

سه اجلا دی کسات در حلقه (سوی ۱۴۶) :

$$L = L_0 + L_{int}$$

$$L_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 -$$

$$L_{int} = - \frac{\lambda \varphi^4}{4!}$$

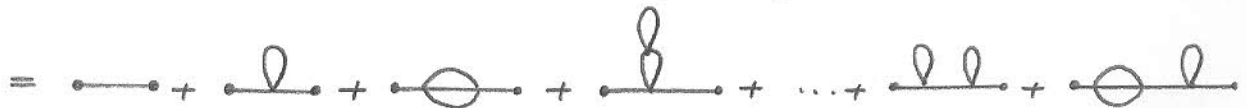
$$S_{int} = \int L_{int} d^4x = - \frac{\lambda}{4!} \int \varphi^4(x) d^4x$$

سه اجلا

two point correlation function

تابع دقتی

$$\langle \Omega | T(\varphi(x)\varphi(y)) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y) e^{iS_{int}}) | 0 \rangle}{\langle 0 | T(e^{iS_{int}}) | 0 \rangle}$$



Diagramatics

a) Loop expansion:

سوال: بجز این از این تعداد حلقه ها مستقل در نمودارها نوشته (connected) چه سبب در حساب توان \hbar تعداد حلقه ها مستقل: تعداد این حلقه ها مستقل در نمودارها هستند با تعداد حلقه ها ناقص که می باید در آن اندک است * حلقه ها ناقص: برای بعضی حلقه ها ناقص باید از تلف یا بستگی انرژی - حلقه در هر گره (رأس) استفاده کرد

For a connected diagram:

$$I = \# \text{ of internal lines}$$

$$V = \# \text{ of vertices}$$

$$\# \text{ of } \delta^4 \text{-functions for energy-momentum conservation} = V$$

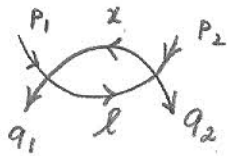
تعداد گره ها (رأس)

بدر از اینکه δ^4 ها را باید $\delta^4(\sum p_{in} - \sum p_{out})$ برر شدیم، در $V-1$ تعداد برای بعضی حلقه ها باقی ماند

$$\rightarrow \# \text{ of independent loop momenta} \equiv \# \text{ of loop} \equiv L$$

$$L = I - (V - 1)$$

تعداد حلقه ها (تعداد خطوط داخلی) (به ازای $V-1$ حلقه ها در آن اندک نیستند)



(1) $p_1 + x - l - q_1 = 0 \quad x = l + q_1 - p_1$ شکل:

(2) $p_2 - x - q + l = 0 \quad x = l - q_2 + p_2$

$l - q_2 + p_2 = l + q_1 - p_1$

$\rightarrow p_1 + p_2 = q_1 + q_2 \Rightarrow \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$
 $= \delta^4(\sum P_{in} - \sum P_{out})$

$V - 1 = 2 - 1 = 1$
 تعداد رئوس

$L = I - (V - 1) = 2 - (1) = 1$ تعداد تغییرات مستقل

$L = 1$ این نمودار یک حلقه است.

ادعا: برای نمودارهای به این ترتیب رانج برده ایم، تعداد $L - 1$ است با توان \hbar برای آن نمودار \hookrightarrow تعداد حلقه ها

توان \hbar را احتساب کنیم:

Equal-Time Commutation Relations

$[\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] \approx i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$

\rightarrow هر انتگرال (internal and external lines) $\rightarrow \hbar$

(b) در انتگرالی که برای لبه داخلی داریم، e^{iSint} or e^{-iSdt} Hint در واقع یک \hbar^{-1} در توان دارد

$e^{i\frac{Sint}{\hbar}}$ or $e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt Hint}$

به این ترتیب با انجام سبب اختلال در هر مره (رئیس) یک ضرب \hbar^{-1} داریم.

$E = \#$ of external lines

$I = \#$ of internal lines

$V = \#$ of vertices

Total power of $\hbar \Rightarrow$

$(E + I) - V \quad \textcircled{1}$

$L = I - (V - 1) \rightarrow I - V = L - 1$

$\textcircled{1} \rightarrow E + (I - V) = E + L - 1$

$\Rightarrow \hbar^{E + L - 1}$

\hbar^{L-1}

در نموداری که در نظر داریم به پاره‌های داخلی آن قطع نمی‌باشند ($E=0$)


نتیجه: به این ترتیب سبب اختلال در واقع سبب حساب توانی \hbar است.

ادعا: برای نمودارها $E=0$ است $\rightarrow V=L-1$ که در آن سبب در حساب است

$4V = E + 2I$
 تعداد خطوط در \rightarrow تعداد یایها خارج \rightarrow تعداد یایها
 (a) رابطه \rightarrow تعداد یایها
 هر یک از نمودارهای IPI

مثال

 $4 \times 2 = 4 + 2 \times 2 \quad \checkmark$

 $4 \times 3 = 4 + 2 \times 4 \quad \checkmark$

رابطه a را با رابطه دیگر در یک می کنیم

$L = I - V + 1 \quad \text{or} \quad I = L + V - 1$

$4V = E + 2(L + V - 1)$
 (a) $= E + 2L + 2V - 2$

$2V = E + 2L - 2 \quad \text{or} \quad V = \frac{E}{2} + (L - 1)$

for $E=0 \rightarrow V = (L - 1)$

\leftarrow آن در آن زمان $E=0$ باشد

البته تمام روسی را به بیایها خارج وصل می کنند
 و باید از شمارش V در این فرجه $(E=0)$ حذف کرد



$L = I - V + 1 = 4 - 3 + 1 = 2 \rightarrow 2\text{-loop diagram}$

ولی در رابطه $V = L - 1$

$1 = 2 - 1$

که فقط روسی در داخل نمودار است
 و بیایها وصل شده است در این شمارش
 در نظر گرفته شده است.

Loop-Calculation:

تعریف * نمودارهای IPI (one-particle irreducible)

انتگرال در فضای λ^4 (تا همبستگی ۲ نقطه ای)

$-iD_F(x-y) = \text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots + \text{---} + \text{---} + \dots$
 $= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$
 که در آن نمودارهای IPI هستند

این امر حاصل در QED: (در باب اهمیت نمودارهای IPI)

a) Fermion propagator (full):

$$-iS_F'(x-y) = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots + \text{---} + \dots$$

$$-iS_F' = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

IPI diagrams (Fermion Self-Energy)

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

اینها همه نمودارهای IPI هستند در یک حلقه، دو حلقه، سه حلقه، و غیره

لصورت کلی

این امر از فرمولی

$$-iS_F^{(0)}(p) = \frac{1}{\not{p} - m}$$

این امر حاصل فرمولی

$$-iS_F'(p) = \frac{1}{\not{p} - m + \Sigma(p)}$$

IPI

$$(-iS_F'(p))^{-1} = -iS_F^{(0)}(p) + (-iS_F^{(0)}(p))(-i\Sigma(p))(-iS_F^{(0)}(p)) + \dots$$

$$= -iS_F^{(0)}(p) \left\{ 1 + (-i\Sigma(p))(-iS_F^{(0)}(p)) + (-i\Sigma(p))(-iS_F^{(0)}(p))(-i\Sigma(p))(-iS_F^{(0)}(p)) + \dots \right\}$$

یگرچه

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$-iS_F'(p) = -iS_F^{(0)}(p) \frac{1}{1 - (-i\Sigma(p))(-iS_F^{(0)}(p))}$$

$$\begin{aligned} (-iS_F'(p))^{-1} &= (-iS_F^{(0)}(p))^{-1} (1 + \Sigma(p) S_F^{(0)}(p)) \\ &= (-iS_F^{(0)}(p))^{-1} + \Sigma(p) \\ &= \not{p} - m + \Sigma(p) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{-iS_F'(p) = \frac{1}{\not{p} - m + \Sigma(p)}}$$

6) Photon propagator (full)

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}' = \text{PI diagrams} = \text{wavy line} + \text{wavy line with bubble} + \text{wavy line with two bubbles} + \dots$$

(Photon Self-Energy \leftrightarrow Vacuum polarization)

$$i\Pi_{\mu\nu} = \text{bubble diagram} = \text{wavy line with bubble} + \text{wavy line with two bubbles} + \dots$$

سوال: $i\mathcal{D}_{\mu\nu}'(k) = ?$

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \quad \text{for } \xi = 1 \quad \frac{1}{k^2} (g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) = i\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(0)}$$

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}'(k) = i\mathcal{D}_{\mu\alpha}^{(0)}(k) + (i\mathcal{D}_{\mu\alpha}^{(0)}(k)) (i\Pi^{\alpha\beta}(k)) (i\mathcal{D}_{\beta\nu}^{(0)}(k)) + \dots$$

$$= \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{g_{\mu\alpha}}{k^2} (i\Pi^{\alpha\beta}(k)) \frac{g_{\beta\nu}}{k^2} + \dots$$

QED: Ward identity $i\Pi^{\alpha\beta}(k) = (-k^2 g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta) (i\Pi(k^2))$

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}'(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{g_{\mu\alpha}}{k^2} (-k^2 g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta) (i\Pi) \frac{g_{\beta\nu}}{k^2} + \frac{g_{\mu\alpha}}{k^2} (-k^2 g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta) (i\Pi) \frac{g_{\beta\rho}}{k^2} (-k^2 g^{\rho\sigma} + k^\rho k^\sigma) (i\Pi) \frac{g_{\sigma\nu}}{k^2} + \dots$$

a) $g_{\mu\alpha} (-k^2 g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta) g_{\beta\nu} = (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)$

b) $g_{\mu\alpha} (-k^2 g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta) g_{\beta\rho} (-k^2 g^{\rho\sigma} + k^\rho k^\sigma) g_{\sigma\nu} =$
 $= (-k^2 g_{\mu}{}^\beta + k_\mu k^\beta) (-k^2 g_{\beta\nu} + k_\beta k_\nu)$
 $= ((-k^2)^2 g_{\mu\nu} - k^2 k_\mu k_\nu - k^2 k_\mu k_\nu + k^2 k_\mu k_\nu)$
 $= (-k^2) (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)$

پس این ترتیب: $i\mathcal{D}_{\mu\nu}'(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) \frac{(i\Pi(k^2))}{(k^2)^2} + \frac{(-k^2)}{(k^2)^3} (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) (i\Pi(k^2))^2 + \dots$

$$= \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} - \frac{g_{\mu\nu} (i\Pi(k^2))}{k^2} + \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} (i\Pi(k^2))^2 + \dots$$

+ gauge fixing terms $\sim \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$

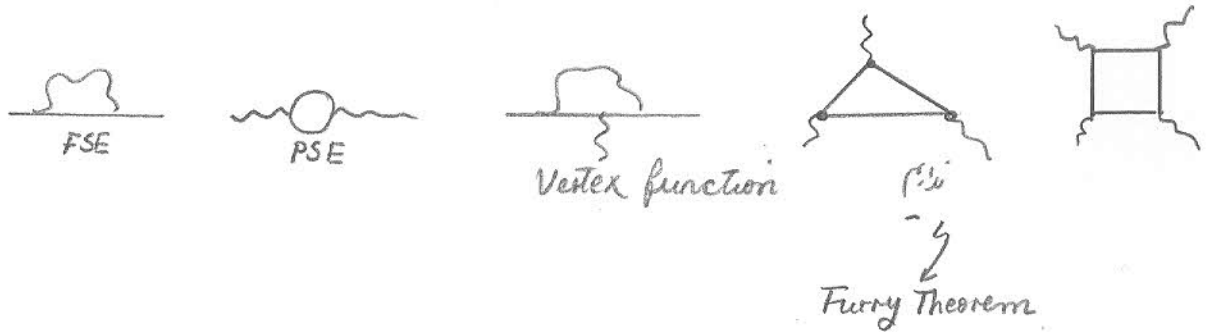
$$= \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} (1 - i\Pi(k^2) + (i\Pi(k^2))^2 + \dots) + \dots$$

$$= \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 (1 + i\Pi(k^2))}$$

$$i\mathcal{D}'_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2(1+i\Pi(k^2))}, \quad iS'_F(p) = \frac{1}{\not{p}-m+\Sigma(p)}$$

\downarrow \downarrow
 $\Lambda\Pi$ Photon Self-Energy (PSE) $\Lambda\Pi$ Fermion Self-Energy (FSE)

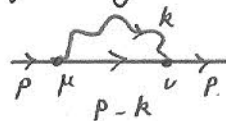
• Primitive diagrams of QED (1-loop correction)



• Loop-diagrams

a) Degree of divergence (power counting)

۱ مثال



$$= -i \Sigma_{\alpha\beta}(p)$$

$$= -(-ig)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\not{p}-\not{k}-m} \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \right) \gamma_\nu \right)_{\alpha\beta}$$

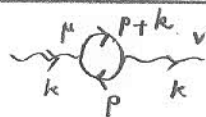
$$-i \Sigma(p) = ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\gamma^\mu \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m} \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \right)$$

Power counting: $\sim \int \frac{k^3 dk d\Omega_k}{k^3} \sim \int dk \sim k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$

این نمودار در UV (UV) (k → ∞) لهجرت درجه دار است.

Degree of divergence = D = 1

۲ مثال



$$\sim g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{i}{\not{p}-m} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}+\not{k}-m} \right)$$

Power counting

$$\sim \int \frac{p^3 dp_3}{p^2} \sim \int p dp \sim p^2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty$$

این نمودار در UV (UV) (p → ∞) لهجرت درجه دار است.

Degree of divergence = D = 2

$$\frac{\mu_0}{\lambda^0} \quad \text{[Diagram: tadpole with curly line]} \sim \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (l')^2} \sim \int \frac{l^3 dl}{l^4} \sim \int \frac{dl}{l} \rightarrow \ln l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$$

انتگرال روی UV ($l \rightarrow \infty$) بصورت گسسته در می آید.

Degree of divergence = $D = 0$

می خواهیم ببینیم که در چه دایره‌ای را برای نمودارهای مختلف مقسوم کنیم

$\lambda\phi^4$ -theory: $\text{[Diagram: tadpole with loop]} \sim \int \frac{d^4 q}{q^2} \sim \int \frac{q^3 dq}{q^2} \sim \int q dq = q^2 \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \infty$ $D = 2$

$\text{[Diagram: bubble]} \sim \int \frac{d^4 q}{(q^2)^2} \sim \int \frac{q^3 dq}{q^4} \sim \int \frac{dq}{q} \sim \ln q \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \infty$ $D = 0$

Power Counting in $\lambda\phi^4$ -theory: (Superficial degree of divergence)

- $V = \#$ of vertices
- $I = \#$ of internal lines
- $E = \#$ of external lines
- $L = \#$ of loops (# of independent integration momenta)
- $d = \#$ dimension of space-time

$D = dL - 2I$ (خطوط داخلی) تعداد آنها را \rightarrow $d^d q$ \rightarrow توان q در انتگرال \rightarrow تعداد متغیرهای مستقل \rightarrow \leftarrow درجه دایره‌ای یا جبرانی

$L = I - (V - 1)$ (۶)

تعداد متغیرهای باقیمانده از قیدگی $\delta^4(\sum p_{in} - \sum p_{out})$ نسبت داده می شوند

$4V = E + 2I$ (c)

• به جز I از در رابطه (b) و (c) خواهیم داشت:

$D = d - \frac{E}{2} (d-2) + V(d-4)$ in $\lambda\phi^4$ -theory