نظریه میدان کوانتومی و ذرات پیشرفته ۲ - درس ۱ - ۳۰، ۱۱، ۹۵

شکست خودبخودی تقارن : SSB

- SSB
  - تقارن گسسته
  - تقارن های پیوسته
    - Abelian ($\lambda\varphi^4$ _ theory with complex scalars)
      - Goldstone Theorem
        - Classical Proof.
        - Quantum Proof.
          - Proof using current algebra.
          - Proof using symmetry properties of quantum effective action.
    - Non _ Abelian
      - Real fields
      - Complex fields

(Daschen Theorem)

- شکست خودبخودی تقارن برای تقارن های تقریبی
- شکست خودبخودی تقارن chiral .

شکست خودبخودی تقارن (تقارن پیوسته) : فرض کنید لاگرانژی یک تئوری تحت یک تبدیل پیوسته متقارن باشد ولی حالت پایه تئوری تحت این تقارن ناوردا نماند . در اینصورت می‌گوییم تقارن بصورت خودبخودی شکسته است .

مثال :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)^* \partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - \frac{\lambda}{4!}(\varphi^*\varphi)^2$$

$$= (\partial_\mu\varphi^*)\partial^\mu\varphi - V(\varphi,\varphi^*) \quad ; \quad V(\varphi,\varphi^*) = m^2\varphi^*\varphi + \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2$$

$\lambda > 0$

Global U(1) _ Transformation :

$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi \qquad \varphi^* \to e^{-i\alpha}\varphi \qquad \alpha$ حقیقی

$\curvearrowright \delta_\alpha \mathcal{L} = 0$

Ground State : $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = m^2\varphi^* + \dfrac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)\varphi^* = 0$

$\varphi^* = 0$

$m^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi) = 0 \curvearrowright \quad \varphi^*\varphi = |\varphi|^2 = \frac{-2m^2}{\lambda} \longrightarrow |\varphi| = \pm\sqrt{\frac{-2m^2}{\lambda}} \equiv \pm a$

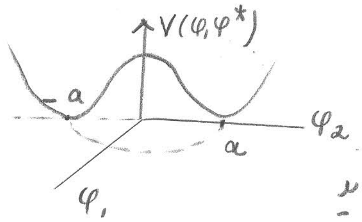
for $m^2 > 0$ جواب غیرقابل قبول

for $m^2 < 0$ a وجود دارد .

for $m^2 > 0 \qquad \varphi^* = 0 \longrightarrow \min$ of $V(\varphi, \varphi^*)$

Classic: $\longrightarrow m^2 < 0 \qquad \varphi^* = 0 \quad \max \longrightarrow |\varphi|^2 = a^2 \qquad |\varphi| = \pm a \quad (\min)$

$\longrightarrow$ QFT: $\quad |\langle 0|\varphi|0\rangle|^2 = a^2$



• در واقع بی‌نهایت min وجود دارد که با تبدیل $U(1)$ به هم تبدیل می‌شوند.

min for $|\varphi| = a$. می‌توانیم $\mathcal{L}$ را حول یکی از این min ها بسط بدهیم، برای اینکار باید یکی از min ها را انتخاب کنیم و این همان شکست خودبخودی تقارن است.

$$\varphi = \rho(x)\, e^{i\theta(x)} \qquad \rho(x), \theta(x) \quad \text{میدان‌های اسکالر حقیقی}$$

min انتخابی ما: $\quad \langle 0|\rho(x)|0\rangle = a$

$$\langle 0|\theta(x)|0\rangle = 0$$

تغییر متغیر: $\quad \rho'(x) = \rho(x) - a \quad \rightarrow \quad \langle 0|\rho'(x)|0\rangle = 0$

$$\langle 0|\theta(x)|0\rangle = 0$$

$$\varphi(x) = (\rho' + a)\, e^{i\theta(x)}$$

$$\varphi^*\varphi = (\rho' + a)^2 \qquad V(\varphi, \varphi^*) = m^2(\varphi^*\varphi) + \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2$$

$$= \frac{\lambda}{4}\left[(\rho' + a)^2 - a^2\right]^2 - \frac{\lambda}{4}a^4$$

$$\boxed{\mathcal{L} = (\partial_\mu \rho')(\partial^\mu \rho') + (\rho' + a)^2\, \partial_\mu\theta\, \partial^\mu\theta - \frac{\lambda}{4}\left((\rho' + a)^2 - a^2\right)^2 - \frac{\lambda}{4}a^4}$$

a) ρ' has a mass term $\qquad \frac{1}{2} m_{\rho'}^2 \rho'^2 = a^2 \lambda \rho'^2 \rightarrow m_{\rho'}^2 = 2\lambda a^2 > 0$

b) $\theta(x)$ is massless

c) The original global $U(1)$ symmetry is not exhibited in $\mathcal{L}(\rho', \theta)$

* As a result of SSB $\rightarrow$ Instead of 2 massive fields (φ, φ^*) or (φ_1, φ_2) in $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\varphi^* = \varphi_1 - i\varphi_2$

we obtain: $\rho'(x)$ massive

$\theta(x)$ massless (Goldstone mode)

We say: $\theta(x)$ parameterizes the "flat" direction.

سؤال: وقتی در حالت کلی تقارن گروه تقارن G به صورت خودبخود شکسته شود، چند عدد مد گلدستون از نتیجه این شکست تولید می‌شود؟

$G = SO(3)$ (Non-Abelian دوران سه بعدی $SO(3) \simeq SU(2)$)

$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\varphi}) \cdot \partial^\mu \vec{\varphi} - \frac{m^2}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi} - \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})^2$$

$$\vec{\varphi} \to e^{iT_k\alpha_k}\vec{\varphi} \qquad \varphi_i \to \left(e^{iT_k\alpha_k}\right)_{ij}\varphi_j = \varphi_i'$$

T_k are a set of matrices obeying the Lie algebra of the group.

$k = 1,2,3$ = تعداد مولدهای گروه غیرآبلی

$$\delta\varphi_i = i\alpha_k (T_k)_{ij}\varphi_j = i\epsilon_{ijk}\alpha_k\varphi_j$$

$\delta\mathcal{L} = 0$

$$\delta(\partial_\mu\varphi_i\,\partial^\mu\varphi_i) = \partial_\mu\delta\varphi_i\,\partial^\mu\varphi_i + \partial_\mu\varphi_i\,\partial^\mu\delta\varphi_i =$$

$$= 2\partial^\mu\varphi_i\,\partial_\mu\delta\varphi_i$$

$$= 2i\epsilon_{ijk}\,\partial^\mu\varphi_i\,\partial_\mu\varphi_j\,\alpha_k = 0$$

$$\delta(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi}) = 2\varphi_i\delta\varphi_i = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k\varphi_i\varphi_j = 0$$

$\rightarrow \underline{\delta\mathcal{L} = 0}$

Min of the potential: $V(\vec{\varphi}) = \frac{m^2}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi} + \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})^2$

$\frac{\partial V(\vec{\varphi})}{\partial\varphi_i} = 0 \to \quad m^2 > 0 \quad \varphi_i = 0 \quad \text{min}$

$m^2 < 0 \quad \varphi_i = 0 \quad (\text{max}) \quad \& \quad |\vec{\varphi}_0| = a = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}$

min غیرصفر برای پتانسیل $V(\vec{\varphi})$ $\qquad \lambda > 0,\ m^2 < 0$

این بار $|\vec{\varphi}_0| = a$ را نحوی انتخاب می‌کنیم که $\vec{\varphi}_0$ مثلاً در جهت ۳ باشد $\longleftarrow \vec{\varphi}_0 = a\hat{e}_3$

با اینکار یک جهت خاص انتخاب شده است و این به معنی شکست خودبخود تقارن است.

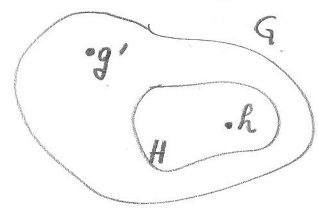
$\vec{\varphi}_0 = (0,0,a)$ is the flat direction.

• وقتی $\vec{\varphi}_0$ در یک جهت خاص انتخاب شود (شکست تقارن)، $\vec{\varphi}_0$ فقط تحت دوران حول جهت ۳ ناوردا باقی می‌ماند.

$T_k \rightarrow$ مولد دوران در جهت $\hat{e}_k$

$\vec{\varphi}_0$ is not invariant under full group $SO(3) = G$

$$U(h) = e^{i\alpha_3 T_3}$$



$$\exists g' \in G/H \qquad U(g')\vec{\varphi}_0 = \vec{\varphi}_0' \neq \vec{\varphi}_0$$

$$\exists h \in H \qquad U(h)\vec{\varphi}_0 = \vec{\varphi}_0' = \vec{\varphi}_0$$

$$V\left(\vec{\varphi}' = U(g)\vec{\varphi}\right) = V(\vec{\varphi}) \qquad g \in G$$

واین به این معنی است که خود پتانسیل ، که انرژی تحت دوران حول همه جهات ناوردا است (g می‌تواند از H هم باشد) ولی min پتانسیل $\vec{\varphi}_0$ فقط تحت دوران حول یک جهت ناوردا باقی می‌ماند (در اینجا فرض کرده‌ام که $\vec{\varphi}_0$ در جهت ۳ است و به این ترتیب H یک مولد دارد.)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \vec{\varphi} \cdot \partial^\mu \vec{\varphi} - V(\vec{\varphi})$$

$$V(\vec{\varphi}) = \frac{1}{2} m^2 \vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi} + \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})^2$$

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \qquad \vec{\varphi}_0 = (0, 0, a)$$

<u>Def:</u> $\vec{\chi} = \vec{\varphi} - \vec{\varphi}_0 = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 - a) = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$

i.e. $\chi_1 = \varphi_1$, $\chi_2 = \varphi_2$, $\chi_3 = \varphi_3 - a$ or $\varphi_3 = \chi_3 + a$

$$V = a^2\lambda \chi_3^2 + a\lambda\chi_3(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) + \frac{\lambda}{4}(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2)^2 - \frac{\lambda a^4}{4}$$

$$a = -\frac{m^2}{\lambda}$$

$\longrightarrow$ χ_3 is a massive scalar field: $\frac{1}{2} m_{\chi_3}^2 \chi_3^2 = a^2\lambda\chi_3^2$

$$\begin{cases} m_{\chi_3}^2 = 2a^2\lambda \rightarrow \\ m_{\chi_1} = m_{\chi_2} = 0 \quad \text{Goldstone mode.} \end{cases}$$

- $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ قبل از شکست تقارن
- $(\underbrace{\varphi_1, \varphi_2}_{\text{massless}}, \underbrace{\chi_3}_{\text{massive}})$ بعد از شکست خودبخودی تقارن

$$\dim G - \dim H = \dim G/H =$$ (مدهای بدون جرم) تعداد مدهای گلدستون = قضیه گلدستون

Classical Proof of Goldstone Theorem:

$$V(\vec{\varphi}) = \frac{1}{2} m^2 \vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi} + \frac{\lambda}{4}(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})^2$$

فرض: $\vec{\varphi}_0$ کمینه V است.

$$\vec{\varphi} - \vec{\varphi}_0 = \vec{\chi} \quad \text{or} \quad \vec{\varphi} = \vec{\chi} + \vec{\varphi}_0$$

$V(\vec{\varphi})$ را حول کمینه‌اش (یعنی حول $\vec{\varphi}_0$) بسط می‌دهیم

فرض: $\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right|_{\vec{\varphi}_0} = 0$

$$V(\vec{\varphi}) = V(\vec{\varphi}_0 + \vec{\chi}) = V(\vec{\varphi}_0) + \cancel{\chi_i \left.\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}\right|_{\vec{\varphi}_0}} + \frac{1}{2}\chi_i\chi_j \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j}\right|_{\vec{\varphi}_0} + \cdots$$

بنا به فرض $\vec{\varphi}_0$ کمینه V است.

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\right)_{\vec{\varphi}_0} \geq 0$$

از آنجا که $\vec{\varphi}_0$ کمینه V است ←

ایده ۰: اگر بدانیم چند عضو از اعضای قطر M_{ij} صفر می‌شوند، آنوقت می‌توان تعداد مدهای گلدستون را تعیین کرد!

• برای پاسخ به این سوال یادآوری می‌کنیم:

a) $\vec{\varphi}_0' = U(g)\,\vec{\varphi}_0 = \vec{\varphi}_0 + \delta\vec{\varphi}_0 \begin{cases} \delta\vec{\varphi}_0 = 0 & \text{اگر } g \in H \\ \delta\vec{\varphi}_0 \neq 0 & \text{اگر } g \in G/H \end{cases}$

b) $V(\vec{\varphi}_0' = U(g)\vec{\varphi}_0) = V(\vec{\varphi}_0) \quad \forall g \in G.$

$$\cancel{V(\vec{\varphi}_0)} = V(\vec{\varphi}_0' = \vec{\varphi}_0 + \delta\vec{\varphi}_0) = \cancel{V(\vec{\varphi}_0)} + \underbrace{(\delta\varphi_0)_i \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}\Big|_{\vec{\varphi}_0}}_{=0\ ,\ \vec{\varphi}_0 \text{ is min of } V} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j}\Big|_{\vec{\varphi}_0} \delta\varphi_0^i\, \delta\varphi_0^j + \dots$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j}\Big|_{\vec{\varphi}_0} \delta\varphi_i^{(0)}\, \delta\varphi_j^{(0)} = 0 \longrightarrow \begin{cases} g \in H & \delta\varphi_i^{(0)} = 0 \\ g \in G/H & \delta\varphi_i^{(0)} \neq 0 \curvearrowright \dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j}\Big|_{\vec{\varphi}_0} = 0 \end{cases}$$

به این ترتیب $\dim G/H$ = تعداد صفرهای M_{ij} (ویژه مقادیر صفر این ماتریس) = تعداد مدهای گلدستون.

حالت‌های خاص: (۱) هیچ تقارن اصلاً بصورت خودبخود شکسته نشده باشد. در این صورت نقطه مینیمم خلاء یکتا برای تئوری داریم: در همان هم تحت عمل گروه G ناوردا می‌ماند.

$\curvearrowright G = H$

$\dim G/H = 0 \curvearrowright$ مد گلدستون نداریم

(۲) اگر خلاء بصورتی انتخاب شده باشد که هیچ جهت تقارن خلاء را حفظ نکند. مجموعه تهی $H = \phi$

$G/H = G$ در اینصورت به تعداد مولدهای گروه G مد گلدستون داریم

مثال: • شمارش تعداد مولدهای گروهی که تقارن خلاء را می‌شکنند (تعداد مدهای گلدستون)

$G \to H \qquad O(N) \to O(N-1)$

$O(3) \to O(2) \qquad \dfrac{N(N-1)}{2} \to \dfrac{(N-1)(N-2)}{2}$

$$\dim G/H = \frac{1}{2}N(N-1) - \frac{1}{2}(N-1)(N-2) = \frac{1}{2}(N-1)(N-N+2) = N-1$$

$$\underset{N=3}{=} 3-1 = 2 \qquad (\text{We have 2 Goldstone modes})$$

Quantum Proof of the Goldstone Theorem:

• سؤال: می‌دانیم که تصحیحات کوانتومی می‌توانند جرم ذرات از جمله جرم مدهای گلدستون را تغییر دهند.
آیا با در نظر گرفتن تصحیحات کوانتومی مدهای گلدستون همچنان بدون جرم باقی می‌مانند؟

✓ برای پاسخ این سؤال باید بدانیم چه نوع تقارن‌هایی از کنش کلاسیک (یا انرژی کلاسیک) به کنش مؤثر کوانتومی منتقل می‌شوند؟ (→ Weinberg)

یادآوری: ○ یادآوری می‌کنیم که کنش کوانتومی تابع $\langle\varphi\rangle$ است $\langle\varphi\rangle = \varphi_{cl}$
که در آن φ_{cl} کنش کلاسیک را کمینه می‌کند. برای بدست آوردن کنش کوانتومی، میدان φ را حول φ_{cl} بسط می‌دادیم. (رجوع شود به بحث انتگرال مسیر و تعریف کنش کوانتومی $\Gamma[\varphi_{cl}]$)

✓ تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\chi^n(x) \longrightarrow \chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi] \qquad (*)$$

فرض: a) $S[\chi] = S[\chi+\epsilon F]$ — a) کنش تحت تبدیل $*$ ناوردا است.

b) $\mathcal{D}\chi = \mathcal{D}(\chi+\epsilon F)$ — b) measure انتگرال مسیر تحت تبدیل ناوردا است.

نکته: فرض دوم فرض ظریفی است زیرا در صورت ناوردا نبودن measure می‌توان نشان داد که امکان ظاهر شدن quantum anomaly وجود دارد (بررسی Fujikawa برای بدست آوردن axial anomaly رجوع شود)

✓ حال اگر بخواهیم که کنش کوانتومی هم تحت تبدیل $(*)$ ناوردا بماند، باید $\delta_\epsilon Z[J]=0$ باشد.

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\chi \, \exp\left(iS[\chi] + i\int \chi^n J_n\right)$$

$$\delta_\epsilon S = 0 \longrightarrow \delta_\epsilon Z = \int \mathcal{D}\chi \left(\underbrace{i\delta_\epsilon S}_{\text{بنا به فرض } =0} + i\int \delta_\epsilon \chi^n J_n\right) e^{iS[\chi]+i\int\chi^n J_n} = 0$$

$$0 = \int d^4x \, J_n \langle \delta_\epsilon \chi^n\rangle = \int d^4x \, J_n \, \delta_\epsilon \langle \chi^n\rangle$$

$$= \epsilon \int d^4x \, J_n \langle F^n[x;\chi]\rangle$$

$$0 = \epsilon \int d^4x \, \frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(x)}\bigg|_{\langle\chi\rangle_J} \langle F^n[x;\chi]\rangle$$

$$0 = \epsilon \, \delta_\epsilon \Gamma[\langle\chi\rangle_J]$$

نتیجه: • به این ترتیب به این نتیجه رسیدیم که:

اگر کنش کلاسیک $S[X]$ تحت تبدیل $X \to X + \epsilon F$ ناوردا باشد، آنگاه $\Gamma[\langle X \rangle_J]$ (کنش کوانتومی) تحت تبدیل $X \to X + \epsilon \langle F \rangle_J$ ناوردا می‌ماند.

این قضیه را قضیه Slavnov - Taylor identities می‌گویند ⟵

دسته خاصی از تبدیلات که در فرض‌های بالا صدق می‌کنند، دسته تبدیلات خطی و سراسری هستند (البته فرض بر این بوده که تبدیلات گسسته نباشند):

$$X^n \longrightarrow X^n + \epsilon F^n \quad \text{with}$$

$$F^n[x;X] = s^n(x) + \int t^n{}_m(x-y)\, X^m(y)\, d^4y$$

$$\text{with} \quad t^n{}_m(x-y) = t^n{}_m\, \delta^4(x-y)$$

$$\text{یعنی} \quad F^n[x;X] = s^n(x) + t^n{}_m X^m(x)$$

• تبدیلات پیمانه‌ای از رده این نوع تبدیلات هستند:

$$X^n(x) \longrightarrow X^n(x) + i\epsilon^a\, (t^a)^{nm} X_m(x)$$

✓ به این ترتیب تبدیلی که $\Gamma[X_J]$ را ناوردا نگه می‌دارد عبارت است از $X_J \to X_J + \epsilon \langle F \rangle_J$

• توجه کنید که $X_J \equiv \langle X \rangle_J$ تعریف شده است.

$$\text{در اینجا} \quad \langle F \rangle_J = i\, (t^a)^{nm} \langle X_m \rangle_J$$

✓ اگر فرض کنیم $\langle X_m(x) \rangle_J$ همگن است یعنی $\langle X_m \rangle_J = \text{const.}$، در این صورت طبق رابطه بالای صفحه داریم:

$$\delta_\epsilon \Gamma[\langle X \rangle_J] = 0 \longrightarrow 0 = \int \frac{\delta \Gamma[X]}{\delta X^n(x)}\bigg|_{\langle X \rangle_J} \langle \delta_\epsilon X^n(x) \rangle_J\, d^4x$$

$$= \int \frac{\delta \Gamma[X]}{\delta X^n(x)}\bigg|_{\langle X \rangle_J} i\epsilon^a\, (t^a)^{nm} \langle X^m(x) \rangle_J\, d^4x$$

$$\xRightarrow{\langle X \rangle_J = \text{const}} \boxed{0 = \frac{\partial V_{eff}}{\partial X^n} (t^a)^{nm} X^m \bigg|_{\langle X \rangle_J}}$$

$$\Gamma = -\mathcal{V}\, V_{eff} \longrightarrow \frac{\delta \Gamma}{\delta X^n} = -\mathcal{V} \frac{\partial V_{eff}}{\partial X^n}$$

حجم فضازمان

پتانسیل مؤثر

هدف ما این بود که قضیه گلدستون را برای کنش (پتانسیل) کوانتومی (همان کنش یا پتانسیل مؤثر) ثابت کنیم؛

• به رابطهٔ

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \chi^n} (t^a)^{nm} \chi^m \Big|_{\langle \chi \rangle_J} = 0$$

رسیدیم.

• اگر از این رابطه یک بار دیگر نسبت به χ^l مشتق بگیریم:

$$\left[\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \chi^n \partial \chi^l} (t^a)^{nm} \chi^m + \frac{\partial V_{eff}}{\partial \chi^n} (t^a)^{nl} \right] \Bigg|_{\langle \chi \rangle_J} = 0 \qquad (2)$$

• اگر $J=0$ باشد $\chi_0 = \langle \chi \rangle_{J=0}$ همان کمینهٔ پتانسیل مؤثر است و ما هم داشتیم:

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \chi^n}\Big|_{\chi_0} = 0$$

جملهٔ دوم رابطهٔ (۲) صفر است

✓ به این ترتیب رسیدیم به رابطهٔ هم:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \chi^n \partial \chi^l}\Bigg|_{\chi_0} (t^a)^{nm} \chi_0^m = 0} \qquad (3)$$

✓ اگر $\chi_0 =$ const (یک میدان ثابت که پتانسیل مؤثر را min می‌کند)

a) $$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \chi^n \partial \chi^l}\Big|_{\chi_0} = \underset{p=0}{\Delta^{-1}_{nl}(0)} = \underset{p=0}{\text{—●—}} = \text{1PI two point function}$$

= معکوس انتشارگر کامل

b) $$(t^a)^{nm} \chi_0^m \sim (\delta \chi_0)^n$$

به این ترتیب رابطهٔ (3) به صورت زیر ترجمه می‌شود:

$$0 = \sum_n \Delta_{nl}^{-1}(0) (\delta \chi_0)_n$$

اگر $(\delta \chi_0)_n$ را v_n بنامیم، رابطهٔ بالا را می‌توان به صورت یک رابطهٔ ویژه‌مقداری مربوط به ماتریس Δ^{-1}_{nl} ترجمه کرد که ویژه‌بردارهای آن v_n هستند و ویژه‌مقادیر آن مساوی صفر

$$\sum_n \Delta^{-1}_{nl}(0)\, v_n = 0$$

• در اینجا دو حالت پیش می‌آید:

$v_n = 0$ (a) یا (b) $v_n \neq 0$

(a) اگر $v_n = 0$ باشد یعنی $(\delta X_0)_n = 0$ باشد به این معنی است که تقارن حالت پایه سیستم کوانتومی شکسته نشده باشد

در این مورد نمی‌توان حرفی در مورد Δ_{ne}^{-1} (معکوس انتشارگر کامل) زد

کمینه پتانسیل مؤثر

(b) در صورتیکه $v_n \neq 0$ باشد یعنی $(\delta X_0)_n \neq 0$ باشد، به این معنی است که تقارن حالت پایه سیستم کوانتومی شکسته شده باشد.

$$\Delta_{ne}^{-1}(0) = 0$$

✓ این به این معنی است که انتشارگر کامل در $p^2 = 0$ قطب دارد و این خود به معنی وجود یک ذره فیزیکی گلدستون با جرم مساوی صفر است

معادله پاشندگی مربوط به این ذره بدون جرم است. $p^2 = 0$

نتیجه: ✓ به این ترتیب باید به دنبال تعداد ویژه بردارهای غیر بدیهی (غیر صفر $v_n \neq 0$) ماتریس Δ_{ne}^{-1} (معکوس انتشارگر کامل) بگردیم که ویژه مقادیر مساوی صفر دارند. تعداد این نوع بردارها تعیین کننده تعداد مدهای گلدستون مسئله در زمانی است که تصحیحات کوانتومی برای محاسبه انتشارگر در نظر گرفته می‌شوند.

✓ البته فرضهای زیادی اینجا شده بود، از جمله در نوع تقارنی که در نظر گرفته شده بود و در نهایت اینکه $\langle X \rangle_0 = const$ فرض شده بود و این در صورتی است که خلاء تحت انتقال ناوردا باشد. (با وجود این نتیجه مهمی بود)

Weinberg - Volume II
pp. 168

• البته سؤال دیگری که مطرح است این است که ذره گلدستون یک ذره ترکیبی است یا خیر

composite

مثلاً پایون ذره گلدستون شکست خودبخود تقارن کایرال است

و می‌دانیم که پایون مزون است که از یک کوارک و یک آنتی کوارک تشکیل شده (حالت مقیدی از یک کوارک و یک آنتی کوارک)

ذرات گلدستون لزوماً ترکیبی نیستند. در مکانیزم هیگز با هیگز مدل استاندارد آشنا می‌شویم. می‌بینیم که در ابتدا می‌توان از آن تعبیر گلدستون نمود.

• برای بحث در مورد ترکیبی بودن یا نبودن ذره گلدستون، اثبات کلی کتاب Weinberg بخش ۱۹

✓ برای یادگیری آن باید ۲ مبحث را مرور کنیم

(1) Current Algebra

(2) Källen - Lehmann representation