دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی ۲ـ نیمسال دوم ۴۰۵ـ۱۴۰۴

تمرین سری چهارم

تا اطلاع ثانوی نیازی به تحویل برگه های تمرین نیست

مسئله ۱:

برای همیلتونی نوسانگر غیر هارمونیک, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4$ نشان دهید

(الف) تصحیح مرتبه اول اختلال به انرژی $E_n^{(0)}$ نوسانگر هماهنگ ناشی از جمله αx^3 صفر است.

(ب) تصحیح مرتبه اول اختلال به انرژی $E_n^{(0)}$ نوسانگر هماهنگ ناشی از جمله βx^4 عبارت است از

$$E_n^{(1)} = \beta \frac{3\hbar^2}{2m^2\omega^2}\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right).$$

(ج) تصحیح مرتبه دوم اختلال به انرژی $E_n^{(0)}$ نوسانگر هماهنگ ناشی از جمله αx^3 عبارت است از

$$E_n^{(2)} = -\alpha^2 \frac{\hbar^2}{8m^3\omega^4}\left(30n^2 + 30n + 11\right).$$

مسئله ۲:

یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی را در نظر بگیرید که با همیلتونی زیر توصیف می شود

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right).$$

(الف) جوابهای دقیق مسئله مختل نشده را بدست آورید.

(ب) جابجائی انرژی حاصل از اختلال $2\lambda xy$ را در حالت پایه و در اولین حالت بر انگیخته تبهگن بدست آورید.

(ج) جوابهای دقیق مسئله مختل شده را بدست آورید و آن را با جوابهای حاصل از اختلال مرتبه دوم مقایسه کنید.

مسئله ۳:

برای بدست آوردن نتیجه نهایی اثر اسپین–مدار در تغییر طیف اتم هیدروژن از رابطه زیر استفاده شد:

$$\left\langle njm_j; \ell, s = \frac{1}{2}\middle|\frac{1}{r^3}\middle|njm_j; \ell, s = \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{2Z^3}{a_0^3}\frac{1}{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}. \qquad (۱)$$

در ادامه می خواهیم این رابطه را با استفاده از قضیه Hellmann-Feynman که در سالهای ۱۹۳۶ و ۱۹۳۹ به طور مستقل توسط H. G. A. Hellmann و R. Feynman اثبات شده است، بدست آوریم. برای این کار گزاره های زیر را قدم به قدم اثبات کنید:

(الف) ابتدا با فرض اینکه معادله ویژه مقداری همیلتونی قیر وابسته به زمان H_0 به صورت $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ داده شده است، قضیه Hellmann-Feynman (HF) را ثابت کنید:

$$\left\langle n\left|\frac{\partial H_0}{\partial \lambda}\right|n\right\rangle = \frac{\partial E_n}{\partial \lambda}.$$

در این رابطه λ پارامتر دلخواهی است که همیلتونی H_0 به آن وابسته است.

(ب) همیلتونی اتم هیدروژن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{h^2\ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}.$$

با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی برای H_0 از قضیه HF که در آن $\lambda = \ell$ در نظر گرفته شده است نشان دهید

$$\left\langle njm_j;\ell,s=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{r^2}\right|njm_j;\ell,s=\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{4\mathrm{Ry}Z^2m}{\hbar^2(2\ell+1)n^3}.$$

توجه کنید که مطابق نتایجی که در ترم گذشته برای اتم هیدروژن بدست آوردیم، $E_n = -\frac{\mathrm{Ry}Z^2}{n^2}$ که در آن $\mathrm{Ry} = \frac{e^2}{2a_0} = \frac{1}{2}mc^2\alpha^2$، $a_0 = \frac{\hbar}{mc\alpha}$، $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ و $n = n_r + \ell + 1$ است.

(ج) حال مجدداً از قضیه HF که در آن $\lambda = r$ است، استفاده کنید و رابطه (۱) را با در نظر گرفتن نتایج بخش (ب) بدست آورید.