Flavor Symmetry (Isospin)

تاریخچه: با توجه به خواص پروتون و نوترون که به غیر از بار الکتریکی متفاوت، و تفاوت جرم بسیار کوچک، پروتون و نوترون خواص مشابه دیگری مانند (اسپین، پاریته، ...) دارند می‌توان آنها را حالات مختلفی از یک ذره واحد به نام نوکلئون دانست.

Heisenberg (1932)

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نوکلئون $N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\uparrow\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\rangle$ پایه‌های اسپینوری

✓ در اینجا با استفاده از ایده اسپین می‌توان به هر پروتون و هر نوترون یک ایزواسپین I نسبت داد و همچنین یک I_3 به این ترتیب که I_3 برای پروتون $+\frac{1}{2}$ و برای نوترون $-\frac{1}{2}$ باشد.

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \qquad \vec{S} = (S_x, S_y, S_z) \qquad \vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$$

$\vec{S}^2 \|s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) \|s, m_s\rangle$	$\vec{I}^2 \|I, I_3\rangle = \hbar^2 I(I+1) \|I, I_3\rangle$
$S_z \|s, m_s\rangle = \hbar m_s \|s, m_s\rangle$	$\hat{I}_3 \|I, I_3\rangle = I_3 \|I, I_3\rangle$
$\|\uparrow\rangle = \|s = \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle$	$\|P\rangle = \|I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2}\rangle$
$\|\downarrow\rangle = \|s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle$	$\|n\rangle = \|I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}\rangle$

به این ترتیب پروتون ایزواسپین up (بالا) و نوترون ایزواسپین پایین down هستند.

ادعای هایزنبرگ در همان سال‌ها پیشنهاد ایزواسپین این بود که نیروی برهمکنش قوی تحت تبدیل ایزواسپین isospin ناوردا می‌ماند.

✓ تبدیل ایزواسپین یک نوع تبدیل در فضای داخلی است (تبدیل SU(2) که بر روی میدان‌های نوکلئونی اعمال می‌شود)

✓ وقتی می‌گوییم نیروی قوی تحت تبدیل ایزواسپین ناوردا است، ۲ معنی دارد:

(a) بصورت ریاضی: لاگرانژی مربوط به برهمکنشی که از جنس نیروی قوی است تحت تبدیل ایزواسپین SU(2) متقارن ناوردا است.

(b) در فیزیک ذرات: وقتی به فرآیندی بصورت $A + B \to C + D$ نگاه می‌کنیم، ابتدا می‌توانیم به هر یک از ذرات $A \ldots D$ یک بار ایزواسپین نسبت دهیم و بعد ΔI از دو طرف فرآیند را محاسبه کنیم؛ اگر برهمکنش قوی باشد $\Delta I = 0$ باشد.

پایستگی ایزواسپین ← پایستگی بار ← قضیه نوتر برای تقارن‌های پیوسته :

$\underset{\text{کنش}}{S}$

$\exists\, J^\mu : \partial_\mu J^\mu = 0$: حکم $\longleftarrow$ $\delta_\theta S = 0$: فرض

θ پارامتر تبدیل پیوسته

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \;=\; \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0 \longrightarrow \quad \partial_0 J^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

$$Q \equiv \int J^0 d^3x \qquad \partial_0 Q = \int \left(\partial_0 J^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right) d^3x$$

که سهم این جمله به خاطر قضیه Stokes مساوی صفر است.

$$= \int \underbrace{\partial_\mu J^\mu}_{=0} d^3x = 0$$

$$\longrightarrow \quad \partial_0 Q = 0 \longrightarrow \quad Q = \text{const in time}$$

• تبدیل دورانی $SU(2)$:

$$U(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}} \qquad \vec{\tau} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \qquad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \text{ ماتریس‌های Pauli}$$

جهت دوران $\hat{\theta} = \dfrac{\vec{\theta}}{\theta}$ $\qquad$ $\theta = |\vec{\theta}|$ زاویه دوران

$U(\vec{\theta}) = ?$ $\qquad$ $\hat{\theta} = \hat{e}_1$ در جهت $|\vec{\theta}| = \theta = \pi$ مثال: اگر

$$e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}} = e^{-i\theta\,\hat{\theta}\cdot\vec{\tau}} = e^{-i\theta\,\hat{e}_1\cdot\vec{\tau}} = e^{-i\theta\frac{1}{2}\sigma_x}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_x \sin\frac{\theta}{2} \qquad (\star)$$

به طور کلی می‌توان نشان داد:

$$e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}} = \cos\frac{\theta}{2} - i\,\hat{\theta}\cdot\vec{\sigma}\,\sin\frac{\theta}{2}$$

در رابطه $(\star)$ $\quad \theta = \pi$

$$(\star) \longrightarrow \cos\frac{\pi}{2} - i\sigma_x \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= -i\sigma_x = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{پروتون}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{نوترون}}$$

$$\sigma_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{نوترون}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{پروتون}}$$

به این ترتیب تفاوتی بین پروتون و نوترون وجود ندارد ـ تنها تفاوت به دلیل بار الکتریکی مثبت در پروتون و خنثی بودن نوترون است.

وجود یک میدان الکتریکی می‌تواند این را تشخیص دهد.

Baryon decuplet

تعداد حالات

ایزو اسپین هادرونها :

a) $\Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++}$ $\quad I = \frac{3}{2} \quad 2I+1 = 4$

b) $\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$ $\quad I = 1 \quad 2I+1 = 3$

c) Ξ^-, Ξ^0 $\quad I = \frac{1}{2} \quad 2I+1 = 2$

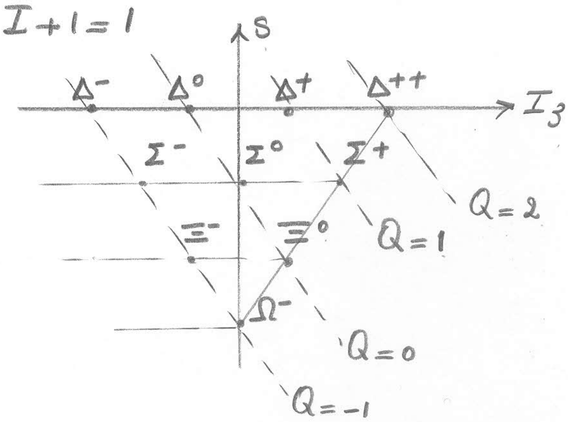
d) Ω^- $\quad I = 0 \quad 2I+1 = 1$

a) $I = \frac{3}{2} \qquad I_3 = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ $\qquad I = \frac{3}{2}$

b) $I = 1 \qquad I_3 = \pm 1, 0$ $\qquad I = 1$

c) $I = \frac{1}{2} \qquad I_3 = \pm\frac{1}{2}$ $\qquad I = \frac{1}{2}$

d) $I = 0 \qquad I_3 = 0$ $\qquad I = 0$

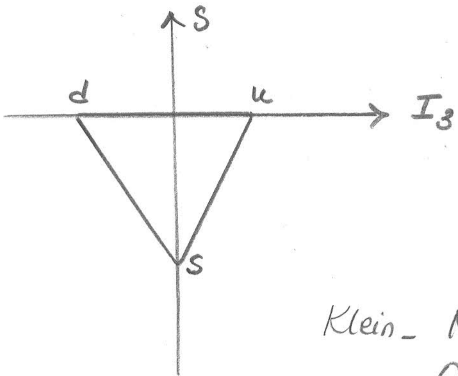


$$\longrightarrow \frac{Q}{e} = I_3 - \frac{1}{2}(B+S)$$

$$I_3^{up} = \frac{Q^{up}}{e} - \frac{1}{2}\left(B^{up} + S^{up}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$I_3^{down} = \frac{Q^{down}}{e} - \frac{1}{2}\left(B^{down} + S^{down}\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$I_3^{Strange} = \frac{Q^S}{e} - \frac{1}{2}\left(B^S + S^S\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$



$$u = \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = |I, I_3\rangle$$

$$d = \left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle = |I, I_3\rangle$$

$$s = |0, 0\rangle = |I, I_3\rangle$$

Klein_ Nishijima Formula

$$\frac{Q}{e} = I_3 + \frac{1}{2}Y \qquad Y = B + C + S + T + B^*$$

عدد باریونی

bottomness

ترکیب ایزو اسپین ها:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$\vec{S}\ |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1)\ |s, m_s\rangle$$

$$S_i^2\ |s_i, m_{s_i}\rangle = \hbar^2 s_i(s_i+1)\ |s_i, m_{si}\rangle \qquad i = 1, 2$$

$$S_z\ |s, m_s\rangle = \hbar m_s\ |s, m_s\rangle$$

$$S_{iz}\, |s_i, m_{si}\rangle = \hbar m_{si}\ |s_i, m_{si}\rangle \qquad i = 1, 2$$

Singlet $\quad |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$

triplet $\quad |1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \quad , \quad |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \qquad |1,+1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$

مثال ۱ ترکیب پروتون و نوترون

$P = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \qquad n = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

Isosinglet :
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(p(1)\,n(2) - n(1)\,p(2)\right) = |I=0, I_3=0\rangle$$

جایگاه اول

جایگاه دوم

Isotriplet :
$$n(1)\,n(2) = |1,-1\rangle = |I, I_3\rangle$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(p(1)\,n(2) + n(1)\,p(2)\right) = |I=1, I_3=0\rangle$$
$$p(1)\,p(2) = |1,+1\rangle = |I, I_3\rangle$$

• به این ترتیب وقتی از یک پروتون و یک نوترون حالت مقید ساخته می‌شود (deuterium) می‌تواند هر یک از این دو حالت را داشته باشد.

iso singlet (پاد متقارن تحت جابجایی پروتون و نوترون در تابع موج دوترون)

در حالت isotriplet (متقارن تحت جابجایی پروتون و نوترون در تابع موج)

• دوترون در حالت iso singlet در طبیعت یافت می‌شود $|d\rangle = |I=0, I_3=0\rangle$

مثال ۲: ناوردایی تحت isospin برای واکنش‌های زیر نتایج مهمی برای پراکندگی نوکلئون‌ها دارد:

i) $p + p \rightarrow d + \pi^+$ ✓

ii) $p + n \rightarrow d + \pi^0$

iii) $n + n \rightarrow d + \pi^-$ ✓

طرف چپ:

1) $pp = p \otimes p = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |1,1\rangle$

2) $pn = p \otimes n = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,0\rangle\right)$

3) $nn = n \otimes n = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle - |0,0\rangle\right)$

طرف راست:

1) $d \otimes \pi^+ = |0,0\rangle \otimes |1,+1\rangle = |1,1\rangle$

2) $d \otimes \pi^0 = |0,0\rangle \otimes |1,0\rangle = |1,0\rangle$

3) $d \otimes \pi^- = |0,0\rangle \otimes |1,-1\rangle = |1,-1\rangle$

۱) سؤال اینکه کدام یک از پراکندگی‌های i، ii و iii محتمل‌تر هستند

پاسخ: اگر I دو طرف واکنش را با هم مقایسه کنیم، دو واکنش i و iii احتمال بیشتری دارند زیرا I در هر دو طرف واکنش برابر $I=1$ است.

$$i)\quad \underbrace{p+p}_{I=1} \rightarrow \underbrace{d+\pi^+}_{I=1}$$

$$iii)\quad \underbrace{n+n}_{I=1} \rightarrow \underbrace{d+\pi^-}_{I=1}$$

ولی

$$\underbrace{n+p}_{\substack{\%50\ I=1 \\ \%50\ I=0}} \rightarrow \underbrace{d+\pi^0}_{I=1}$$

پس دامنه احتمال‌ها را برای این سه پروسه اگر با هم مقایسه کنیم، داریم:

$$\mathcal{M}_{(i)} : \mathcal{M}_{(ii)} : \mathcal{M}_{(iii)}$$

$$1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$$

و اگر سطح مقطع پراکندگی‌های این سه پروسه را با هم مقایسه کنیم، داریم:

$$\sigma_{(i)} : \sigma_{(ii)} : \sigma_{(iii)}$$

$$1 : \frac{1}{2} : 1$$

یا حال اگر نسبت سطح مقطع پراکندگی برای این سه فرآیند را در آزمایش با هم مقایسه کنیم، همین نتایج را بدست می‌آوریم، و این نشان می‌دهد که $\Delta I = 0$ (ناوردایی ایزواسپین در برهم‌کنش قوی) داریم.

مثال ۳:

a) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$

b) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$

c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$

d) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$

e) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$

f) $\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$

این ۶ برخورد کاملاً الاستیک هستند ولی ۴ فرآیند دیگر هم وجود دارند:

g) $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$

h) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$

i) $\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$

j) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

ترکیب ایزواسپین ها:

$$\pi^+ + p \;:\; |1,+1\rangle \otimes |\tfrac12,+\tfrac12\rangle = |\tfrac32,+\tfrac32\rangle$$

$$\pi^0 + p \;:\; |1,0\rangle \otimes |\tfrac12,+\tfrac12\rangle = \sqrt{\tfrac23}\,|\tfrac32,+\tfrac12\rangle - \sqrt{\tfrac13}\,|\tfrac12,+\tfrac12\rangle$$

$$\pi^- + p \;:\; |1,-1\rangle \otimes |\tfrac12,+\tfrac12\rangle = \sqrt{\tfrac13}\,|\tfrac32,-\tfrac12\rangle - \sqrt{\tfrac23}\,|\tfrac12,-\tfrac12\rangle$$

$$\pi^+ + n \;:\; |1,+1\rangle \otimes |\tfrac12,-\tfrac12\rangle = \sqrt{\tfrac13}\,|\tfrac32,+\tfrac12\rangle + \sqrt{\tfrac23}\,|\tfrac12,+\tfrac12\rangle$$

$$\pi^0 + n \;:\; |1,0\rangle \otimes |\tfrac12,-\tfrac12\rangle = \sqrt{\tfrac23}\,|\tfrac32,-\tfrac12\rangle + \sqrt{\tfrac13}\,|\tfrac12,-\tfrac12\rangle$$

$$\pi^- + n \;:\; |1,-1\rangle \otimes |\tfrac12,-\tfrac12\rangle = |\tfrac32,-\tfrac32\rangle$$

در ترکیب ایزواسپین ها از ترکیب یک ذره با ایزواسپین $I_\pi = 1$ و یک ذره با ایزواسپین $I_N = \frac12$ حتماً دو نوع I ترکیبی بوجود میاید:

$$|I_N - I_\pi| = \frac12 \qquad \text{و} \qquad |I_N + I_\pi| = \frac32$$

به این ترتیب دو دامنه مشخص این جا داریم:

$\mathcal{M}_3 \equiv \langle \frac32, \ldots | \frac32, \ldots \rangle$: دامنه‌ای که مربوط به $I = \frac32$ است را با $\mathcal{M}_3$ نشان می‌دهیم،

$\mathcal{M}_1 \equiv \langle \frac12, \ldots | \frac12, \ldots \rangle$: و دامنه‌ای که مربوط به $I = \frac12$ است را با $\mathcal{M}_1$ نشان می‌دهیم؛

- به این ترتیب در دو فرآیند (a) و (f) که در آنها هر دو طرف رابطه $I = \frac32$ است و در ضمن در هر دو مورد تابع موج خالص داریم یا $|\frac32,+\frac32\rangle$ (فرآیند a) و $|\frac32,-\frac32\rangle$ (فرآیند f) خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_f = \mathcal{M}_3}$$

در بقیه موارد داریم:

b) $\underbrace{\pi^0 + p}^{|f\rangle} \rightarrow \underbrace{\pi^0 + p}^{|i\rangle}$ $\qquad \mathcal{M}_b = \langle f | i \rangle$ (initial state, final state)

$$\mathcal{M}_b = \left(\sqrt{\tfrac23}\,\langle \tfrac32,+\tfrac12| - \sqrt{\tfrac13}\,\langle \tfrac12,+\tfrac12|\right)\left(\sqrt{\tfrac23}\,|\tfrac32,+\tfrac12\rangle - \sqrt{\tfrac13}\,|\tfrac12,+\tfrac12\rangle\right)$$

$$= \frac23 \langle \tfrac32,+\tfrac12 | \tfrac32,+\tfrac12\rangle + \frac13 \langle \tfrac12,+\tfrac12 | \tfrac12,+\tfrac12\rangle$$

$$\mathcal{M}_b = \frac23 \mathcal{M}_3 + \frac13 \mathcal{M}_1$$

c) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$

$$\mathcal{M}_c = \left(\sqrt{\tfrac13}\,\langle \tfrac32,-\tfrac12| - \sqrt{\tfrac23}\,\langle \tfrac12,-\tfrac12|\right)\left(\sqrt{\tfrac13}\,|\tfrac32,-\tfrac12\rangle - \sqrt{\tfrac23}\,|\tfrac12,-\tfrac12\rangle\right)$$

$$= \frac13 \langle \tfrac32,-\tfrac12 | \tfrac32,-\tfrac12\rangle + \frac23 \langle \tfrac12,-\tfrac12 | \tfrac12,-\tfrac12\rangle$$

$$= \frac13 \mathcal{M}_3 + \frac23 \mathcal{M}_1$$

j) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$

$$\mathcal{M}_j = \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,\langle \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}| - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\langle \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}|\right)\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\langle \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}\langle \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_3 - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}(\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1)$$

...

بهمین ترتیب برای بقیه فرآیندها هم می‌توان دامنه احتمال مربوطه را برحسب $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_3$ بدست آورد.

سؤال: $\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = ?$

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j = |\mathcal{M}_3|^2 : \left|\tfrac{1}{3}\mathcal{M}_3 + \tfrac{2}{3}\mathcal{M}_1\right|^2 : \left|\tfrac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_3 - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\mathcal{M}_1\right|^2$$
$$= \mathcal{M}_3^2 : \tfrac{1}{9}(\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1)^2 : \tfrac{2}{9}|\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2$$
$$\overset{\text{or}}{=} 9\mathcal{M}_3^2 : |\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_1|^2 : 2|\mathcal{M}_3 - \mathcal{M}_1|^2$$

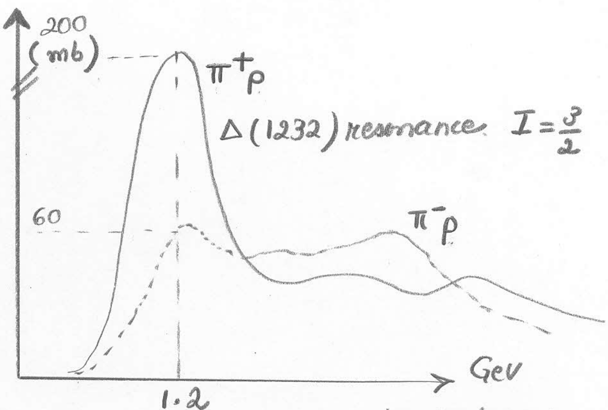
اگر از نتایج آزمایشگاهی بدانیم که $\mathcal{M}_1 \ll \mathcal{M}_3$ است درآنصورت:

$$\sigma_a : \sigma_c : \sigma_j \cong 9\mathcal{M}_3^2 : \mathcal{M}_3^2 : 2\mathcal{M}_3^2 \simeq 9 : 1 : 2$$

به این ترتیب:

$$\frac{\overset{\text{فرآیند } a}{\sigma_{tot}(\pi^+ p)}}{\underset{\text{فرآیندهای } c \text{ و } j}{\sigma_{tot}(\pi^- p)}} = \frac{9}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

σ سطح مقطع کل پراکندگی در فرآیند $\pi^+ p$ و $\pi^- p$



M= invariant mass of πp

$\sigma = \sigma(mb)$

1 barn $= 10^{-28}\, m^2$

1mb $= 10^{-3}$ barn

$c=1$

$$M^2 = (E_1 + E_2)^2 - |\vec{P}_1 + \vec{P}_2|^2$$
$$= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - \vec{P}_1^2 - \vec{P}_2^2 - 2\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2$$
$$= (E_1^2 - \vec{P}_1^2) + (E_2^2 - \vec{P}_2^2) + 2(E_1E_2 - \vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)$$
$$= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)$$

در انرژی $1.2\ GeV \sim 1232\ MeV$ یک حالت تشدیدی (رزونانس) بوجود میاید. در اینجا π و نوکلئون باهم ترکیب می‌شوند و حالت تشدیدکوتاه عمری تولید می‌شود به نام Δ

$$\Delta(1232) \in \text{Baryon decuplet with } J^P = \tfrac{3}{2}^+ \ , \ I = \tfrac{3}{2}$$

$$I_3 = \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{1}{2}$$

نتیجه: با توجه به اینکه $\Delta(1232)$ تشکیل شده می‌دانیم که I آن مساوی $I = \frac{3}{2}$ است
بنظر می‌رسد فرض $M_3 \gg M_1$ درست باشد
درضمن

$$\frac{\sigma(\pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p)} \cong \frac{200\,mb}{60\,mb} = 3$$

واین عدد ۳ هم پیش‌بینی نظری ما را وهمه کارهائی که کردیم با فرضهای مربوط تائید می‌کند.

«البته این تئوریها در محدوده جرم Δ - رزونانس درست است».