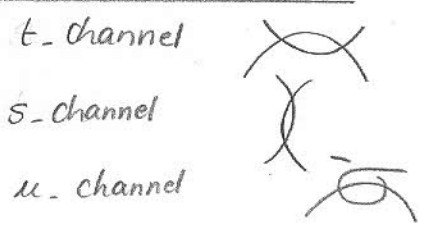


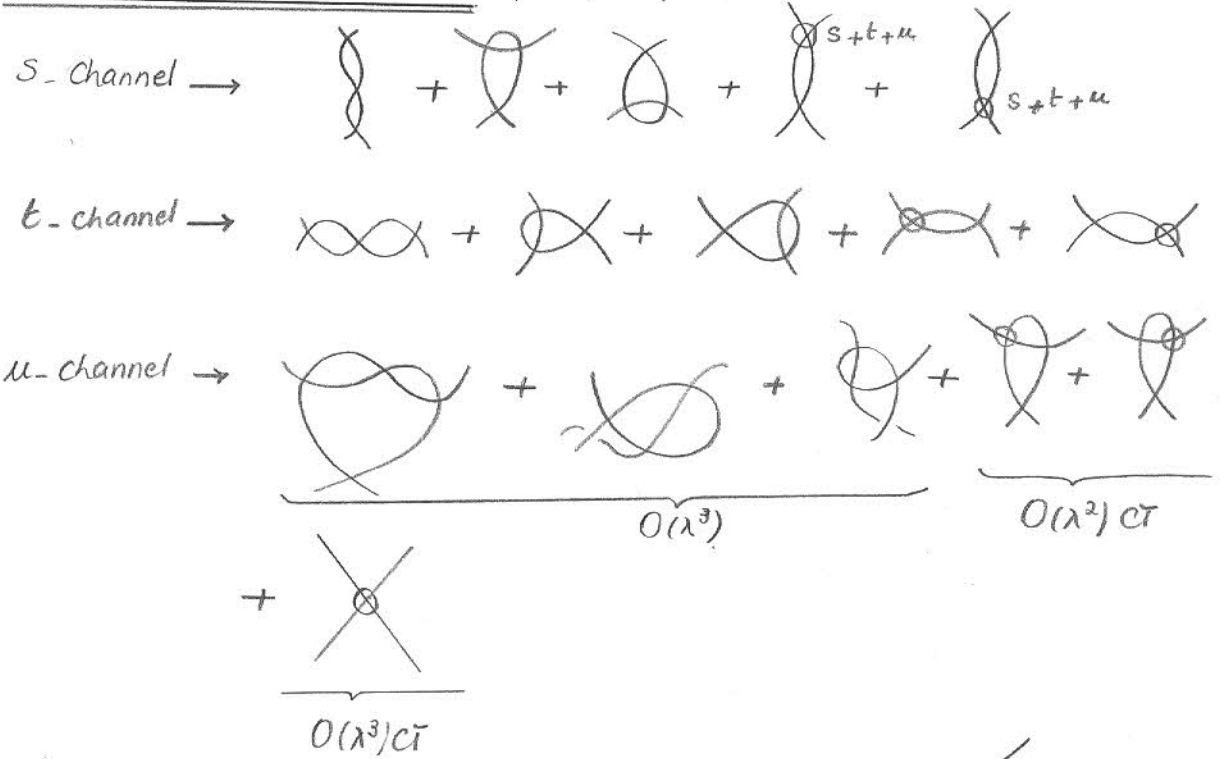
یک جاسبه two loop در تئوری $\lambda\phi^4$

نمودارها در

1-loop Contribution:



two loops



$\delta\lambda(-i\lambda\mu^\epsilon) = \frac{(-i\lambda\mu^\epsilon)(i\lambda)}{\lambda^2\mu^\epsilon = (-i\lambda)^2\mu^\epsilon} \left[\frac{-3i}{16\pi^2\epsilon} + iV_f(4m^2) + 2iV_f(0) \right]$ قبل بدست آورده بودیم

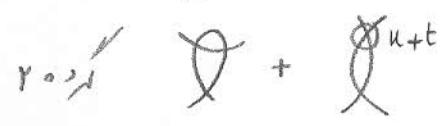
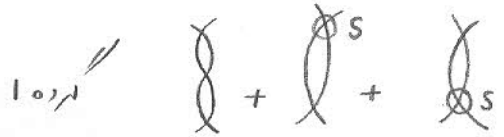
$= (-i\lambda)^2\mu^\epsilon \left\{ \left[\frac{i}{16\pi^2\epsilon} - iV_f(4m^2) \right] + 2 \left[\frac{i}{16\pi^2\epsilon} - iV_f(0) \right] \right\}$

$\mathcal{G}_{2-loop} = (-i\lambda)^2\mu^\epsilon \left\{ \underbrace{(-iV(4m^2))}_s + \underbrace{2(-iV(0))}_{u+t} \right\}$

with

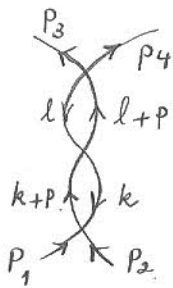
$-iV(4m^2) = -iV_f(4m^2) + \frac{i}{16\pi^2\epsilon} \rightarrow (-i\lambda)^2\mu^\epsilon (-iV(4m^2))$

$-2iV(0) = -2iV_f(0) + \frac{2i}{16\pi^2\epsilon} \rightarrow (-i\lambda)^2\mu^\epsilon (-iV(0))$



هر دسته از نمودارها را می توان در سه گروه تقسیم کرد: (سه گانه)



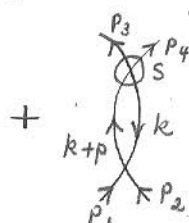
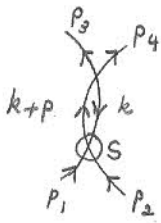


$$(-i\lambda)^3 (iV(p^2))^2$$

$$V(p^2) = \frac{-1}{16\pi^2\epsilon} + \frac{1}{32\pi^2} \gamma_E + \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \ln \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2}$$

$$p = p_1 + p_2$$

$$V(p^2) = \frac{-1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2)}$$



$$= 2(-i\lambda)^3 \frac{(iV(p^2))}{\text{self-energy}} \frac{(-iV(4m^2))}{\text{self-energy}}$$

این حاصل ضرب دو قطب نامتناهی است زیرا که در این دو قطب نامتناهی همگرا می‌شوند.

$$V(p(4m^2)) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \ln \left(\frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{1}{32\pi^2} \gamma_E$$

و

$$\begin{aligned} & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} = (-i\lambda)^3 \left[(iV(p^2))^2 + 2(iV(p^2))(-iV(4m^2)) \right] \\ & = (-i\lambda)^3 \left\{ (-V(p^2) + 2V(p^2)V(4m^2)) \pm V^2(4m^2) \right\} \\ & = (-i\lambda)^3 \left\{ -[V(p^2) - V(4m^2)]^2 + (V(4m^2))^2 \right\} \end{aligned}$$

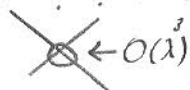
این عبارت همگرا می‌شود

$$\begin{aligned} V(p^2) - V(4m^2) &= \frac{-1}{16\pi^2\epsilon} + \frac{1}{32\pi^2} \gamma_E + \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \ln \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2} \\ &+ \frac{1}{16\pi^2\epsilon} - \frac{1}{32\pi^2} \gamma_E - \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \ln \frac{m^2 - 4m^2\alpha(1-\alpha)}{4\pi\mu^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 d\alpha \ln \left(\frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{m^2 - 4\alpha(1-\alpha)m^2} \right) \quad \text{اصولاً } \frac{1}{\epsilon} \text{ ندارد}$$

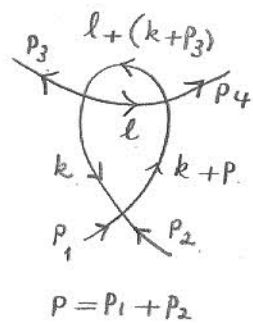
$$= (V(4m^2))^2 = \left(\frac{-1}{16\pi^2\epsilon} \right)^2 + \dots$$

عبارت متناسب با $\frac{1}{\epsilon^2}$ را double pole می‌نامند. این نوع ∞ ها در CT از مرتبه $(i\lambda)^3$ جذب می‌شوند.



بنابراین در حد اول از دستة نمودارهای s-channel مرتبه ۲ حلقه هیچ همگرا نمی‌شوند.

$$\sim \frac{1}{\epsilon} f(p^2)$$



برای بارش تا همین بویج مرتب کنه می شود

$$I = (-i\lambda)^3 \int \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i\mu^\epsilon}{[(k+p)^2 - m^2]} (iV((k+p_3)^2))$$

$$= (-i\lambda)^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i\mu^\epsilon}{[(k+p)^2 - m^2]}$$

$$\times \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \frac{i}{l^2 - m^2} \frac{i}{(l+k+p_3)^2 - m^2}$$

$$= iV((k+p_3)^2)$$

$iV((k+p_3)^2)$ can be converted into

$$iV((k+p_3)^2) = -\frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2}$$

with $\Delta = m^2 - \alpha(1-\alpha)(k+p_3)^2$

$$\rightarrow iV((k+p_3)^2) = \frac{-1}{2} \int_0^1 d\alpha \left[\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left\{ \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)(k+p_3)^2} \right\}^{2-\frac{d}{2}} \right]$$

$$\rightarrow I = \text{Diagram} = \frac{-\lambda^3}{2(4\pi)^2} \Gamma(2-\frac{d}{2}) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 d\beta \frac{\mu^\epsilon}{(k^2 + 2kp\beta + \beta p^2 - m^2)^2}$$

$$\times \int_0^1 d\alpha \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)(k+p_3)^2} \right)^{2-\frac{d}{2}}$$

Now use:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 d\omega \frac{\omega^{\alpha-1} (1-\omega)^{\beta-1}}{(\omega A + (1-\omega)B)^{\alpha+\beta}}$$

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2} ; \beta = 2$$

$$A = m^2 - \alpha(1-\alpha)(k+p_3)^2 ; B = k^2 + 2kp\beta + \beta p^2 - m^2$$

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \Gamma(4-\frac{d}{2}) ; \Gamma(\alpha) = \Gamma(2-\frac{d}{2}) ; \Gamma(\beta) = \Gamma(2) = 1$$

در این قسمت می توانیم از کتاب Peskin فرمول ۱۰-۱۰۰ را استفاده کنیم (در ادامه تقریباً همیشه اصلی یعنی حرف ∞ ها میزنیم) این رو خواهیم کرد.

$$\rightarrow \frac{-i\lambda^3}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon}\right) \int_0^1 dy \frac{\Gamma(\epsilon)}{(m^2 - y(1-y)p^2)^\epsilon} + \dots$$

$$\xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{d \rightarrow 4} \frac{-i\lambda^3}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon}\right) \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \ln \left(\frac{m^2 - y(1-y)p^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\}$$

local (double) poles
 \rightarrow local CT's will of $O(\lambda^3)$
 remove them

Non-local ϵ^{-1} (*)

∞ از این غیر پرفکتی را می توان با اضافه کردن یک دم CT، یعنی $\otimes_{t+u} + \otimes_{u+t}$ حذف کرد.

$$\otimes_{u+t} = (-i\lambda)^3 (-2iV(0)) (iV(p^2))$$

$$\sim -2iV(0) = \frac{2i}{2(16\pi^2)} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2 - \frac{d}{2}}$$

$$iV(p^2) = \frac{-i}{2(16\pi^2)} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \int_0^1 d\alpha \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}\right)^{2 - \frac{d}{2}}$$

به این ترتیب

$$\otimes = (-i\lambda)^3 \left(\frac{2i}{32\pi^2}\right) \left(\frac{-i}{32\pi^2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}$$

$$\times \int_0^1 d\alpha \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}$$

$$= \frac{(-i\lambda)^3}{2(4\pi)^4} \left\{ \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2 - \frac{2}{\epsilon} \int_0^1 d\alpha \ln \frac{m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2} - \frac{2}{\epsilon} \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \dots \right\}$$

↙
↘

double pole →
non-local CT that cancels *

CT of $O(\lambda^3)$

∞ ها امیریه. p^2 سببی ندارند، به این ترتیب ∞ از نوع non-local در نمودارها Δ -channel ندارند.
 وان من از خصوصیت های تواری های بازبینی، نذر است.