Ryder 5+6, Peskin 9, ...

فرمول بندی انتگرال مسیر برای نظریه میدان کوانتومی:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \longrightarrow |\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}\right)|\psi(t_0)\rangle$$

با فرض اینکه H بصورت صریح به زمان وابسته نباشد.

Define: $\quad |q(t)\rangle = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)|q\rangle \quad$: a Vector

$$\psi(q,t) = \langle q(t)|\psi\rangle_H \qquad \text{with} \qquad |\psi(t)\rangle_S = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)|\psi\rangle_H$$

بسبب کامل بودن حالتها داریم:

$$\langle q_f(t_f)|\psi\rangle = \int dq_i \; \langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle \langle q_i(t_i)|\psi\rangle$$

$$\text{or} \quad \psi(q_f,t_f) = \int dq_i \; \underbrace{\langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle}_{K(q_f,t_f\,;\,q_i,t_i)} \psi(q_i,t_i)$$

انتشارگر

$$K(q_f,t_f\,;\,q_i,t_i) = \langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle =$$

$$= \int dq_1 \dots dq_n \; \langle q_f(t_f)|q_n(t_n)\rangle \langle q_n(t_n)|q_{n-1}(t_{n-1})\rangle \dots \langle q_1(t_1)|q_i(t_i)\rangle$$

$$A = \langle q_{j+1}(t_{j+1})|q_j(t_j)\rangle = \langle q_{j+1}|\, e^{-iH(t_{j+1}-t_j)/\hbar}\, |q_j\rangle = \langle q_{j+1}|\, e^{-iH\tau/\hbar}\, |q_j\rangle$$

$$= \langle q_{j+1}|\left(1 - \frac{iH\tau}{\hbar} + O(\tau^2)\right)|q_j\rangle =$$

$$= \langle q_{j+1}|q_j\rangle - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1}|H|q_j\rangle$$

$$= \delta(q_{j+1}-q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1}|H|q_j\rangle$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{ip}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)\right) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1}|H|q_j\rangle$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \qquad \text{فرض:}$$

- $$\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle = \int \frac{dp\,dp'}{(2\pi\hbar)^2} \left\{ \langle q_{j+1}|p'\rangle \langle p'|\frac{p^2}{2m}|p\rangle \langle p|q_j\rangle + \langle q_{j+1}|V(q)|q_j\rangle \right\}$$

$$= \int \frac{dp\,dp'}{(2\pi\hbar)^2} \left\{ \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p' q_{j+1} - p q_j)\right) \frac{p^2}{2m} \delta(p-p')(2\pi\hbar) + V\left(\frac{q_j+q_{j+1}}{2}\right) \delta(q_{j+1}-q_j) \right\}$$

or $V(q_j)$

از روابط زیر برای بدست آوردن این نتیجه استفاده شد:

$$\langle q|p\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}qp\right)$$

$$\langle p|p'\rangle = (2\pi\hbar)\,\delta(p-p') \quad , \quad \delta(q_{j+1}-q_j) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)}$$

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q-q')$$

$$\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle =$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\, e^{\frac{ip}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)}\,\frac{p^2}{2m} + \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\, e^{\frac{ip}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)}\, V(q_j)$$

$$= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\, e^{\frac{ip_j}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)}\left(\frac{p_j^2}{2m} + V(q_j)\right) = \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\, e^{\frac{ip_j}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)}\, H(q_j,p_j)$$

$$\curvearrowright\ A = \langle q_{j+1}(t_{j+1})|q_j(t_j)\rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{ip_j}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)\right)$$

$$-\frac{i\tau}{\hbar}\int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{ip_j}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)\right)H(q_j,p_j) + O(\tau^2)$$

$$= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[p_j(q_{j+1}-q_j) - \tau H(q_j,p_j)\right]\right)$$

$$\boxed{\langle q_{j+1}(t_{j+1})|q_j(t_j)\rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[p_j(q_{j+1}-q_j) - \tau H(q_j,p_j)\right]\right)}$$

نتیجه $\curvearrowright\ K(q_f,t_f;q_i,t_i) = \lim_{n\to\infty}\int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{j=0}^{n}\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\left[p_j(q_{j+1}-q_j) - \tau H(q_j,p_j)\right]\right\}$

$\rightarrow$ A more compact form for $K(q_f,t_f;q_i,t_i) = \langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle$

$$K(q_f,t_f;q_i,t_i) = \int \frac{\mathcal{D}q\,\mathcal{D}p}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}\left[p\dot{x} - H(p,x)\right]d\tau\right)$$

در اینجا $\Rightarrow$

$$\int \frac{\mathcal{D}p\,\mathcal{D}q}{2\pi\hbar} = \prod_{\tau}\frac{dq(\tau)\,dp(\tau)}{2\pi\hbar}$$

اگر $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ باشد، می‌توان با مربع کامل کردن روی تکانه‌ها انتگرال گرفت و رسید به

$$\boxed{K(q_f,t_f;q_i,t_i) = \frac{1}{\mathcal{N}}\int \frac{\mathcal{D}q}{2\pi\hbar}\, e^{\frac{i}{\hbar}S} \quad \text{with } S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(x,\dot{x})}$$

این نمایش انتگرال مسیر دامنه گذار $K(q_f,t_f;q_i,t_i) = \langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle$ است.

Question 1: $\langle q_f(t_f)|\, Q(t_{n_1})\, Q(t_{n_2})\, |q_i(t_i)\rangle = ?$

for $t_{n_1} > t_{n_2}$ we obtain:

$$\langle q_f(t_f)|\, Q(t_{n_1}) Q(t_{n_2})\, |q_i(t_i)\rangle = \int dq_1 \dots dq_n \, \langle q_f(t_f)|q_n(t_n)\rangle \dots$$
$$\langle q_{n_1}(t_{n_1})|\, Q(t_{n_1})\, |q_{n_1-1}(t_{n_1-1})\rangle \dots \langle q_{n_2}(t_{n_2})|\, Q(t_{n_2})\, |q_{n_2-1}(t_{n_2-1})\rangle$$
$$\dots \langle q_1(t_1)|q_i(t_i)\rangle$$

$$Q(t_{n_i})\,|q_{n_i}(t_{n_i})\rangle = q_{n_i}(t_{n_i})\,|q_{n_i}(t_{n_i})\rangle$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{\langle q_f(t_f)|\, Q(t_1)\, Q(t_2)\, |q_i(t_i)\rangle = \int \frac{\mathcal{D}q\,\mathcal{D}p}{2\pi\hbar}\, q(t_1)\, q(t_2)\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} (p\dot{q} - H)\,dt\right)}$$

به طور کلی

$$\langle q_f(t_f)|\, T(Q(t_1)\dots Q(t_n))\, |q_i(t_i)\rangle = \int \frac{\mathcal{D}q\,\mathcal{D}p}{2\pi\hbar}\, q(t_1)\dots q(t_n)\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} (p\dot{q} - H)\,dt\right)$$

و اگر بتوانیم انتگرال‌گیری روی p را انجام دهیم:

$$\boxed{\langle q_f(t_f)|\, T(Q(t_1)\dots Q(t_n))\, |q_i(t_i)\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q\, q(t_1)\dots q(t_n)\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L\,dt\right)}$$

Question 2: Transition amplitude in the presence of an external source;

$$\langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle^J = \int \frac{\mathcal{D}q\,\mathcal{D}p}{2\pi\hbar}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} \left[p\dot{q} - H(p,q) + \hbar\, J(\tau)\, q(\tau)\right] d\tau\right)$$

می‌توان نشان داد که $\langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle^J$ تابع مولد برای تابع چند نقطه‌ای $\langle q_f(t_f)|T(Q(t_1)\dots Q(t_n))|q_i(t_i)\rangle$ به این معنی که

$$(B)\quad \boxed{\langle q_f(t_f)|\, T(Q(t_1)\dots Q(t_N))\, |q_i(t_i)\rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^N \left(\frac{\delta^N}{\delta J(t_1)\dots \delta J(t_N)}\right) \langle q_f(t_f)|q_i(t_i)\rangle^J \Big|_{J=0}}$$

- برای نشان دادن این مسئله باید نشان دهیم که $Z[J] \equiv \langle 0|0\rangle^J$ دامنه گذار خلاء به خلاء تابع مولد تابع همبستگی n نقطه‌ای در حضور خلاء است.

$$(*)\quad \boxed{\langle 0|\, T(Q(t_1)\dots Q(t_n))\, |0\rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1)\dots \delta J(t_n)}\, Z[J] \Big|_{J=0}}$$

صحیح

اثبات: برای اثبات فرض می‌کنیم

$$\varphi_n(x) \equiv \langle x | n \rangle$$

$$\varphi_0(x) \equiv \langle x | 0 \rangle$$

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle \quad , \quad H|0\rangle = E_0|0\rangle$$

$$\varphi_0(x,t) = e^{-iE_0 t/\hbar}\varphi_0(x) = e^{-iE_0 t/\hbar}\langle x|0\rangle = \langle x|\, e^{-iHt/\hbar}|0\rangle = \langle x(t)|0\rangle$$

قبل از اثبات * قضیه زیر را اثبات می‌کنیم:

آنگاه می‌توان اثبات داد

(C)
$$\boxed{Z[J] = \lim_{\substack{T_1 \to i\infty \\ T_2 \to -i\infty}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}E_0(T_2-T_1)}}{\varphi_0^*(x_1)\,\varphi_0(x_2)} \langle x_2(T_2)|x_1(T_1)\rangle^J}$$

حکم C

اثبات C: برای بدست آوردن رابطه (C) فرض می‌کنیم $J(t)$ به عنوان چشمه خارجی در خارج از بازه زمانی t و t' صفر است؛

$$T_1 < t < t' < T_2$$

فرض می‌کنیم.

در این صورت خواهیم داشت:

$$\langle x_2(T_2)|x_1(T_1)\rangle^J = \int dx\,dx' \underbrace{\langle x_2(T_2)|x'(t')\rangle}_{(b)\quad J=0} \langle x'(t')|x(t)\rangle^J \underbrace{\langle x(t)|x_1(T_1)\rangle}_{(a)\quad J=0}$$

a) $$\langle x(t)|x_1(T_1)\rangle = \langle x|\, e^{-iH(t-T_1)/\hbar}|x_1\rangle$$

$$= \sum_{n,m} \langle x|m\rangle\langle m|\, e^{-iH(t-T_1)/\hbar}|n\rangle\langle n|x_1\rangle$$

ویژه حالتهای انرژی

$$= \sum_{n,m} \varphi_m(x)\varphi_n^*(x_1)\exp\left(\frac{-iE_n(t-T_1)}{\hbar}\right)\delta_{nm}$$

$$= \sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^*(x_1)\exp\left(-\frac{iE_n(t-T_1)}{\hbar}\right)$$

اگر $T_1 \to i\infty$ ، با توجه به اینکه E_0 کمترین مقدار انرژی در طیف انرژی است داریم:

$$\lim_{T_1 \to i\infty} \exp\left(-\frac{iE_0T_1}{\hbar}\right)\langle x(t)|x_1(T_1)\rangle = \varphi_0^*(x_1)\underbrace{\varphi_0(x)\, e^{-iE_0t/\hbar}}_{\varphi_0(x,t)}$$

$$\boxed{\langle x(t)|x_1(T_1)\rangle = \frac{\varphi_0^*(x_1)\varphi_0(x,t)}{e^{-iE_0T_1/\hbar}} = e^{+iE_0T_1/\hbar}\,\varphi_0^*(x_1)\varphi_0(x,t)}$$

b) $$\langle x_2(T_2)|x'(t')\rangle = e^{-iE_0T_2/\hbar}\,\varphi_0(x_2)\varphi_0^*(x',t')$$

به همین ترتیب

$$\curvearrowright \quad \langle x_2(T_2)|x_1(T_1)\rangle^J = \exp\left(\frac{iE_0(T_1-T_2)}{\hbar}\right)\varphi_0^*(x_1)\varphi_0(x_2)$$

$$\underbrace{\times\int dx\,dx'\;\underbrace{\varphi_0^*(x',t')}_{=\langle 0|x'(t')\rangle}\;\langle x'(t')|x(t)\rangle^J\;\underbrace{\varphi_0(x,t)}_{=\langle x(t)|0\rangle}}_{\equiv\; Z[J]=\langle 0|0\rangle^J}$$

بنا به تعریف

or

$$\text{OR}\qquad Z[J]=\lim_{\substack{T_1\to i\infty\\ T_2\to -i\infty}}\exp\left(\frac{-iE_0(T_1-T_2)}{\hbar}\right)\frac{\langle x_2(T_2)|x_1(T_1)\rangle^J}{\varphi_0^*(x_1)\varphi_0(x_2)}$$

و این همان حکم c است ■

حال با توجه به این نتیجه اگر بخواهیم $\left(\frac{1}{i}\right)^N \left.\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_N)}\right|_{J=0}$ را درست کنیم داریم :

$$\left(\frac{1}{i}\right)^N\left.\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_N)}\right|_{J=0}=\lim_{\substack{T_1\to i\infty\\ T_2\to -i\infty}}\frac{e^{-iE_0(T_1-T_2)/\hbar}}{\varphi_0^*(x_1)\varphi_0(x_2)}$$

$$\times\underbrace{\left(\frac{1}{i}\right)^N\frac{\delta^N}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_N)}\langle x_2(T_2)|x_1(T_1)\rangle^J}_{\overset{(B)}{=}\langle x_2(T_2)|T(X(t_1)\ldots X(t_N))|x_1(T_1)\rangle}$$

$$\equiv\quad\langle 0|T(X(t_1)\ldots X(t_N))|0\rangle$$

$\Longrightarrow$

نتیجه ۱

$$\boxed{\langle 0|T(X(t_1)\ldots X(t_N))|0\rangle=\lim_{\substack{T_1\to i\infty\\ T_2\to -i\infty}}\frac{e^{-iE_0(T_1-T_2)/\hbar}}{\varphi_0^*(x_1)\varphi_0(x_2)}\langle x_2(T_2)|T(X(t_1)\ldots X(t_N))|x_1(T_1)\rangle}$$

و در ضمن از رابطه $\quad Z[J]=\lim_{\substack{T_1\to i\infty\\ T_2\to -i\infty}} e^{-iE_0(T_1-T_2)/\hbar}\dfrac{\langle x_2(T_2)|x_1(T_1)\rangle^J}{\varphi_0^*(x_1)\varphi_0(x_2)}$, از

$$\langle x_2(T_2)|x_1(T_1)\rangle^J=\int\frac{\mathcal{D}x}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{T_1}^{T_2}(L+\hbar Jx)\,d\tau\right)$$

خواهیم داشت :

$$\boxed{Z[J]=\frac{1}{Z[0]}\int\mathcal{D}x\;\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,\left(L(x,\dot{x})+\hbar Jx\right)\right)}$$

نمایش انتگرال مسیری برای $Z[J]$

می‌توان نتایج فوق را برای نظریه میدان کوانتومی تعمیم داد:

1st. Step: # of DoF: $x \to \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$: n درجه آزادی بجای یک درجه آزادی

$$\int \mathcal{D}x \longrightarrow \int \mathcal{D}\vec{x} \equiv \int \prod_{i=1}^{n} dx_i(t)$$

2nd. Step Replace $\vec{x}(t)$ by $\varphi(\vec{x},t) \longrightarrow \varphi(x)$ with $x^\mu = (t, \vec{x})$

3rd. Step $\int dt \longrightarrow \int d^4x$

به این ترتیب تابع n نقطه‌ای برای نمایش انتگرال مسیری عبارت است از:

$$\boxed{G^{(n)}(x_1, \dots x_n) \equiv \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle \cong \int \mathcal{D}\varphi \; \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \; \mathcal{L}_0\right)}$$

For free scalar field theory

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \varphi(\Box + m^2)\varphi$$

به این ترتیب، تابع مولد در نظریه میدان

$$\boxed{Z_0[J] \simeq \int \mathcal{D}\varphi \; \exp\left(i \int d^4x \; \left(\mathcal{L}_0 + J(x)\varphi(x)\right)\right)}$$

$$= \langle 0 | 0 \rangle^J = \frac{1}{Z_0[0]} \int \mathcal{D}\varphi \; \exp\left(i \int d^4x \; \left(\mathcal{L}_0 + J\varphi - \frac{i\epsilon}{2}\varphi^2\right)\right)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 = -\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi + \text{total derivative}$$

$$\boxed{\longrightarrow Z_0[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \; \exp\left(-i \int d^4x \; \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi - J\varphi\right]\right)} \quad *$$

باوجود $J(x)$ دیگر φ در معادله KG آزاد $(\Box + m^2)\varphi$ صدق نمی‌کند. بلکه خواهیم داشت

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 = J$$

φ_0 در این رابطه آن پیکربندی خاصی است که در معادله حرکت غیرهمگن صدق می‌کند.

باوجود انتگرال مسیر ما درحال انتگرال‌گیری روی همه نوع پیکربندی φ هستیم

• ما می‌خواهیم در رابطه * روی φ انتگرال بگیریم و $Z_0[J]$ را بعنوان تابعی از J بنویسیم: $\leftarrow$

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 = J$$

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi_0(x) + \varphi(x)$$

• $\varphi(x)$ را حول φ_0 بسط می‌دهیم

$$I = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi - J\varphi \right] \longrightarrow$$

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)(\Box + m^2 - i\epsilon)(\varphi + \varphi_0) - J(\varphi + \varphi_0) \right]$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi + \frac{1}{2}\varphi_0(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi + \frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_0(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 - J(\varphi + \varphi_0) \right]$$

Use $\int \varphi_0 \Box \varphi \, d^4x \underset{P.I.}{=} \int \varphi \Box \varphi_0 \, d^4x$ & $(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 = J$

$$I = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi + \cancel{\varphi J \frac{1}{2} \times 2} + \frac{1}{2}\varphi_0 J - \cancel{J\varphi} - J\varphi_0 \right]$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi - \frac{1}{2}J\varphi_0 \right]$$

• از رابطه $(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 = J$ داریم $\varphi_0 = (\Box + m^2 - i\epsilon)^{-1} J$

$$(a) \quad \boxed{I = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi - \frac{1}{2}\int d^4y \; J(x)(\Box_y + m^2 - i\epsilon)^{-1} J(y) \right\}}$$

$$\int d^4y \, \underline{(\Box_y + m^2 - i\epsilon)^{-1} J(y)} = \int d^4y \; \delta^4(x - y)\varphi_0(y) = \varphi_0(x) \quad \checkmark$$

$$\longrightarrow \; -\frac{1}{2}J(x)\int d^4y \, (\Box_y + m^2 - i\epsilon)^{-1} J(y) = -\frac{1}{2}J(x)\varphi_0(x)$$

به این ترتیب

$$Z_0[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi \; \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \; \varphi(x)(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\varphi(x)\right) \times \exp\left(i\int d^4x \; J(x)\varphi(x) \right)$$

$$\xrightarrow{(a)} \quad \boxed{Z_0[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi \; \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \; \varphi(x)(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi(x)\right) \times \exp\left(+ \frac{i}{2}\int d^4x \, d^4y \; J(x)(\Box_y + m^2 - i\epsilon)J(y) \right)}$$

$$\mathcal{D}(\varphi + \varphi_0) = \mathcal{D}\varphi$$

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi_0 = J$$

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y)$$

$$\longrightarrow \boxed{\varphi_0(x) = -\int d^4y \; \Delta_F(x - y)J(y)}$$

به این ترتیب

$$\boxed{Z_0[J] = \underbrace{\mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi \; e^{-\frac{i}{2}\int d^4x \; \varphi(x)(\Box + m^2 - i\epsilon)\varphi(x)}}_{Z_0[J=0]} \times e^{-\frac{i}{2}\int d^4x \, d^4y \; J(x)\Delta_F(x - y)J(y)}}$$

$$\int \mathcal{D}\varphi \; \exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x \; \varphi(x)\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\varphi(x)\right) = \left[\det\left(i\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right)\right)\right]^{-1/2}$$

می‌توان نشان داد.

نکته:

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \; e^{-i\int d^4x \; \varphi^*(x) A \varphi(x)} = \left(\det A\right)^{-1}$$

همین استدلال در رابطه $Z[0]$ که هم ظاهر می‌شود و به این ترتیب از صورت و مخرج حذف می‌شود. $\Longleftarrow$

$$\boxed{Z_0[J] = \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \, d^4y \;\; J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right)}$$

$Z_0[J]$ is the generating functional of n-point Green's function of "free" (real) scalar fields;

$$\boxed{\tau(x_1 \ldots x_n) \equiv \langle 0|T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n))|0\rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)} Z_0[J]\Big|_{J=0}}$$

دقت کنید که این تابع n-نقطه‌ای می‌تواند هم شامل نمودارهای connected و هم نمودارهای disconnected باشد.

رابطه فوق را می‌توان به صورت انتگرالی نوشت:

$$\boxed{Z_0[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i^n}{n!}\right)\int d^4x_1 \ldots d^4x \;\; J(x_1)\ldots J(x_n)\;\tau(x_1,\ldots,x_n)}$$

Feynman Rules (in Functional formalism)

$$Z_0[J] = \exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x \, d^4y \;\; J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right)$$

$$Z_0[J] = 1 - \frac{i}{2}\int d^4x \, d^4y \;\; J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{-i}{2}\right)^2\left(\int d^4x \, d^4y \; J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right)^2 + \cdots$$

این جملات را به ترتیب بررسی می‌کنیم: