تابع موج باریونی

$$\psi(\text{کل}) = \psi_1(\text{spin})\,\psi_2(\text{isospin})\,\underbrace{\psi_3(\text{space})}_{l=l'=0}\,\psi_4(\text{color})$$

متقارن

تابع موج اسپینی : ما سه ذره اسپین $\frac{1}{2}$ داریم . برای جمع اسپین ها

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}_a \qquad \vec{S}_{\text{کل}} = \vec{S}_3 + \vec{S}_a$$

$S_a = 0, 1$

$S_a = 0 \;\&\; S_3 = \frac{1}{2} \longrightarrow S = \frac{1}{2} \qquad m_S = \pm\frac{1}{2}$

$S_a = 1 \;\&\; S_3 = \frac{1}{2} \longrightarrow S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \qquad m_S = \pm\frac{1}{2}$ for $S = \frac{1}{2}$

$m_S = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ for $S = \frac{3}{2}$

$$\left.\begin{aligned}
|\tfrac{3}{2}, +\tfrac{3}{2}\rangle &= |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \\
|\tfrac{3}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle &= \left(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{3}} \\
|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\right) \\
|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle &= |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle
\end{aligned}\right\} \text{total symmetry} \equiv \psi_s$$

هر دو ذره ای را جابجا کنیم ساختار تابع موج اسپینی تغییر نمی کند

$$\left.\begin{aligned}
|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\
|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\downarrow = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)
\end{aligned}\right\} \text{Antisymmetry under } 1 \leftrightarrow 2 = \psi_{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\uparrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) \\
|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\downarrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)
\end{aligned}\right\} \text{Antisymmetry under } 2 \leftrightarrow 3 = \psi_{23}$$

- در مورد ψ_s تابع موج اسپینی کاملاً متقارن است و اسپین کل $S = \frac{3}{2}$ است (مانند Baryon Decuplet)
- در مورد ψ_{12} و ψ_{23} تابع موج اسپینی به ترتیب تحت $2 \leftrightarrow 1$ و $3 \leftrightarrow 2$ پادمتقارن است و اسپین کل $= \frac{1}{2}$

↳ Baryon Octet

در واقع دو دسته دیگر هم داریم که تابع موج تحت $3 \leftrightarrow 1$ پادمتقارن است و اسپین کل برابر $\frac{1}{2}$

$$\psi_{13} = \begin{cases}
|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \rightarrow |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle_{13} = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle_{12} + |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle_{23} \\
|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) \rightarrow |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_{13} = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_{12} + |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_{23}
\end{cases}$$

11/

پس حالت ψ_{13} را می‌توان از ترکیب خطی دو حالت $\psi_{23}+\psi_{12}$ بدست آورد. بدین ترتیب ψ_{13} مستقل
از ψ_{12} و ψ_{23} نیست.

در نظریه گروه به اصطلاح داریم $\quad 2\otimes 2\otimes 2 = 4+2+2$

$$\underbrace{4}_{\text{symmetric quartet}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{antisymmetric doublet} \\ 1\leftrightarrow 2}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{antisymmetric doublet} \\ 2\leftrightarrow 3}}$$

Direct product of 3 fundamental representation (i.e. 2 dim Representation) of SU(2) decomposes into the direct sum of a 4-dim representation and two 2-dim representation.

ψ_2 (isospin)

تابع موج طعم :

ما در اینجا خودمان را محدود می‌کنیم به سه نوع طعم (u,d,s) و به این ترتیب $3^3=27$
حالت ممکن برای ترکیب طعم‌ها وجود دارد که می‌توانند بصورت متقارن یا پادمتقارن

<u>strangeness</u> $\quad \psi_S$ (isospin) $\longrightarrow |I, I_3\rangle$ کاملاً متقارن تحت جابجائی همه طعم‌ها

	1)	$\vert \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = \vert ddd\rangle$	Δ^-
	2)	$\vert \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd)$	Δ^0
$S=0$	3)	$\vert \frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$	Δ^+
	4)	$\vert \frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle = \vert uuu\rangle$	Δ^{++}
	5)	$\vert 1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd)$	Σ^{*-}
$S=-1$	6)	$\vert 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(uds + sud + dsu + usd + sdu + dus)$	Σ^{*0}
	7)	$\vert 1, +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$	Σ^{*+}
	8)	$\vert \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$	Ξ^{-*}
$S=-2$	9)	$\vert \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$	Ξ^{+*}
$S=-3$	10)	$\vert 0, 0\rangle = \vert sss\rangle$	Ω^-

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{6}}(uds + sud + dsu - usd - sdu - dus)$$

کاملاً پادمتقارن تحت جابجائی هر دو طعم $\quad s\leftrightarrow u\leftrightarrow d$

$\psi_{12} \qquad |I, I_3\rangle$

پادمتقارن تحت $u \leftrightarrow d$, $S=0$:

$$(1)\quad |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = (ud - du)\frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$(2)\quad |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = (ud - du)\frac{u}{\sqrt{2}}$$

antisym تحت $u \leftrightarrow s$ و $d \leftrightarrow s$, $S=-1$:

$$(3)\quad |1, -1\rangle = (ds - sd)\frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$(4)\quad |1, 0\rangle = \frac{1}{2}\left((us - su)d + (ds - sd)u\right)$$

$$(5)\quad |1, +1\rangle = (us - su)\frac{u}{\sqrt{2}}$$

Antisym $d \leftrightarrow s$, $S=-2$:

$$(6)\quad |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = (ds - sd)\frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$(7)\quad |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = (us - su)\frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$(8)\quad \psi_a : \left(2(ud - du)s + (us - su)d - (ds - sd)u\right)\frac{1}{\sqrt{12}}$$

کاملاً پادمتقارن تحت $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 3$, $1 \leftrightarrow 2$

به همین ترتیب می‌توان ψ_{23} را ساخت. درضمن $\psi_{13} = \psi_{23} + \psi_{12}$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

- 10: decuplet, completely symmetric
- 8: Octet ψ_{12}
- 8: Octet ψ_{23}
- 1: Completely antisymmetric (Singlet)

تابع موج رنگ: سه رنگ کوارک r=red ، g=green ، b=blue را برای هر طعم کوارک در اختیار داریم.

لذا خواهیم دید که تنها حالت مجاز برای ترکیب رنگ‌ها حالت کاملاً پادمتقارن است (حالت singlet)

$$\psi_a(\text{color}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(rgb - rbg + brg - bgr + gbr - grb\right)$$

درضمن می‌دانیم که باریون رنگی در طبیعت نداریم.

خلاصه:

$\psi(\text{color}) = \text{singlet} \rightarrow$ کاملاً پادمتقارن

$\psi(\text{spin}) = \{\ 2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 + 2 + 2$

- 4: ψ_s متقارن
- 2: ψ_{12} پادمتقارن تحت $1 \leftrightarrow 2$
- 2: ψ_{23} پادمتقارن تحت $2 \leftrightarrow 3$

$\psi(\text{Isospin}) = \{\ 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 + 8 + 8 + 1$

- 10: متقارن
- 8: پادمتقارن تحت $1 \leftrightarrow 2$
- 8: پادمتقارن تحت $2 \leftrightarrow 3$
- 1: کاملاً پادمتقارن

از آنجائیکه باریونها هم فرمیون هستند پس تابع موج آنها باید کاملا پادمتقارن باشد تحت جابجائی هر یک از دو ذره سازنده

$$\psi_{\text{کل}} = \underbrace{\psi(\text{space})}_{l=l'=0} \; \psi(\text{spin}) \; \psi(\text{flavor}) \; \psi_a(\text{color})$$

متقارن

ذره باریونی از نظر رنگ خنثی است

ψ antisymmetric

$$\psi_{\text{space}} \times \psi(\text{color}) = \text{متقارن} \times \text{پادمتقارن} = \text{پادمتقارن}$$

$$\Rightarrow \quad \psi(\text{spin}) \times \psi(\text{flavor}) = \text{متقارن}$$

در کل آنوقت تابع موج باریون پادمتقارن می‌شود

$$\psi(\text{spin}) \quad \psi(\text{isospin})$$

$$\begin{array}{ll} \downarrow & \downarrow \\ \psi_s(\text{spin}) & \psi_s(\text{isospin}) \\ \psi_{12}(\text{spin}) & \psi_{12}(\text{isospin}) \\ \psi_{23}(\text{spin}) & \psi_{23}(\text{isospin}) \\ & \psi_a(\text{isospin}) \end{array}$$

تنها راهی که می‌توان انتخاب کرد این است که

(۱) $\psi_s(\text{spin})\,\psi_s(\text{isospin}) = \text{متقارن} \times \text{متقارن} = \text{متقارن}$

(۲) $\left\{\begin{array}{l}\psi_{12}(\text{spin}) \\ \psi_{23}(\text{spin})\end{array}\right. \times \left\{\begin{array}{l}\psi_{12}(\text{isospin}) \\ \psi_{23}(\text{isospin}) \\ \psi_a(\text{isospin})\end{array}\right. = \text{پادمتقارن} \times \text{پادمتقارن} = \text{متقارن}$

نتیجه اینکه،

(a) $\psi_s(\text{spin})\,\psi_s(\text{isospin}) = \text{Baryon decuplet}$

$$J^P = \frac{3}{2}^+$$

(b) برای تولید Baryon octet یا از حاصلضرب $\psi_{12}(\text{spin})\,\psi_{12}(\text{isospin})$

یا از حاصلضرب $\psi_{23}(\text{spin})\,\psi_{23}(\text{isospin})$

استفاده می‌کنیم و یا از ترکیب خطی زیر

$$\psi(\text{baryon octet}) = \frac{\sqrt{2}}{3}\Big(\psi_{12}(\text{spin})\,\psi_{12}(\text{isospin}) + \psi_{23}(\text{spin})\,\psi_{23}(\text{isospin}) + \psi_{13}(\text{spin})\,\psi_{13}(\text{isospin})\Big)$$

به این ترتیب جواب نهائی تحت $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ متقارن است.

مثال ۱: تابع موج Δ^+ را در حالت $m_j = -\frac{1}{2}$ بدست آورید:

$$|\Delta^+ ;\ J = \tfrac{3}{2},\ m_j = -\tfrac{1}{2} ;\ I = \tfrac{3}{2},\ I_3 = +\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(uud + udu + duu\right)$$

$$= \frac{1}{3}\Big(u(\uparrow)u(\downarrow)d(\downarrow) + u(\downarrow)u(\uparrow)d(\downarrow) + u(\downarrow)u(\downarrow)d(\uparrow)$$
$$+ u(\uparrow)d(\downarrow)u(\downarrow) + u(\downarrow)d(\uparrow)u(\downarrow) + u(\downarrow)d(\downarrow)u(\uparrow)$$
$$+ d(\uparrow)u(\downarrow)u(\downarrow) + d(\downarrow)u(\uparrow)u(\downarrow) + d(\downarrow)u(\downarrow)u(\uparrow)\Big)$$

احتمال اینکه مثلاً $u(\downarrow)d(\uparrow)u(\downarrow)$ باشد $\frac{1}{9}$ است.

مثال ۲: تابع موج پروتون با اسپین up و $m_j = \frac{1}{2}$ را بنویسید:

$$|p ;\ J = \tfrac{1}{2},\ m_j = +\tfrac{1}{2} ;\ I = \tfrac{1}{2},\ I_3 = +\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\psi_{12}(s)\psi_{12}(f) + \psi_{23}(s)\psi_{23}(f) + \psi_{13}(s)\psi_{13}(f)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\psi_{12}(s)\psi_{12}(f) + \psi_{23}(s)\psi_{23}(f) + \left(\psi_{12}(s) + \psi_{23}(s)\right)\left(\psi_{12}(f) + \psi_{23}(f)\right)\right)$$

$$= \dots = \frac{1}{3\sqrt{2}}\Big\{uud\left(2\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\right)$$
$$+ udu\left(2\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow\right)$$
$$+ duu\left(-\uparrow\downarrow\uparrow + 2\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow\right)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left\{2\,u(\uparrow)u(\downarrow)d(\uparrow) - u(\uparrow)u(\downarrow)d(\uparrow) - \dots\right\}$$