خلاصه: در سؤال مطرح شده این بود که تابع گرین $\tilde{G}^{(n)}_{ren}$ با تغییر μ چگونه تغییر می‌کند؟

با فرض کردیم که

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{G}^{(n)}_B (\{p_i\}; m_B, g_B) = 0$$

و استفاده کردیم از (در تئوری $g\varphi^4$) $\tilde{G}^{(n)}_B = Z_\varphi^{n/2} \tilde{G}^{(n)}_{ren}$ و نشان دادیم که $\tilde{G}^{(n)}_{ren}$ در معادله دیفرانسیل

$$\left[\mu \frac{d}{d\mu} + \beta(g_R(\mu)) \frac{\partial}{\partial g_R(\mu)} + m_R \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_R} + n\gamma(g_R(\mu))\right] \tilde{G}^{(n)}_{ren} (\{p_i\}; m_R, g_R, \mu) = 0$$

صدق می‌کند که در آن

$$\gamma(g_R(\mu)) = \frac{1}{2} Z_\varphi^{-1} \mu \frac{\partial}{\partial\mu} Z_\varphi = \mu \frac{\partial}{\partial\mu} \ln\sqrt{Z_\varphi}$$

$$\beta(g_R(\mu)) = \mu \frac{\partial}{\partial\mu} g_R(\mu)$$

$$m_R \gamma_m (g_R(\mu)) = \mu \frac{\partial}{\partial\mu} m_R(\mu)$$

معادله Callan-Symanzik

✓ بعد از این سؤال به این سؤال جواب دادیم که اگر $p_i \to t p_i$ (تغییر مقیاس) بدهیم، تابع گرین n نقطه‌ای چگونه تغییر می‌کند؟

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t} - D + m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \mu \frac{\partial}{\partial\mu}\right) \tilde{G}^{(n)}_R (t p_i; g_R, m_R, \mu) = 0 \qquad *$$

که در آن $D = d - n\left(\frac{d}{2}+1\right)$ Engineering dimension از رابطه

$\tilde{G}^{(n)}_R (p_1, \dots p_n) = \delta^d\left(\sum_{i=1}^{d} p_i\right) \tilde{G}^{(n)}_R (p_1, \dots, p_{n-1})$ بدست آمده بود و

$$\tilde{G}^{(n)}_R (t p_i; m_R, g_R, \mu) = t^D \tilde{G}^{(n)}_R (p_i; m_R(t), g_R, \mu(t))$$

$$m_R t^{-1} \equiv m_R(t), \qquad \mu(t) \equiv \mu t^{-1}$$

✓ با حذف $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$ از دو معادله Callan-S. و $*$ خواهیم داشت:

$$\left[-t\frac{\partial}{\partial t} + D + n\gamma - m_R(1-\gamma_m) + \beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R}\right] \tilde{G}^{(n)}_R (t p_i; m_R, g_R, \mu) = 0$$

<u>Ansatz:</u> $\tilde{G}^{(n)}_R (\{p_i\}; m_R, g_R, \mu) = f(t)\, \tilde{G}^{(n)}_R (p_i; m_R(t), g_R(t), \mu)$ برای حل معادله

در نتیجه می‌شود معادله

$$\left(-t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{t}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} + t\frac{\partial m_R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m_R} + t\frac{\partial g_R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g_R}\right) \tilde{G}^{(n)}_R (t p_i; m_R, g_R, \mu) = 0$$

$$\frac{t}{f(t)}\frac{\partial f(t)}{\partial t} = D + n\gamma(g_R(t)) \longrightarrow \text{Anomalous Dimension}$$

$$t\frac{\partial m_R}{\partial t} = -m_R(1-\gamma_m)$$

$$t\frac{\partial g_R}{\partial t} = \beta(g_R(t))$$

از طرفی

$$f(t) = \frac{t^D}{t_0^D}\, f(t_0)\, \exp\left(n \int_{t_0}^{t} \gamma\left(g_R(t')\right) \frac{dt'}{t'}\right)$$

$$\rightarrow \tilde{G}_R^{(n)}(tp_i; m_R, g_R, \mu) = \frac{t^D}{t_0^D}\, f(t_0) \exp\left(n \int_{t_0}^{t} \gamma\left(g_R(t')\right)\frac{dt'}{t'}\right) \tilde{G}_R^{(n)}\left(p_i, m_R(t), g_R(t), \mu\right)$$

سؤال بعدی در مورد مراتب بالاتر اختلال است. سؤال این است که آیا تعداد محدود Counter term که برای رفع مشکل تئوری (بوجود آمدن واگرایی های UV) در مرتبه one-loop کافی بودند کافی هستند که مشکل تئوری را در تمام مراتب اختلال رفع کنند؟

یادآوری a) Power-Counting in $\lambda\varphi^r$-Theory

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right)E + V\left(\frac{r}{2}(d-2) - d\right)$$

$\lambda\varphi^3$-theory in $d=4$ dim $\qquad D = 4 - E - V$

$\lambda\varphi^4$-theory in $d=4$ dim $\qquad D = 4 - E$

$\lambda\varphi^6$-theory in $d=4$ dim $\qquad D = 4 - E + 2V$

$E =$ تعداد پاهای خارجی $\qquad V =$ تعداد گره‌ها

b) Power Counting in QED

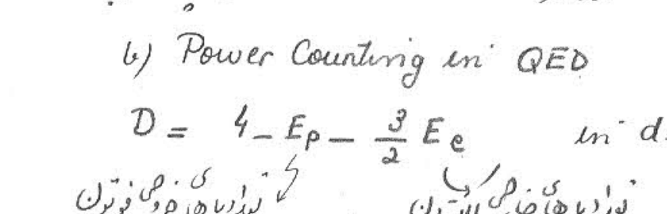
$$D = 4 - E_p - \frac{3}{2}E_e \qquad \text{in } d = 4\,\text{dim}$$

تعداد پاهای خارجی فوتون — تعداد پاهای خارجی الکترون

در این آنالیز ابعادی نمی‌توان نتیجه گرفت که CT هایی که ما در مرتبه تک حلقه پیدا کرده‌ایم واقعاً می‌توانند ∞ هایی را که در مراتب بالاتر حلقه (اختلال) بوجود می‌آیند حذف کنند. مشکل اساسی در اینجا subdiagram ها یا subdivergencies است. (البته از نوع UV).

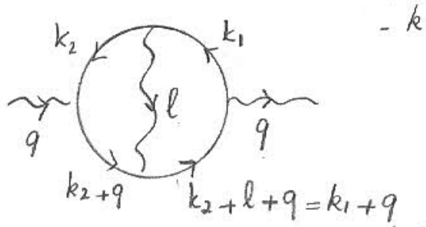
بر این اساس ما با ۲ دسته نمودار در مراتب بالای اختلال (حلقه‌های بالاتر) بوجود می‌آید:

(۱) در QED تانسور قطبش خلاء در مرتبه one-loop با اضافه کردن CT مربوطه حذف می‌شود:



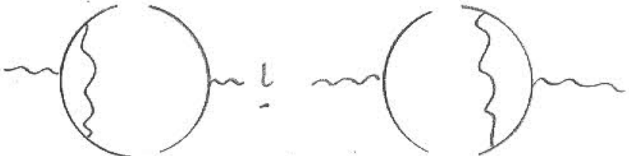
اگر همین نمودار در مرتبه بالاتر مثلاً ظاهر شود، می‌توان ∞ آن را با اضافه کردن CT مربوطه حذف کرد.

(۲) مشکل اساسی وقتی است که اصطلاحاً نمودار فاینمن شامل overlapping divergence باشد.



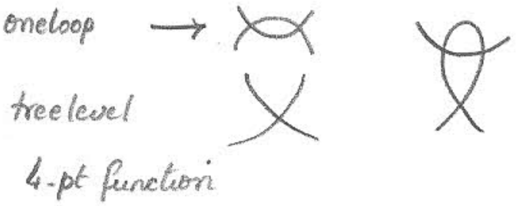
$-k_2 + k_1 - l = 0 \rightarrow l = k_1 - k_2$

• دقت کنید که مشکل اصلی این نمودار به شکل



بوده است.

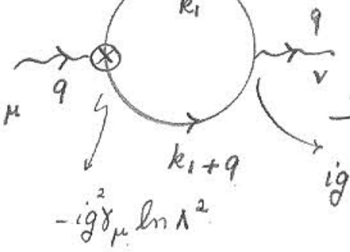
1-loop Vertex function ⊗ tree level Vertex function یا tree level Vertex function ⊗ 1-loop Vertex function



- در تئوری $\lambda\phi^4$ هم این پدیده می‌تواند بروز کند (مثلاً در نمودار

- بگذارید ببینیم که برای رفع مشکل ∞ در نمودار

چه کاری می‌توان کرد:



• ما می‌توانیم برای اینکار از CT مربوط به رأس

استفاده کنیم

یادآوری می‌کنیم که CT مربوط به رأس به صورت $-ig^2\gamma_\mu \ln\Lambda^2 \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ می‌باشد

• به این ترتیب نمودار اصلاح شده در مرحله اول مانند یک نمودار انرژی فوتون است که در یک رأس آن $-ig^2\gamma_\mu \ln\Lambda^2$ و در رأس دیگر $ig\gamma^\nu$ ظاهر می‌شود.

• در مرحله بعد باید به انتگرال فاینمن نمودار مربوط به

توجه کنیم.

$$\sim g^3\, \Pi_{\mu\nu} \ln\Lambda^2 \sim g^3 \left(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}\right) \Pi_{(1)}(q^2) \ln\Lambda^2$$

$$= g^3 \left(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}\right) \left(\ln q^2 + \ln\Lambda^2 + \Pi_{(1)}^{\text{بقیه قسمت‌های متناهی}}\right) \ln\Lambda^2$$

حتی اگر فقط به قسمت متناهی $\Pi(q^2)$ در مرتبه اول توجه کنیم

$$\sim g^3 \left(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}\right) \left(\ln q^2 \ln\Lambda^2 + (\ln\Lambda^2)^2 + \text{finite} \times \ln\Lambda^2\right)$$

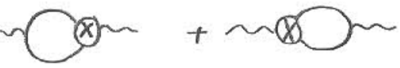
نکته: نوع ∞ جدیدی که در اینجا بوجود می‌آید $\ln q^2 \ln\Lambda^2$ است که در فضای x به

$A_\mu \left(\ln(-\Box) \ln\Lambda^2\right) \left(\partial_\mu \partial_\nu - \Box g_{\mu\nu}\right) A_\nu$ ترجمه می‌شود

این نوع ∞ ها را باید با اضافه کردن CT های جدید به لاگرانژی (کمک گرفت) از بین برد و با توجه به اینکه نوع و شکل این جمله ها با نوع و شکل جملات اولیه در لاگرانژی QED یکسان نیست، پدیدار شدن این جملات می‌تواند بصورت بالقوه بازبهنجارش پذیری QED را زیر سؤال ببرد.

✓ به این نوع ∞ ها، نوع جملات بوجود آمده در لاگرانژی (CT های جدیدی که به آنها احتیاج داریم) بینهایت های غیرموضعی میگویند.

The non-polynomial divergent terms are called non-local terms.

✓ تنها راهی که میتوان تصور کرد که این نوع سهم های غیرموضعی در مراتب بالاتر اختلال مشکلی برای بازبهنجارش پذیری تئوری بوجود نیاورند اینکه مثل سهم دو نمودار  همدیگر را حذف کنند.

✓ این سؤال مهم که آیا با انتگرال همه نمودارهای بد (subdiagrams) در همه مراتب اختلال همدیگر را حذف می‌کنند در روش BPHZ برای اثبات بازبهنجارش پذیری QED نشان داده شده است

BPHZ = Bogoliubov - Parasiuk - Hepp - Zimmermann renormalization scheme

(See K. Sibold (2010) Scholarpedia, 5(5); 7306)

✓ ما اینجا مثال نشان میدهیم که در تئوری $\lambda\varphi^4$، CT هایی که در مرتبه یک حلقه برای از بین بردن ∞ های انتگرالهای فاینمن استفاده کردیم برای از بین بردن ∞ ها در مرتبه ۲ حلقه کافی هستند، بشرطی که بصورت سیستماتیک بتوانیم از آنها برای کمیته کردن زیرنمودارها (subdiagrams) استفاده کرد. →

(Peskin بخش ۱۰) ←

Special two-loop Example: (Peskin یادداشت های بخش ۱۰ کتاب)

یادآوری

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\mu^\epsilon\varphi^4$$

$$\mathcal{L}_{CT} = \frac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\delta_m\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\delta_\lambda\mu^\epsilon\varphi^4$$

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_B{}^2) - \frac{1}{2}m_B{}^2\varphi_B{}^2 - \frac{\lambda_B}{4!}\varphi_B{}^4$$

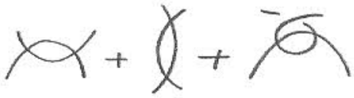
$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} = \frac{1}{2}(1+\delta_Z)(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}(m^2+\delta_m)\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\mu^\epsilon(1+\delta_\lambda)\varphi^4$$

مقایسه

$$\varphi_B = Z_\varphi^{1/2}\varphi$$

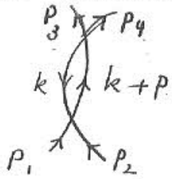
$$m_B{}^2 = (m^2+\delta_m)Z_\varphi^{-1}$$

$$\lambda_B = Z_\varphi^{-2}(1+\delta_\lambda)\lambda\mu^\epsilon$$

0 ___ 

a) Vertex function renormalization: $\delta_\lambda = ?$

a1) S_channel

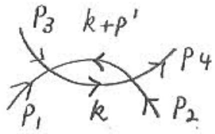


$$p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \qquad s = (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2$$

$$= (-i\lambda)^2 \; iV(s)$$

$$iV(s) = \frac{-\mu^\epsilon}{2} \int_k \frac{1}{(k^2-m^2)\left((k+p)^2-m^2\right)}$$

a2) t_channel



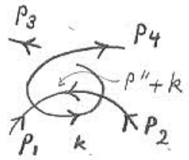
$$p' = p_3 - p_1 = p_2 - p_4$$

$$t = (p_3-p_1)^2 = (p_2-p_4)^2$$

$$= (-i\lambda)^2 \; iV(t)$$

$$iV(t) = \frac{-\mu^\epsilon}{2} \int_k \frac{1}{(k^2-m^2)\left((k+p')^2-m^2\right)}$$

a3) u_channel



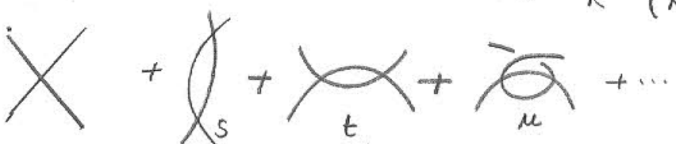
$$p'' = p_4 - p_1 = p_2 - p_3$$

$$u = (p_4-p_1)^2 = (p_2-p_3)^2$$

$$= (-i\lambda)^2 \; iV(u)$$

$$iV(u) = \frac{-\mu^\epsilon}{2} \int_k \frac{1}{(k^2-m^2)\left((k+p'')^2-m^2\right)}$$

Together:



$$-i\lambda\mu^\epsilon + (-i\lambda)^2 \left(iV(s) + iV(t) + iV(u) \right) + \cdots$$

در one loop $\quad V(p^2) = \dfrac{-\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon} + \mu^\epsilon V_f(p^2)$

with $\quad V_f(p^2) = \dfrac{1}{32\pi^2} \displaystyle\int_0^1 d\alpha \, \ln \frac{(m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2)}{4\pi\mu^2} + \frac{1}{32\pi^2}\gamma_E$

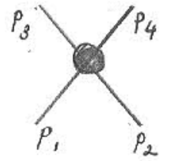
 $\Big|_{\text{up to one\_loop}} = (-i\lambda\mu^\epsilon)\left\{ 1 + (-i\lambda)\left[\dfrac{-3i}{16\pi^2\epsilon} + iV_f(s) + iV_f(t) + iV_f(u)\right]\right\}$

with CT $= (-i\lambda\mu^\epsilon)\left\{ 1 + (-i\lambda)\left[\dfrac{-3i}{16\pi^2\epsilon} + iV_f(s) + iV_f(t) + iV_f(u)\right] + \delta_\lambda \right\}$

MS_scheme $\quad \delta_\lambda = \dfrac{+3\lambda}{16\pi^2\epsilon} \longleftarrow$ این همانی بود که تا حالا داشتیم

Minimal subtraction

• ما می‌خواهیم نوع دیگری از شرط بازبهنجارش (Renormalization Condition) را معرفی کنیم:

a) 

$$\Big|_{\text{leg-amputed}} \quad \boxed{= -i\lambda\mu^{\epsilon} \quad \text{at} \quad s = 4m^2 \ \ \& \ \ u = t = 0} \quad (A)$$

subtraction point

$$\left.\begin{array}{lll} u=0 & P_1 = P_4 & \text{or} \ \ P_2 = P_3 \\ t=0 & P_1 = P_3 & \text{or} \ \ P_2 = P_4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} P_1 = P_2 \ \ \text{or} \ \ P_3 = P_4 \\ \Longrightarrow s = (2P_1)^2 = (2P_2)^2 = (2P_3)^2 = (2P_4)^2 \end{array}$$

$$s = 4m^2 \quad \text{if} \quad P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = P_4^2 = m^2$$

ذرات خروجی on-mass shell هستند. (در ادامه محاسبه چرا که قبلاً فرض کرده بودیم که همه ذرات ورودی و خروجی on-mass shell هستند)

• $-i\lambda\mu^{\epsilon}$ در طرف راست عبارت (A) با فرض $s=4m^2$، $u=t=0$، و on-shell بودن همه ذرات در پاهای ورودی و خروجی، ضریب جفت‌شدگی "فیزیکی" است.

⟵ از نظر ریاضی کاری که انجام شد عبارت است از:

$$(-i\lambda\mu^{\epsilon})\left\{1 + (-i\lambda)\left[\frac{-3i}{16\pi^2\epsilon} + iV_f(s=4m^2) + iV_f(t=0) + iV_f(u=0)\right] + \delta_\lambda\right\} = (-i\lambda\mu^{\epsilon})$$

$$\rightarrow \delta_\lambda = -(-i\lambda)\left[\frac{-3i}{16\pi^2\epsilon} + iV_f(s=4m^2) + iV_f(t=0) + iV_f(u=0)\right]$$

$$= +i\lambda\left[\frac{-3i}{16\pi^2\epsilon} + iV_f(s=4m^2) + 2iV_f(0)\right]$$

$$\delta_\lambda = i\lambda\left\{\frac{-3i}{16\pi^2\epsilon} + \frac{i}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha \ \ln\frac{(m^2 - 4m^2\alpha(1-\alpha))}{4\pi\mu^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2i}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha \ \ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \frac{3i}{32\pi^2}\gamma_E\right\}$$

همانطور که می‌بینید برخلاف MS_scheme، δ_λ به عنوان CT مربوط به ثابت جفت‌شدگی علاوه بر جمله نامتناهی متناسب با ϵ^{-1}، شامل جملات متناهی هم می‌شود و این از خصوصیات این scheme جدید است که نوعی شرط جدید بر نمودارها تحمیل می‌گذارد.

MOM_Condition: Renormalized Vertex at subtraction scale $\mu^2 = p^2$ equal to its tree level expression (for $m=0$)

Mass Renormalization: ("Physical" mass)

 $= -\frac{i\lambda\mu^\epsilon}{2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{i}{k^2-m^2} = \frac{-i\lambda}{2}\left(\frac{-im^2}{16\pi^2}\right)\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma_E-\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)$

 $= D_B(p^2) = \frac{i}{p^2-m_B^2-\Sigma(p^2,\lambda_B,m_B)}$

bare full propagator

$\varphi = Z_\varphi^{-1/2}\varphi_B \qquad \langle\varphi\varphi\rangle = Z_\varphi^{-1}\langle\varphi_B\varphi_B\rangle$

$$D_{ren}(p) = \frac{iZ_\varphi^{-1}}{p^2-m_B^2-\Sigma(p^2,m_B,\lambda_B)} \overset{\text{MS-scheme}}{=\!=} \frac{i}{p^2-m^2-\Sigma_f(m,p^2,\lambda)}$$

حال می‌خواهیم scheme یا prescription را عوض کنیم:

• در خلاف MS-scheme که جرم ذره از روی قطب انتشارگر بازبهنجار شده بدست نمی‌آید

$$\left(\text{یعنی از روی رابطه}\quad \left(p^2-m^2-\Sigma_f(p^2,m^2)\right)\Big|_{p^2=\bar m^2}=0\right)$$

در scheme جدید می‌خواهیم CT های δ_Z ، δ_m را طوری تعیین کنیم که

$D_{ren}(p^2) = \frac{i}{p^2-m_{phys}^2}$ باشد.

یعنی

(a) m_{phys} از قطب انتشارگر بازبهنجار شده بدست بیاید $(p^2-m^2_{phys}=0)$

(b) باقیمانده (Residue) این قطب برابر یک شود.

← این دو شرط دقیقاً شرطهایی را روی $\Sigma(p^2)$ اعمال می‌کنند

a) $\Sigma(p^2)=0$ at $p^2=m^2_{phys}$

b) $\frac{d\Sigma(p^2)}{dp^2}=0$ at $p^2=m^2_{phys}$.

توضیح: شرط اول واضح است:

قطب انتشارگر از رابطه $(p^2-m^2)-\Sigma(p^2,m^2)=0$ بدست می‌آید، اگر قرار باشد

$p^2=m_{phys}^2$ قطب انتشارگر باشد باید $\Sigma(p^2=m_{phys}^2)=0$ شود

همچنین می‌بینیم که این شرط لازم برای این است که باقیمانده این قطب مساوی 1 شود.

• در مورد شرط دوم نکته زیر را یادآوری می‌شوم:

اگر $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ در آن صورت

$$Res(f,c) = \lim_{z\to c} (z-c) f(z)$$

قطب مرتبه اول

$$\text{OR} \qquad Res(f,c) = \frac{g(c)}{h'(c)} \qquad \text{if } h(c)=0 \ \& \ h'(c)\neq 0$$

البته با فرض اینکه g و h توابع holomorphic هستند (∞ مشتق‌پذیر در همسایگی هر نقطه)

به این ترتیب ←

$$f(p^2) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2, m)}$$

$$Res\left(f(p^2), m^2_{phys}\right) = \frac{1}{1 - \left.\frac{d\Sigma}{dp^2}\right|_{p^2=m^2_{phys}}} = 1 \longrightarrow \left.\frac{d\Sigma}{dp^2}\right|_{p^2=m^2_{phys}} = 0$$

■

اگر بخواهیم با این شرط جدید (در این scheme جدید) δ_Z و δ_{m^2} را بدست بیاوریم (برای تئوری $\lambda\phi^4$) خواهیم داشت:

$-i\Sigma(p^2) =$  $+$ 

$$= -i\left[\frac{-\lambda m^2}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)\right] + i\left(p^2\delta_Z - \delta_m\right)$$

$$-i\,\Sigma(p^2 = m^2_{phys}) = 0 = -i\left[\frac{-\lambda m_p^2}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln\frac{m_p^2}{4\pi\mu^2}\right)\right] + i\left(\delta_Z m_p^2 - \delta_m\right)$$

$$-i\left.\frac{d\Sigma(p^2)}{dp^2}\right|_{p^2=m_p^2} = 0 = i\,\delta_Z \longrightarrow \boxed{\delta_Z = 0}$$

$$\longrightarrow \boxed{\delta_m = +\frac{\lambda m_p^2}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \ln\frac{m_p^2}{4\pi\mu^2}\right)}$$

این روش جدید را On mass-shell renormalization scheme می‌نامیم که در مقابل Minimal subtraction scheme که در درس یاد گرفتیم در QED، در QCD اهمیت بالا دارد. در ادامه سعی می‌کنیم که محاسبه two-loop را در تئوری $\lambda\phi^4$ در این scheme جدید انجام دهیم.