پراکندگی :

• کمیتهایی که می‌توانند پراکندگی را کمی کنند

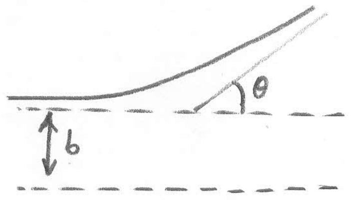
θ زاویه پراکندگی

پارامتر برخورد $b = b(\theta) \rightsquigarrow \theta = \theta(b)$

از مکانیک کلاسیک می‌دانیم

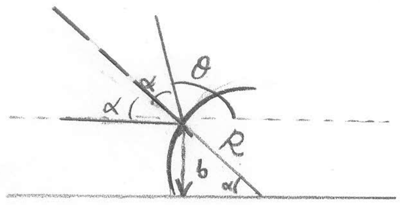
$$d\sigma = d\Omega \; D(\theta)$$

سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی ← $d\sigma$ ، زاویه فضائی ← $d\Omega$



$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin\theta} \; \frac{db}{d\theta} \right|$$

• در برخورد با یک کره سخت :



$$b = R \sin\alpha$$

$$\theta + 2\alpha = \pi \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$b = R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$D(\theta) = \left| \frac{R\cos\frac{\theta}{2}}{\underbrace{\sin\theta}_{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}} (-) \frac{R}{2} \sin\frac{\theta}{2} \right| = \frac{R^2}{4} = \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

total cross section $\longrightarrow \sigma = \int d\Omega \, D(\theta) = \frac{R^2}{4} 4\pi = \pi R^2$

پراکندگی رادرفورد :

در این پراکندگی $b = \frac{q_1 q_2}{2E} \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$ که در آن q_1 , q_2 بار الکتریکی ذرات فرودی و هدف هستند و E انرژی جنبشی ذره فرودی

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = D(\theta) = \left(\frac{q_1 q_2}{4E} \; \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^2 \longrightarrow \sigma = \int d\Omega \, D(\theta)$$

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{q_1 q_2}{4E} \right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \longrightarrow \infty$$

✓ ∞ شدن سطح مقطع پراکندگی کل در پراکندگی رادرفورد مربوط به این می‌شود که برد نیروی الکترومغناطیسی که موجب این برخورد می‌شود ∞ بزرگ است.

قانون طلائی فرمی — The Golden Rule

• برای محاسبه سطح مقطع پراکندگی به دو سری اطلاعات نیاز داریم:

(a) اطلاعات دینامیکی ⟵ دامنه پراکندگی

(b) اطلاعات سینماتیکی ⟵ در فضای فاز (تکانه ـ مکان) این اطلاعات را بدست میاوریم و وارد میکنیم.

→ The Golden Rule →

$$\boxed{\text{نرخ گذار} = |\mathcal{M}|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \times \text{phase space}}$$

منظور از phase space همه نوع اطلاعات سینماتیکی است که مربوط به انرژی جرم ـ تکانه ذراتی میشود که در برخورد سهم دارند

✓ ممکن است یک فرایند اصولاً به دلایل سینماتیکی امکان وقوع نداشته باشد (مثلاً یک ذره سنگین احتمال بیشتری برای فروپاشی دارد ...)

Golden Rule for decay:

$$dN(t) = \Gamma\,(-N(t)\,dt)$$

نرخ فروپاشی (واپاشی) $\Gamma = \frac{-1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} \rightarrow N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$

✓ N_0 ثابت انتگرال گیری و مساوی تعداد اولیه ذراتی است که فروپاشی باشند در لحظه $t=0$

✓ $N(t)$ تعداد ذرات باقی مانده در لحظه t

✓ طول عمر ⟵ عکس نرخ واپاشی $\tau = \frac{1}{\Gamma}$

در مورد واپاشی ممکن است شاخه های مختلفی برای فروپاشی وجود داشته باشد

$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ $\qquad$ $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu + \gamma$

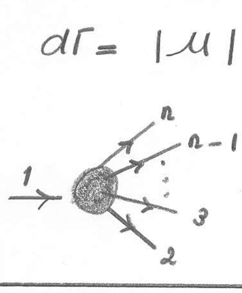
$\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ $\qquad$ $\pi^+ \to e^+ + \nu_e + \pi^0$

Branching ratio: $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}}$ & $\Gamma_{tot} = \frac{1}{\tau}$

اصل طلائی فروپاشی: $1 \to 2 + 3 + \dots + n$

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left(\frac{c\,d^3p_2}{(2\pi)^3\, 2E_2}\right) \cdots \left(\frac{c\,d^3p_n}{(2\pi)^3\, 2E_n}\right)$$

$$\times\ (2\pi)^4 \delta^4\left(p_1 - \sum_{f=2}^{n} p_f\right)$$



$p_i^\mu = \left(\frac{E_i}{c}, \vec{p}_i\right)$, $m_1 =$ جرم ذره ای که فروپاشی باشد

نکته ۱: همه ذرات $1, \dots, n$ ذرات فیزیکی (on mass-shell) هستند؛ در نتیجه انرژی-تکانه آنها در رابطه $E_i^2 = \vec{p}_i^{\,2} c^2 + m_i^2 c^4$ صدق می‌کند.

نکته ۲: تابع دلتای دیراک $(2\pi)^4 \delta^4 (p_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i)$ پایستگی انرژی-تکانه است

$$p_1^\mu = p_2^\mu + \dots + p_n^\mu$$

نکته ۳: در رابطه بالا فرض کرده‌ایم که ذره ۱ در حال سکون بوده و به این ترتیب انرژی آن فقط شامل انرژی حالت سکون بوده است.

$$E_1 = m_1 c^2$$

$$p_1^\mu = (m_1 c, \vec{0})$$

نکته ۴: S یک ضریب آماری است. فرض کنید j ذره مشابه در حالت نهایی بوجود آمده‌اند. در آن صورت $S = \frac{1}{j!}$ است.

نکته ۵: عبارت $\frac{c\, d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$ نشان می‌دهد که ذره iام بعد از فروپاشی تکانه‌ای معادل $\vec{p}_i$ تا $\vec{p}_i + d\vec{p}_i$ دارد (تکانه‌اش در بازه بین است)

← ما نمی‌خواهیم تکانه تک تک ذرات را بعد از فروپاشی بدست بیاوریم. از این رو روی همه تکانه‌های ذرات نهایی جمع می‌بندیم (انتگرال می‌گیریم). ← به این ترتیب به نرخ فروپاشی کل می‌رسیم:

$1 \to 2+3$

$$\boxed{\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^4 (p_1 - p_2 - p_3)\, d^3p_2\, d^3p_3}$$

$\mathcal{M} = \mathcal{M}(p_2, p_3)$ دامنه پراکندگی است.

مثال: فروپاشی $\pi^0 \to 2\gamma$ (فوتون‌ها بدون جرم هستند)

$$E_2 = |\vec{p}_2| c$$

$$E_3 = |\vec{p}_3| c$$

$$\delta^4 (p_1 - p_2 - p_3) = \delta (p_1^0 - p_2^0 - p_3^0)\ \delta^3 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)$$

$$= \delta \left(m_1 c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} \right) \delta^3 (0 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)$$

انرژی حالت سکون π^0 — فرض کرده‌ایم که $\vec{p}_1 = \vec{0}$

اولاً: از رابطه $\delta^3(-\vec{p}_2 - \vec{p}_3)$ داریم $\vec{p}_2 = -\vec{p}_3 \leftarrow |\vec{p}_2| = |\vec{p}_3|$

$$\delta \left(m_1 c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} \right) = \delta (m_1 c - |\vec{p}_2| - |\vec{p}_3|) = \delta (m_1 c - 2|\vec{p}_2|)$$

$\vec{p}_3 = -\vec{p}_2$

$|\vec{p}_3| = |-\vec{p}_2|$

$$\rightarrow \delta \left(m_1 c - \frac{E_2}{c} - \frac{E_3}{c} \right) \delta^3 (-\vec{p}_2 - \vec{p}_3) = \delta (m_1 c - 2|\vec{p}_2|)\ \delta (\vec{p}_2 + \vec{p}_3)$$

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1}\left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \times \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{p}_2||\vec{p}_3|}\,\delta(m_1 c - 2|\vec{p}_2|)\,\delta(\vec{p}_2+\vec{p}_3)\,d^3p_2\,d^3p_3$$

$$= \frac{S}{2\hbar m_1}\left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \int \frac{|\mathcal{M}|^2_{\vec{p}_2=-\vec{p}_3}}{|\vec{p}_2|^2}\,\delta(m_1 c - 2|\vec{p}_2|)\,d^3p_2$$

$$\int d^3p_2 = \int p_2^2\,dp_2\,d\Omega_3 = 4\pi\int p_2^2\,dp_2$$

$$\int d\Omega_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) = 2\pi\times 2 = 4\pi$$

$$d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

$$\Gamma = \frac{Sc^2}{2\hbar m_1(4\pi)^2}\,4\pi\,\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cancel{p_2^2}\,dp_2}{\cancel{p_2^2}}\,|\mathcal{M}(\vec{p}_2,\vec{p}_3=-\vec{p}_2)|^2\,\delta\left(p_2-\frac{m_1c}{2}\right)$$

از تابع δ میاید

$p_2 = |\vec{p}_2|$

$$\boxed{\Gamma = \frac{Sc^2}{16\pi\hbar m_1}\,\left|\mathcal{M}\left(|\vec{p}_2| = \frac{m_1c}{2},\ \vec{p}_3=-\vec{p}_2\right)\right|^2}$$

نکته مهم: برای انتگرال‌گیری روی زاویه $d\Omega_3 = d\varphi\, d(\cos\theta)$ فرض شده است که $\mathcal{M}$ بستگی به θ و φ ندارد. در غیر اینصورت انتگرال‌گیری روی θ و φ را نمی‌توانستیم براحتی انجام دهیم.

✓ در مورد ضریب تقارن: $a \to 2b + 3c \qquad S = \frac{1}{2!}\frac{1}{3!}$

✓ در مورد

$$\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4}\,2\pi\,\theta(p_i^0)\,\delta(\underbrace{p_i^2 - m_i^2}_{\text{on mass shell}}) \overset{!}{=} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3\,2E_i}$$

شرط داشتن انرژی مثبت

شرط on mass shell بودن

$p_0 = \frac{E}{c}$

$c = 1$

$$= \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\,dp_i^{(0)}\,\theta(p_i^{(0)})\,\delta\left((p_i^{(0)})^2 - E_i^2\right) \quad \text{with } E_i = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2}$$

$$= \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\,dp_i^{(0)}\left[\frac{\delta(p_i^{(0)}-E_i)}{2E_i} + \cancel{\frac{\delta(p_i^{(0)}+E_i)}{|2p_i^{(0)}|}\Bigg|_{p_i^0=-E_i}}\right]$$

این جمله صفر می‌شود زیرا $p_i^{(0)}$ باید همواره مثبت باشد.

$$= \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_i}$$

a4/

ذرات بنیادی مقدماتی صفحه ۷۰

در اینجا استفاده شده است از

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x-a)}{|2x|\big|_{x=a}}+\frac{\delta(x+a)}{|2x|\big|_{x=-a}}$$

$$\delta(f(x))=\frac{\delta(x-x_i)}{\sum_i \left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}}$$

مثال ۲ اگر فرض کنیم که ذره (1) به دو ذره (2) و (3) با جرم‌های m_2 و m_3 فروپاشد، رابطه مربوط برای Γ چیست؟ (در اینجا فرض می‌کنیم که $\mathcal{M}$ به θ, φ بستگی ندارد)

در مثال قبلی $\pi^0 \to 2\gamma$ فوتون‌ها جرم نداشتند.

$$m_1 \to m_2+m_3$$

$$\Gamma=\frac{Sc^2}{32\pi^2\hbar m_1}\int d^3p_2\, d^3p_3\, |\mathcal{M}|^2\, \frac{\delta^4(p_1-p_2-p_3)}{E_2E_3}$$

$$\delta^4(p_1-p_2-p_3)=\delta(p_1^{(0)}-p_2^{(0)}-p_3^{(0)})\,\delta^3(\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)$$

$\vec{p}_1=\vec{0}$ فرض: ذره اول در حال سکون

$$p_1^{(0)}=m_1c=\frac{E_1}{c}=\frac{m_1c^2}{c} \checkmark$$

$$p_2^{(0)}=\frac{E_2}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}c^2+m_2^2c^4}=\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2c^2}$$

به همین ترتیب $p_3^{(0)}=\frac{E_3}{c}=\sqrt{\vec{p}_3^{\,2}+m_3^2c^2}$

$$\Gamma=\frac{S\cancel{c^2}}{32\pi^2\hbar m_1}\int d^3p_2\, d^3p_3\, \delta^3(\vec{p}_2+\vec{p}_3)\,|\mathcal{M}|^2$$

$$\times\frac{\delta\left(m_1c-\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2c^2}-\sqrt{\vec{p}_3^{\,2}+m_3^2c^2}\right)}{\cancel{c^2}\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2c^2}\,\sqrt{\vec{p}_3^{\,2}+m_3^2c^2}}$$

انتگرال‌گیری روی d^3p_3

$$\overset{\checkmark}{=}\frac{S}{32\pi^2\hbar m_1}\int d^3p_2\,\frac{\delta\left(m_1c-\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2c^2}-\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_3^2c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2c^2}\,\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_3^2c^2}}\,|\mathcal{M}(\vec{p}_2)|$$

$$d^3p_2=p_2^2\,dp_2\,d\Omega_3=4\pi\, p_2^2\,dp_2$$

$$\Gamma=\frac{S}{8\pi\hbar m_1}\int_0^\infty p_2^2\,dp_2\,|\mathcal{M}(\vec{p}_2)|^2\,\frac{\delta(m_1c-u_2-u_3)}{u_2u_3}$$

$$u_2\equiv\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2c^2}$$

$$u_3\equiv\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_3^2c^2}$$

Def: $u\equiv u_2+u_3$

$$f(p_2) = u_2 + u_3 \equiv u$$

$$\frac{du}{dp_2} = \frac{p_2}{u_2} + \frac{p_3}{u_3} = \frac{p_2(u_2+u_3)}{u_2 u_3} = \frac{u\, p_2}{u_2 u_3}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dp_2\ p_2}{u_2 u_3} \longrightarrow p_2\, dp_2 = u_2 u_3 \frac{du}{u} \quad ; \quad p_2 \equiv |\vec{p}_2|$$

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int_{(m_2+m_3)c}^{\infty} \frac{du}{u}\ p_2\ \cancel{u_2 u_3}\ |\mathcal{M}(p_2)|^2\ \frac{\delta(m_1 c - u)}{\cancel{u_2 u_3}}$$

$$p_2 = 0 \rightarrow \quad u = (m_2 + m_3)c$$

$$u = m_1 c = u_2 + u_3 = \sqrt{\vec{\tilde{p}}_2^{\,2} + m_2^2 c^2} + \sqrt{\vec{\tilde{p}}_2^{\,2} + m_3^2 c^2} \longrightarrow \vec{\tilde{p}}_2^{\,2} = ?$$

$$\delta(m_1 c - u)$$

این معادله را حل می‌کنیم و $\tilde{p}_2 = |\vec{\tilde{p}}_2|$ را بدست می‌آوریم

$$\tilde{p}_2 = \frac{c}{2m_1}\sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}$$

نتیجه

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \frac{1}{m_1 c}\ \tilde{p}_2\ |\mathcal{M}(\tilde{p}_2)|^2$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1^2 c}\ \tilde{p}_2\ |\mathcal{M}(\tilde{p}_2)|^2}$$

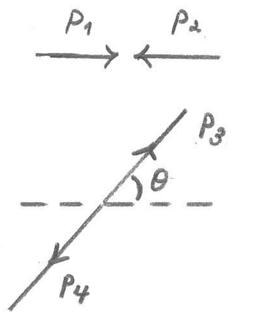
که مقدار $\tilde{p}_2$ را قبلاً برحسب m_1، m_2 و m_3 محاسبه کرده‌ایم.

Golden Rules for scattering: $\quad 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$

$$d\sigma = \frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n)$$

$$\prod_{j=3}^{n} \underbrace{(2\pi)\,\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2)\,\theta(p_j^{(0)})\,\frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}}_{\frac{c\, d^3 p_j}{(2\pi)^3\, 2E_j}}$$

مثال: پراکندگی دو ذره در دستگاه مرکز جرم:



قبل از برخورد

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{O}$$

$$P_1 \cdot P_2 = P_1^{\mu} P_{2\mu} = P_1^{(0)} P_2^{(0)} - \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2$$

$$= \frac{E_1 E_2}{c^2} + \vec{P}_1^{\,2} \quad (1)$$

$$\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} \qquad (3)$$ پس در رابطه

use :
$$\left.\begin{aligned} m_1^2 c^2 &= \frac{E_1^2}{c^2} - \vec{P}_1^{\,2} \\ m_2^2 c^2 &= \frac{E_2^2}{c^2} - \vec{P}_2^{\,2} \end{aligned}\right\} (2)$$

$$(1) \,\&\, (2) \text{ into } (3) \longrightarrow \sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} = \frac{(E_1+E_2)}{c} |\vec{P}_1|$$

$$d\sigma = \frac{s\hbar^2}{4\,\frac{(E_1+E_2)}{c}\,|\vec{P}_1|} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underset{\sim\sim}{P_1+P_2} - P_3 - P_4)$$

$$\times \frac{c\, d^3p_3}{(2\pi)^3\, 2E_3} \frac{c\, d^3p_4}{(2\pi)^3\, 2E_4}$$

$$\boxed{d\sigma = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{cs\ |\mathcal{M}|^2}{(E_1+E_2)\,|\vec{P}_1|} \frac{d^3p_3\ d^3p_4}{E_3 E_4} \delta^3(\vec{P}_3+\vec{P}_4)\, \overbrace{\delta\left(\frac{1}{c}(E_1+E_2-E_3-E_4)\right)}^{=P_1^0+P_2^0-P_3^0-P_4^0}}$$

$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{O}$ در دستگاه مرکز جرم

← در قدم بعدی انتگرال گیری روی d^3p_4 را انجام می‌دهیم.

$$\to \vec{P}_3 + \vec{P}_4 = \vec{O} \ \to\ \vec{P}_3 = -\vec{P}_4$$

$$\vec{P}_2 = -\vec{P}_1$$

$$\frac{E_1}{c} = \sqrt{\vec{P}_1^{\,2} + m_1^2 c^2} \qquad \frac{E_2}{c} = \sqrt{\vec{P}_2^{\,2} + m_2^2 c^2} = \sqrt{\vec{P}_1^{\,2} + m_2^2 c^2}$$

$$\frac{E_3}{c} = \sqrt{P_3^2 + m_3^2 c^2} \qquad \frac{E_4}{c} = \sqrt{\vec{P}_4^{\,2} + m_4^2 c^2} = \sqrt{\vec{P}_3^{\,2} + m_4^2 c^2}$$

$$-\vec{P}_3 = \vec{P}_4$$

← حال می‌توان انتگرال گیری روی d^3p_3 را انجام داد:

$$d^3P_3 = d\Omega_3\ P_3^2\, dP_3$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{cs}{(E_1+E_2)} \frac{1}{|\vec{P}_1|}$$

$$\times \int P_3^2\, dP_3\, |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{E_3 E_4} \delta\left(\frac{E_1+E_2}{c} - \sqrt{\vec{P}_3^{\,2} + m_3^2 c^2} - \sqrt{\vec{P}_3^{\,2} + m_4^2 c^2}\right)$$

$$= \star$$

همانطور که قبلاً داشتیم:

$$\star = \int dp_3\, p_3^2\, |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta\left(\frac{E_1+E_2}{c} - u_2 - u_3\right)}{c^2\, u_2 u_3}$$

$$u_2 \equiv \sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2 c^2} \qquad u_3 \equiv \sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_4^2 c^2} \qquad u_2 + u_3 \equiv u$$

قبلاً دیدیم $\dfrac{du}{u} = \dfrac{p_3\, dp_3}{u_2 u_3}$

$$\star = \int_{(m_3+m_4)c}^{\infty} \frac{du}{u}\, p_3\, |\mathcal{M}(p_3)|^2 \frac{\delta\left(\frac{E_1+E_2}{c} - u\right)}{c^2\, \cancel{u_2 u_3}}\, \cancel{u_2 u_3}$$

$$= \tilde{p}_3 \frac{1}{c^2\left(\frac{E_1+E_2}{c}\right)} |\mathcal{M}(\tilde{p}_3)|^2$$

$\tilde{p}_3$ از حل معادله $\dfrac{E_1+E_2}{c} - \sqrt{\tilde{\vec{p}}_3^{\,2} + m_3^2c^2} - \sqrt{\tilde{\vec{p}}_3^{\,2} + m_4^2 c^2} = 0$ بدست میاید

$$\tilde{p}_3 = \frac{1}{2(E_1+E_2)c} \sqrt{\left[(E_1+E_2)^2 - m_3^2c^4\right)^2 - 2c^4\left[(E_1+E_2)^2 - m_3^2c^4\right] + c^8 m_4^4}$$

$$\longrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{Sc}{(E_1+E_2)} \frac{\tilde{p}_3}{|\vec{p}_1|} \frac{1}{c(E_1+E_2)} |\mathcal{M}(\tilde{p}_3)|^2$$

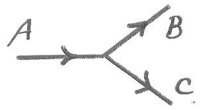
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S\, |\mathcal{M}(\tilde{p}_3)|^2}{(E_1+E_2)^2} \frac{\tilde{p}_3}{|\vec{p}_1|}}$$

ذرات بنیادی مقدماتی ـ صفحه ۷۸

محاسبه $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ و قوانین فاینمن برای مدل اسکالر $\lambda\phi^3$

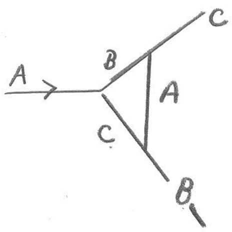
دنیایی را تصور کنید که در آن فقط ۳ نوع ذره A، B و C وجود دارند.
همه این ذرات از نظر بار الکتریکی خنثی هستند و اسپین همگی صفر است.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

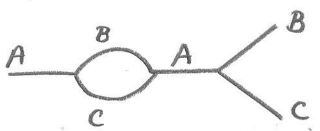


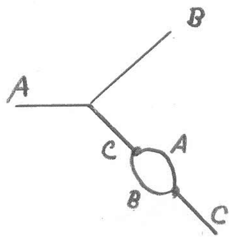
نوع برهمکنش از طریق این رأس نمایش داده می‌شود:

• اگر فرض کنیم که m_A از m_B و m_C بزرگتر است، نمودار مربوطه در ساده‌ترین حالت همین رأس خواهد بود:



✓ در مرتبه‌های بالای اختلال

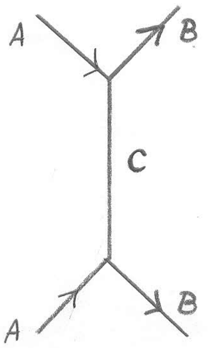




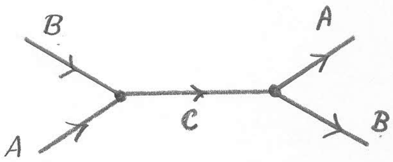
هدف از این بخش محاسبه طول عمر ذره A است. ما این کار را در پایین‌ترین مرتبه تصحیح کوانتومی (اختلالی) انجام می‌دهیم:

- بعد از آن به محاسبه دامنه پراکندگی $A+A \to B+B$ یا $A+B \to A+B$ و غیره می‌پردازیم.

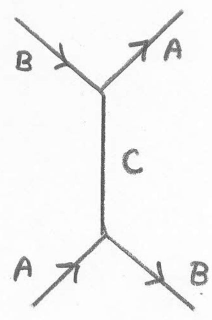
محور زمان



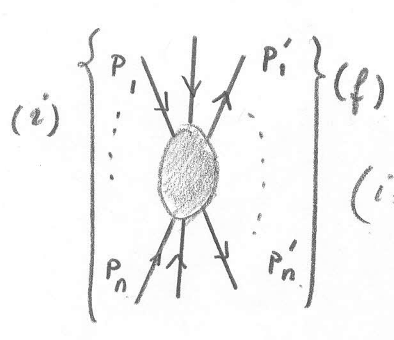
$A+A \to B+B$



$A+B \to A+B$



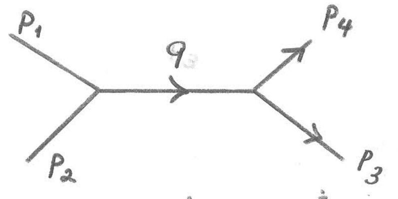
$A+B \to A+B$



اصول بدست آوردن دامنه ریاضی مربوط به نمودارهای فاینمن:

الف) در هر نمودار تعداد معینی تکانه (چاربردار تکانه و انرژی) ورودی و تعداد معینی تکانه خروجی وجود دارد. تکانه‌های ورودی را با p_i (i = initial) و تکانه‌های خروجی را با p_f (f = final) نشان می‌دهیم.

الف) اولین کاری که برای نوشتن عبارت ریاضی هر نمودار فاینمن باید انجام بدهیم این است که به تمام تکانه‌ها ورودی و تمام تکانه‌های خروجی نامی نسبت دهیم
به هر گره   به هر گره



ب) به هر گره یا رأس (به علت جمله برهمکنش $-\frac{\lambda\varphi^3}{3!}$) یک ضریب g ـ نسبت می‌دهیم (این قانون تا وقتی صحیح است که جمله برهمکنش شامل مشتق میدان‌ها نیست).

ج) به هر خط داخلی تکانه $q_1, \dots, q_n$ نسبت می‌دهیم، در ضمن به ازای هر خط یک انتشارگر می‌نویسیم:

کنش میدان آزاد $S_0 = -\frac{1}{2}\int d^4x \;\varphi(x)\,(\Box + m^2)\,\varphi(x)$

$= \frac{1}{2}\int d^4x\,(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2)$

انتشارگر $=$ وارون $(\Box + m^2)$ $= \frac{-i}{\Box + m^2}$

به ازای فضای فوریه $= \frac{-i}{-p^2+m^2} = \frac{i}{p^2-m^2} = \tilde{G}(p)$

عبارت مربوط به هر انتشارگر با تکانه q_j ($j=1,\dots$) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2c^2}$$

جرم ذره jام.

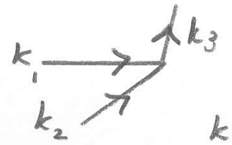
نکته مهم: اگر ذره مورد نظر ما فیزیکی بود $q_j^2 = m_j^2c^2$، پس در انتشارگر $\frac{i}{0} \to \infty$ ظاهر می‌شود. ولی نکته اینجاست که ما برای ذرات واسطه انتشارگر می‌نویسیم و آنها مجازی هستند، یعنی on - mass - shell نیستند.

$$(\Box + m^2)\,G(x) = -i\delta^4(x)$$

$$(-q^2 + m^2)\,\tilde{G}(q) = -i \longrightarrow \tilde{G}(q) = \frac{-i}{-q^2+m^2}$$

پس انتشارگر تابع گرین عملگر $(\Box + m^2)$ است که از قسمت آزاد کنش S بدست می‌آید.

د) به ازای هر رأس باید رابطه پایستگی انرژی و تکانه را بنویسیم: (قرار دادی کنیم به ازای هر خط که به داخل رأس می‌رود علامت مثبت و به ازای هر خطی که از رأس بیرون می‌آید علامت منفی در نظر بگیریم):



$k_1 + k_2 - k_3 = 0$ or $\delta^4(k_1 + k_2 - k_3)\,(2\pi)^4$ به این ترتیب

را به رأس مورد نظر نسبت می‌دهیم.

قانون کلی: تکانه های ورودی به هر رأس با علامت مثبت و تکانه های خروجی را با علامت منفی لحاظ می کنیم:

$$(2\pi)^4\,\delta^4\Big(\underbrace{\sum_j p_j^{(i)}}_{\text{مجموع تکانه های ورودی}} - \underbrace{\sum_j p_j^{(f)}}_{\text{مجموع تکانه های خروجی}}\Big)$$

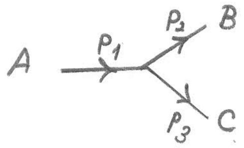
← پایستگی انرژی - تکانه در نقطه برهمکنش را به این ترتیب داریم

ه) به ازای هر خط داخلی با تکانه q_j یک انتگرال $\int \frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}$ می گذاریم

د) عبارت نهائی را در i ضرب می کنیم.

مثال: (a) محاسبه طول عمر ذره A در پایین ترین مرتبه اختلال

$$A(p_1) \to B(p_2) + C(p_3)$$



$$p_1 = p_2 + p_3$$

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2-p_3)\,\mathcal{M} = (-ig)\; i\,(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2-p_3)$$

$$\mathcal{M} = g$$

در صفحات قبل یک رابطه مشخص برای Γ بدست آورده بودیم

نرخ واپاشی $\Gamma = \left.\dfrac{|\mathcal{M}|^2\,|\vec{p}_A|}{8\pi\hbar\, m_A^2\, c}\right|_{\mathcal{M}=g}$ with $|\vec{p}_A| = \dfrac{c}{2m_A}\sqrt{X}$

$$X = m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi\hbar\, m_A^2 c}{g^2\,|\vec{p}_A|} \Rightarrow \quad [\tau] = s$$

$$[\hbar] = Js = \frac{kg\,m^2}{s^2}\,s = \frac{kg\,m^2}{s}$$

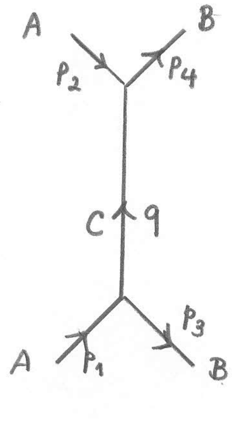
$$[g] = \frac{kg\,m}{s}$$ (بعد جرمی g در تئوری $g\phi^3$ مساوی 1 است)

$$[\vec{p}] = \frac{kg\,m}{s}$$

$$[c] = \frac{m}{s}$$

(b) پراکندگی

$$A + A \to B + B$$



$P_i = \{p_1, p_2\}$ $\quad P_f = \{p_3, p_4\}$

$(-ig)^2$ $\quad -ig$ ← به ازای هر رأس ضریب

$\dfrac{i}{q^2 - m_c^2 c^2}$ $\quad C$ ← انتشارگر ذره

به ازای هر گره پایستگی انرژی تکانه:

$$(2\pi)^4\delta^4(P_1-P_3-q)\ (2\pi)^4\ \delta^4(P_2+q-P_4)$$

انتگرال گیری روی q

$$\mathcal{M}_a\,(2\pi)^4\delta^4(P_1+P_2-P_3-P_4)=$$
$$=\frac{i(-ig)^2}{-ig^2}\,(2\pi)^8\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\delta^4(P_1-P_3-q)\,\delta^4(P_2+q-P_4)\,\frac{i}{q^2-m_c^2c^2}$$

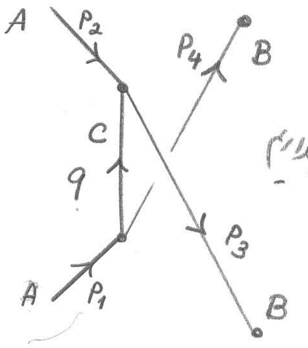
$$q=P_1-P_3=P_4-P_2$$

$$P_1+P_2=P_3+P_4$$

$$\mathcal{M}_a\,(2\pi)^4\delta^4(P_1+P_2-P_3-P_4)=(2\pi)^4\delta^4(P_1-P_3-P_4+P_2)\,\frac{g^2}{(P_1-P_3)^2-m_c^2c^2}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{\mathcal{M}_a=\frac{g^2}{(P_1-P_3)^2-m_c^2c^2}}$$

نکته: به علت یکسان بودن ذرات خروجی می‌توان و باید نمودار دیگری را برای برهمکنش $A+A\to B+B$ در نظر گرفت



اگر به روابط پایستگی تکانه در هر راس توجه کنیم، فرق اساسی بین این نمودار و نمودار قبلی اینکه بجای P_3 باید P_4 بگذاریم و بجای P_4 باید P_3 بگذاریم

(1) $\quad P_2+q-P_3=0 \qquad q=P_3-P_2$

(2) $\quad P_1-P_4-q=0 \qquad q=P_1-P_4$

$$\mathcal{M}_b=\frac{g^2}{(P_1-P_4)^2-m_c^2c^2}$$

$$\mathcal{M}_{\text{کل}}=\frac{g^2}{(P_1-P_3)^2-m_c^2c^2}+\frac{g^2}{(P_1-P_4)^2-m_c^2c^2}$$

اطلاعات سینماتیکی:

فرض می‌کنیم برخورد $A+A$ در دستگاه مرکز جرم دو ذره صورت گرفته است:

✓ در دستگاه مرکز جرم P_1-P_4 و P_1-P_3 را بدست می‌آوریم:

سؤال: تعیین $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM}$

→ center of mass

فرض: $m_A=m_B=m$

$m_c=0$ (ذره واسطه بدون جرم است)

$$m_A = m_B \equiv m$$

$$(P_1 - P_3)^2 = (P_4 - P_2)^2$$

$$P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 \cdot P_3 = m^2c^2 + m^2c^2 - 2P_1 \cdot P_3 = 2m^2c^2 - 2P_1 \cdot P_3$$

a) پایستگی تکانه

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0} = \vec{P}_3 + \vec{P}_4 & \\ \vec{P}_1 = -\vec{P}_2 & \vec{P}_3 = -\vec{P}_4 \end{array}\right\} \text{ⓐ}$$

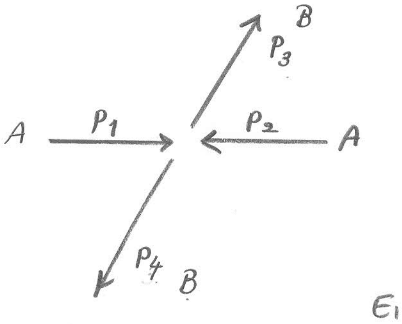
b) پایستگی انرژی

$$\left.\begin{array}{l} E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \\ E_1 = \sqrt{\vec{P}_1^2 c^2 + m^2c^4} = E_2 \\ E_3 = \sqrt{\vec{P}_3^2 c^2 + m^2c^4} = E_4 \end{array}\right\} \rightarrow 2E_1 = 2E_3 \longrightarrow E_1 = E_3$$

$$E_1 = E_3 \rightarrow \sqrt{\vec{P}_1^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{\vec{P}_3^2c^2 + m^2c^4} \Rightarrow$$

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}_3|$$

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}_3| \underset{\text{ⓐ}}{=} |\vec{P}_2| = |\vec{P}_4|$$



$$\measuredangle(\vec{P}_1, \vec{P}_3) = \theta = \measuredangle(\vec{P}_2, \vec{P}_4)$$

$$P_2 \cdot P_4 = P_2^0 P_4^0 - \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_4 =$$

$$= \frac{E_2 E_4}{c^2} - \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_4 =$$

$$= \frac{E_1 E_3}{c^2} - |\vec{P}_1||\vec{P}_3| \cos\theta =$$

$$\overset{E_1 = E_3}{=} \vec{P}_1^2 + m^2c^2 - \vec{P}_1^2 \cos\theta$$

$$P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4 = \vec{P}_1^2 (1 - \cos\theta) + m^2c^2$$

in $\mathcal{M}_a$ $\curvearrowright$ $(P_1 - P_3)^2 = P_1^2 + P_3^2 - 2P_1 \cdot P_3 =$

$$= \cancel{2m^2c^2} - 2\vec{P}_1^2(1 - \cos\theta) - \cancel{2m^2c^2} = -2\vec{P}_1^2(1 - \cos\theta)$$

پس $(\mathcal{M}_a)_{cM} = \dfrac{g^2}{(P_1 - P_3)^2 - m_c^2c^2} = \dfrac{g^2}{-2\vec{P}_1^2(1 - \cos\theta) - m_c^2c^2}$

$$(P_1 - P_4)^2 = P_1^2 + P_4^2 - 2P_1 \cdot P_4 \qquad \measuredangle(\vec{P}_1, \vec{P}_4) = \pi - \theta$$

$$= 2m^2c^2 - 2P_1^0 P_4^0 + 2\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_4$$

$$= 2m^2c^2 - 2\frac{E_1 E_4}{c^2} + 2|\vec{P}_1||\vec{P}_4| \overbrace{\cos(\pi - \theta)}^{-\cos\theta}$$

$$= \cancel{2m^2c^2} - \frac{2}{c^2}(\vec{P}_1^2c^2 + \cancel{m^2c^4}) - 2\vec{P}_1^2 \cos\theta$$

$$= -2\vec{P}_1(1 + \cos\theta)$$

$$(\mathcal{M}_b)_{cM} = \frac{g^2}{(P_1 - P_4)^2 - m_c^2c^2} = \frac{g^2}{-2\vec{P}_1^2(1 + \cos\theta) - m_c^2c^2}$$

$$(\mathcal{M})_{\text{کل}} \overset{m_C=0}{=} \frac{-g^2}{2\vec{p}_1^{\,2}(1-\cos\theta)} + \frac{g^2}{2\vec{p}_1^{\,2}(1+\cos\theta)} = \frac{-g^2}{\vec{p}_1^{\,2}\sin^2\theta}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1+E_2)^2}\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}$$

$S=\frac{1}{2}$ چون دو ذره مشابه هم دارد

$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| \equiv |\vec{p}|$ $\qquad$ $E_1+E_2 = 2E = 2\sqrt{\vec{p}_1^{\,2}c^2+m^2c^4}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2E)^2}\left(\frac{-g^2}{\vec{p}_1^{\,2}\sin^2\theta}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar c\, g^2}{16\pi E\sin^2\theta\,\vec{p}_1^{\,2}}\right)^2$$