\vec{F}^2|\dots F\dots\rangle = \hbar^2 F(F+1)|\dots F\dots\rangle$$

$$|F = I\pm\tfrac{1}{2}, m_F; I, S=\tfrac{1}{2}\rangle$$

$\xrightarrow{\text{به شباهت با } \langle\vec{S}\cdot\vec{L}\rangle}$

$$\vec{S}\cdot\vec{I}\;|F=I\pm\tfrac{1}{2}, m_F; I, S=\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\begin{cases} I & \text{for } F=I+\frac{1}{2} \\ -(I+1) & \text{for } F=I-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\text{بخش اسپینی}\; \langle \vec{S}\cdot\vec{I}\rangle_{F=I\pm\frac{1}{2}, m_F} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{cases} I \\ -(I+1)\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{در کل}}$

$$\boxed{\langle H_{HF}\rangle_{n,l=0} = \frac{4}{3} g_N \frac{m_e}{m_N} \frac{m_e c^2 (Z\alpha)^4}{n^3} \frac{1}{2}\begin{cases} I & \text{for } F=I+\frac{1}{2} \\ -(I+1) & \text{for } F=I-\frac{1}{2}\end{cases}}$$

برای اتم هیدروژن $g_N = 5.56$ ، $I=\frac{1}{2}$ (اسپین پروتون هم $\frac{1}{2}$ است) شکافتگی بین دو
در حالت متوالی F

برای اتم هیدروژن $g_N = 5.56$ ، $I = \frac{1}{2}$ (اسپین پروتون هم $\frac{1}{2}$ است) شکافتگی بین دو
درحالت توالی F

$$\Delta E = \frac{4}{3} g_N \frac{m_e}{m_N} \frac{m_e c^2 (Z\alpha)^4}{n^3} \frac{1}{2} \boxed{\left(I - (-I-1) \right)} =$$

$$Z = 1 \qquad = 2I+1 = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2$$

برای پروتون

$$\Delta E = \frac{4}{3} \times 5.56 \frac{1}{1840} \underbrace{(0.5 MeV)}_{?} \frac{1}{\cancel{2} n^3} \left(\frac{1}{137} \right)^4 \times \cancel{2} = \frac{5.57 \times 10^{-12}}{n^3} MeV$$

$$n = 1 \rightarrow l = 0 \qquad\qquad = h\nu$$

$$\boxed{\nu = 1420\ MHz \qquad \lambda = 21.4\ cm}$$

عددی که در کتاب گزارش شده

$$h = 6.58 \times 10^{-16}\ eV\,s$$

تابش $21.4\ cm$ در ستاره‌شناسی مهم است. از روی این تابش می‌توان اطلاعاتی در مورد چگالی، دما و حرکت ابرهای هیدروژنی در فضای میان ستاره‌ای بدست آورد.

موضوع جدید:

بخش اول: سیستم‌هایی با ذرات یکسان ← اتم‌هایی با تعداد زیاد الکترون

ابتدا N ذره یکسان را در نظر بگیرید. با فرض اینکه این ذرات با هم برهمکنش نمی‌کنند. همیلتونی این سیستم را می‌توان برحسب درجات آزادی تک‌تک این ذرات نوشت:

$$H = H(1, 2, \ldots, N) = \sum_{i=1}^{N} H(i)$$

$$1 \equiv (\vec{x}_1, s_1) \qquad\qquad i = (\vec{x}_i, s_i)$$

مکان ذره اول — اسپین ذره اول

سؤال: تابع موج سیستم N ذره‌ای:

$$\Psi = \Psi(1, \ldots N) \text{ or } |1, \ldots N\rangle = |1\rangle \otimes \ldots \otimes |N\rangle$$

برای پاسخ: ← ابتدا عملگر P_{ij} را تعریف می‌کنیم

$$P_{ij} \Psi(1, \ldots i, \ldots j, \ldots N) = \Psi(1, \ldots j, \ldots, i, \ldots N)$$

این عملگر جای i و j را عوض می‌کند (تمام اطلاعات مکان و اسپین ذره iام یعنی ذره jام می‌نشیند و برعکس)

$$i \longleftrightarrow j$$

✓ P_{ij} یک عملگر تصویرگر است (Projection operator)

$$P_{ij}^2 = 1$$

$$\boxed{P_{ij}^2 \Psi(1, \ldots, i, \ldots j, \ldots N) = 1\, \Psi(1, \ldots, i, \ldots, j, \ldots N)} \longrightarrow P_{ij}^2 = 1$$

$$\boxed{P_{ij}^2\,\psi(1,\dots,i,\dots j,\dots N) = 1\,\psi(1,\dots,i,\dots,j,\dots N)} \longrightarrow P_{ij}^2 = 1$$

معنی این رابطه این است که ویژه مقدار عملگر P_{ij} می‌تواند ۱+ یا ۱- باشد.

$$\boxed{P_{ij}\,\psi_{S/A}(1,\dots i,\dots j,\dots N) = \pm\,\psi_{S/A}(1,\dots i,\dots j,\dots N)}$$ معادله ویژه مقداری

S = symmetric $(+)$ $i \leftrightarrow j$ متقارن تحت

A = antisymmetric $(-)$ $i \leftrightarrow j$ پادمتقارن تحت

مثال: دو ترکیب دو ذره با اسپین $\frac{1}{2}$، داشتیم

سه‌تایی

$$|1,+1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$\longrightarrow |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

تک‌تایی $\longrightarrow$ $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$

a) حالت $|1,0\rangle$ تحت جابجایی اسپین ذره اول و اسپین ذره دوم متقارن است:

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\downarrow\rangle_{(2)} + |\downarrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)}\right)$$

$$P_{12}|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} + |\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\downarrow\rangle_{(2)}\right) = +|1,0\rangle$$

ترکیب متقارن از $|\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle$

b) حالت $|0,0\rangle$ تحت جابجایی اسپین ذره اول و اسپین ذره دوم پادمتقارن است:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\downarrow\rangle_{(2)} - |\downarrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)}\right)$$

$$P_{12}|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} - |\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\downarrow\rangle_{(2)}\right) = -|0,0\rangle$$

ترکیب پادمتقارن از $|\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle$

مثال بالا مثال خاصی است که حالت تک ذره‌ای $|\uparrow\rangle$ یا $|\downarrow\rangle$ فقط شامل اطلاعات مربوط به اسپین ذره است.

بطور کلی:

حالت تک ذره $|\lambda\rangle$

حالت N ذره‌ای $|\lambda_1\rangle_{(1)}\otimes|\lambda_2\rangle_{(2)}\otimes\dots|\lambda_N\rangle_{(N)} = |\lambda_1,\dots\lambda_N\rangle$

- سیستم از N بوزون (ذرات با اسپین عدد صحیح) ⟵ تابع موج این سیستم کاملاً متقارن تحت جابجایی هر دو جفت ذره
- سیستم از N فرمیون (ذرات با اسپین نیم صحیح) ⟵ تابع موج این سیستم کاملاً پادمتقارن تحت جابجایی هر دو جفت ذره

• سیستم از N فرمیون (ذرات با اسپین نیم صحیح) $\longleftarrow$ تابع موج این سیستم کاملاً پادمتقارن تحت جابجایی هر دو جفت ذره

بوزون‌ها : باید تابع موج N ذره‌ای را متقارن سازی کنیم :

$$\boxed{\begin{aligned} |\lambda_1 \dots \lambda_N\rangle_+ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P\in S_N} (+1)^P \; P\,|\lambda_1 \dots \lambda_N\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P\in S_N} |\lambda_{P(1)} \dots \lambda_{P(N)}\rangle \end{aligned}}$$

S_N گروه جایگشت رتبه N $\qquad$ P= Permution جایگشت

ضریب نرمالیزاسیون :

مثال ۱ : ۳ ذره داریم به ذره اول در حالت ۱، ذره دوم حالت ۲ و ذره سوم در حالت ۳ است.

جایگاه اول $\qquad$ جایگاه دوم

جایگشت زوج

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ P(1)=1 & P(2)=2 & P(3)=3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ P(1)=3 & P(2)=1 & P(3)=2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ P(1)=2 & P(2)=3 & P(3)=1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

۳ جایگشت فرد

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|1\,2\,3\rangle_+ = a \Big(\underbrace{|123\rangle + |312\rangle + |231\rangle}_{\text{جایگشت های زوج}} + \underbrace{|132\rangle + |321\rangle + |213\rangle}_{\text{جایگشت های فرد}} \Big)$$

ضریب نرمالیزاسیون

$(+1)^P = +1$

$$1 = {}_+\langle 1\,2\,3 | 1\,2\,3\rangle_+ = a\Big(\langle 123|123\rangle + \langle 312|312\rangle + \langle 231|231\rangle + \langle 132|132\rangle + \langle 321|321\rangle + \langle 213|213\rangle\Big) = 6a$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3!}}$$

به نظر می‌رسد $\frac{1}{\sqrt{N!}}$ ضریب نرمالیزاسیون باشد، ولی اینطور نیست!

مثال ۲ : ۳ ذره داریم ولی حالت‌ها می‌توانند تکراری باشند :

$1 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 1$
$3 \rightarrow 2$

باید تمام جایگشت‌های زوج و فرد را جداگانه بنویسیم

جایگشت‌های زوج

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

جایگشت‌های زوج $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

جایگشت‌های فرد $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{3!}} \left(2\,|112\rangle + 2\,|211\rangle + 2\,|121\rangle \right)$$

$$_+\langle \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 | \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_+ = \frac{1}{3!} \left(4\langle 112|112\rangle + 4\langle 211|211\rangle + 4\langle 121|121\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{3!} (3 \times 2 \times 2) = 2 = 2!$$

حالت $|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_+$ به یک نرم نیست. برای نرمالیزه کردن آن باید

$$\boxed{\widetilde{|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_+} \equiv \frac{1}{\sqrt{2!}} |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{3!\,2!}} \left(2|112\rangle + 2|211\rangle + 2|121\rangle \right)}$$

این حالت به یک نرم است

$2 =$ تعداد دفعاتی است که تکرار وجود دارد.

بطور کلی:

$$\boxed{\widetilde{|\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_N\rangle_+} = \left(\frac{1}{n_1!\, n_2! \cdots} \right)^{1/2} |\lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle_+}$$

نکته: حالت تک ذره‌ای $\in$ فضای هیلبرت ۱ ذره $\quad |\lambda_1\rangle \in \mathcal{H}_1$

$$|\lambda_1\rangle \otimes |\lambda_2\rangle \otimes \cdots |\lambda_N\rangle \longrightarrow |\lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle \in \mathcal{H}_N$$

حالت N ذره‌ای $\in$ فضای هیلبرت N ذره

$$\boxed{\mathcal{H}_N \equiv \mathcal{H}_1^{(1)} \otimes \mathcal{H}_1^{(2)} \otimes \cdots \mathcal{H}_1^{(N)}}$$

فضای Fock:

مثال:

$$|\lambda_1 \lambda_1 \lambda_1 \lambda_4 \ldots \lambda_i \ldots \lambda_N\rangle =$$
$$= \boxed{|\lambda_1\rangle_{(1)} \otimes |\lambda_1\rangle_{(2)} \otimes |\lambda_1\rangle_{(3)}} \otimes |\lambda_4\rangle_{(4)} \cdots \otimes |\lambda_N\rangle_{(N)}$$

حالت $|\lambda_1\rangle$ سه بار تکرار می‌شود

تعریف: تعداد دفعاتی که حالت $|\lambda_\alpha\rangle$ رخ می‌دهد $\longrightarrow n_\alpha$

تعریف: تعداد دفعاتی که حالت $|\lambda_\alpha\rangle$ رخ می‌دهد $\longrightarrow n_\alpha$

$$(n_1, n_2, n_3, n_4, \dots n_i, \dots) = (3, 0, 0, 1, 1, \dots 1, \dots)$$

در مثال بالا

حالت $|\lambda_1\rangle$ سه بار رخ داده

حالت $|\lambda_2\rangle$ هیچ بار

حالت $|\lambda_3\rangle$ هیچ بار

حالت $|\lambda_4\rangle$ یک بار و

⋮

n_α = Occupation number عدد اشغال

$$|n_1\, n_2 \dots n_\alpha, \dots\rangle \equiv \overbrace{|\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_N\rangle_+} = \left(\frac{1}{n_1!\, n_2! \dots}\right)^{1/2} |\lambda_1 \dots \lambda_N\rangle_+$$

$$|n_1\, n_2 \dots n_\alpha, \dots\rangle \in \text{Fock}$$ فضای

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{\infty} |n_\alpha\rangle = N}$$

برای بوزون‌ها تنها شرط وجود دارد