بخش ۴: تقارن‌ها

الف) یادآوری مفهوم اسپین:

- در مکانیک کلاسیک: کره زمین تکانه دورانی مداری دارد که مربوط به گردش زمین حول خورشید است (دوره تناوب = ۱ سال)
- همچنین زمین حول محور خودش هم می‌گردد (حرکت اسپینی) (دوره تناوب = ۲۴ ساعت)

- در مکانیک کوانتومی: الکترون دارای یک تکانه دورانی (زاویه‌ای) است $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

عملگر تکانه خطی $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \rightarrow$ عملگر تکانه زاویه‌ای $\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\vec{r} \times \vec{\nabla}$

الکترون دارای اسپین هم هست. $\vec{S}$ عملگر اسپین.

✓ در مکانیک کلاسیک ← همه مؤلفه‌های تکانه زاویه‌ای را می‌توان هم‌زمان اندازه گرفت.

در مکانیک کوانتومی ← از $\vec{L}^2$ و L_z به عنوان عملگرهائی استفاده می‌شود که مقادیر ویژه آنها اعداد کوانتومی خوب برای شماره گذاری حالتهای انرژی هستند

این یعنی $\vec{L}^2$ و L_z با H (عملگر انرژی) ویژه حالات مشترک دارند.

← از طرفی نمی‌توان مؤلفه‌های $\vec{L}$ را همزمان اندازه گرفت

جبر مؤلفه‌های $\vec{L}$:
$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$\vec{L}^2 |l, m_l\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m_l\rangle$$

$$L_z |l, m_l\rangle = \hbar m_l |l, m_l\rangle$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

$$m_l = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$$

به این ترتیب به ازای هر l داده شده $2l+1$ تا m_l داریم

به همین ترتیب برای اسپین:

(s, m_s) اعداد کوانتومی خوب برای اسپین هستند، s به ویژه مقدار عملگر $\vec{S}^2$ و m_s به ویژه مقدار عملگر S_z مربوطند.

$$\vec{S}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle$$

$$S_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots$$

$$m_s = -s, -s+1, \ldots, 0, \ldots, s-1, s$$

به این ترتیب مجدداً به ازای هر s داده شده $2s+1$ حالت برای m_s وجود دارد.

در فیزیک ذرات به هر ذره‌ای اسپین نسبت داده می‌شود، چه ذره بنیادی باشد (elementary) چه ذره ترکیبی باشد (composite)

بوزونها (اسپین عدد صحیح)

- هیگز ← ذره بنیادی ← اسپین 0
- ذرات میانجی‌ای (γ ، gluon ، $W^\pm, Z^0$) ← ذرات بنیادی ← اسپین 1
- مزونهای شبه اسکالر ($\pi^\pm$ ، π^0 ، ...) ← $J^P = 0^-$ ← ذرات ترکیبی
- مزونهای برداری ($\rho^\pm, \rho^0$ ، ...) ← $J^P = 1^-$ ← ذرات ترکیبی

فرمیونها (اسپین عدد نیم صحیح)

- کوارکها، لپتونها ← اسپین $\frac{1}{2}$ ← ذرات بنیادی
- هشت‌تایی باریونی ← ذرات ترکیبی ← $J^P = \frac{1}{2}^+$ (پروتون، نوترون، ...)
- ده‌تایی باریونی ← ذرات ترکیبی ← $J^P = \frac{3}{2}^+$ ($\Delta^0, \Delta^\pm \ldots$)

جمع تکانه‌های زاویه‌ای:

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ (در مکانیک کوانتومی)

سؤال: اگر اعداد کوانتومی مربوط به $\vec{L}^2$ و L_z مساوی l, m_l باشند ← $|l, m_l\rangle$

اگر اعداد کوانتومی مربوط به $\vec{S}^2$ و S_z مساوی s, m_s باشند ← $|s, m_s\rangle$

در آن صورت حالات کوانتومی، اعداد کوانتومی (ویژه حالتها و ویژه مقادیر) مربوط به J_z و $\vec{J}^2$ چه خواهند بود؟

اگر $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

$$\vec{J}^2 |j, m_j\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m_j\rangle$$

$$J_z |j, m_j\rangle = \hbar m_j |j, m_j\rangle$$

از مکانیک کوانتومی می‌دانیم:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

$\vec{J}_1 \rightarrow |j_1, m_{j_1}\rangle$

$\vec{J}_2 \rightarrow |j_2, m_{j_2}\rangle$

$\vec{J} \rightarrow |j, m_j\rangle$

$$\begin{cases} m_j = m_{j_1} + m_{j_2} \\ j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots, 0, \ldots (j_1 + j_2) - 1, (j_1 + j_2) \end{cases}$$

مثال ۱: الف) مزونی در حالت غیر برانگیخته $(l=0)$ در نظر بگیرید. اسپین کل مزون را برای $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$ حساب کنید.

ب) اگر مزون علاوه بر اسپین بعد دو تایی $l\neq 0$ داشته باشد، مزون برانگیخته چه مقدار J خواهد بود؟

در مورد (الف) اگر $l=0$ باشد، برای مزون که شامل یک کوارک و یک آنتی کوارک است داریم

$$\vec{S}_1+\vec{S}_2=\vec{S}$$

$$\vec{S}_1^{\,2}\,|s_1,m_{s_1}\rangle=\hbar^2 s_1(s_1+1)\,|s_1,m_{s_1}\rangle$$

$$\vec{S}_2^{\,2}\,|s_2,m_{s_2}\rangle=\hbar^2 s_2(s_2+1)\,|s_2,m_{s_2}\rangle$$

$s_1=s_2=\frac{1}{2} \implies$ برای $s=?$

$\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2$

$$\vec{S}^{\,2}\,|s,m_s\rangle=\hbar^2 s(s+1)\,|s,m_s\rangle$$

$$s=\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)}_{s_1-s_2}=0\;,\;\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)}_{s_1+s_2}=1 \;\longrightarrow\; s=0,1$$

پس اسپین کل ۲ حالت دارد

$s=0$ (مربوط به مزونهای شبه اسکالر است) $(J^{PC}=0^{-+}$

$s=1$ (مربوط به مزونهای برداری) $J^{PC}=1^{--}$

$$C=(-1)^{l+s}\begin{cases} l=0\,,\,s=0 \implies C=(-1)^0=1 \\ l=0\,,\,s=1 \implies C=(-1)^1=-1\end{cases}$$

ب) اگر $l\neq 0$ باشد، $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$

$$s=0 \implies j=l-0,\ldots,l+0=l$$

$$s=1 \implies j=l-1\,,\,\underbrace{l-1+1}_{l}\,,\,l+1$$

مثال ۲: الف) در مورد باریونها که از ترکیب سه کوارک بدست میآیند فرض می‌کنیم $l=0$ است، s کل باریون را بدست آورید.

$$\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2+\vec{S}_3$$

$$\vec{S}_1+\vec{S}_2=\vec{S}_a\quad,\quad\vec{S}=\vec{S}_a+\vec{S}_3$$

a) $S_a=0,1$ $\qquad 0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\;,\;1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

b) $S_a=0$ $\qquad S=\frac{1}{2}$

$S_a=1$ $\qquad S=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$

$$\underbrace{\left|1-\tfrac{1}{2}\right|}_{\text{baryon octet}}\;,\;\underbrace{\left|1+\tfrac{1}{2}\right|}_{\text{baryon decuplet}}$$

ضرایب Clebsh - Gordan

علاوه بر (j, m_j) می‌خواهیم از ترکیب $|j_1, m_{j_1}\rangle$ و $|j_2, m_{j_2}\rangle$ تابع موج درست کنیم (البته کاربرد آن را نخواهیم دید) و ضرایب بسط مربوطه را می‌خواهیم بدست بیاوریم.

$$|j_1, m_{j_1}\rangle \otimes |j_2, m_{j_2}\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{j\ j_1\ j_2}_{m_j\ m_{j_1}\ m_{j_2}} |j, m_j\rangle$$

ضرایب Clebsh - Gordan (CG)

عملاً با استفاده از این ضرایب، احتمال اینکه هر یک از مقادیر j را داشته باشیم را محاسبه می‌کنیم.

• مثال: یک الکترون در اتم هیدروژن حالت $|l, m_l\rangle = |2, -1\rangle$ و اسپین $|s, m_s\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ را اشغال کرده است. مقادیر j را تعیین کنید و بگویید با چه احتمالی هر یک از مقادیر j را خواهیم داشت؟

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$j = |l-s|, \ldots, 0, \ldots, l+s-1, l+s$$

$$= |2-\tfrac{1}{2}|, \quad |2-\tfrac{1}{2}|+1 \Rightarrow \quad j = \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}$$

$$m_j = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2} = m_s + m_l$$

برای تعیین ضرایب (CG) به کتاب و جدول مربوط به $l \times s = 2 \times \frac{1}{2}$ را رجوع می‌کنیم؛ به این ترتیب می‌توانیم مقدار $|2,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = ?$ را تعیین کنیم.

$2 \otimes \frac{1}{2}$		$l+s$: $5/2$	$\lvert l-s\rvert$: $3/2$
		$-1/2$	$-1/2$
0	$-\frac{1}{2}$	$3/5$	$2/5$
$\rightarrow$ -1	$+\frac{1}{2}$	$2/5$	$-3/5$

$$|2,-1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{5}}\, |5/2, -1/2\rangle + \sqrt{\tfrac{3}{5}}\, |\tfrac{3}{2}, -1/2\rangle$$

بنابراین در این ترکیب به میزان $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 \rightarrow 40\%$ احتمال تشکیل حالت $|5/2, -\frac{1}{2}\rangle$ را داریم و
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 \rightarrow 60\%$ " " " $|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ را.

$j_1 \otimes j_2$		j_1'	j_2'
		m_{j_1}	m_{j_2}
m_1	m_2	a	$-b$
m_1'	m_2'	c	d

$$|j_1\, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = \sqrt{a}\; |j_1', m_{j_1}\rangle - \sqrt{b}\; |j_2', m_{j_2}\rangle$$

$$|j_1, m_1'\rangle \otimes |j_2, m_2'\rangle = \sqrt{c}\; |j_1', m_{j_1}\rangle + \sqrt{d}\; |j_2', m_{j_2}\rangle$$

از طرفی

$$|j_1', m_{j_1}\rangle = \sqrt{a}\; |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle + \sqrt{c}\; |j_1, m_1'\rangle |j_2, m_2'\rangle$$

$$|j_2', m_{j_2}\rangle = -\sqrt{b}\; |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle + \sqrt{d}\; |j_1, m_1'\rangle |j_2, m_2'\rangle$$

مثال: نشان دهید در ترکیب ۲ اسپین $\frac{1}{2}$ سه حالت triplet (سه تایی) و یک حالت تکتایی (singlet) وجود دارد.

a)
$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = |1, +1\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1, 0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, |0, 0\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1, 0\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, |0, 0\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = |1, -1\rangle$$

حالت تکتایی:

$1/2 \times \frac{1}{2}$				
		1		
		1	1	0
			0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		
$\frac{1}{2}$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	
$-1/2$	$+1/2$	$1/2$	$-1/2$	
		1		
		-1		
$-1/2$	$-1/2$	1		

$$|0,0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\big)$$

حالت سه تایی:

$$|1,-1\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$
$$|1,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\big)$$
$$|1,+1\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

نمادگذاری

$$|\uparrow\rangle \equiv |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle \quad \text{و} \quad |\downarrow\rangle \equiv |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

m_1	m_2	J / M	J / M	…
m_1	m_2	Coefficients		
⋮	⋮			

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

1/2×1/2

m_1	m_2	J=1, M=+1
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	J=1, M=0	J=0, M=0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=1, M=−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

m_1	m_2	J=3/2, M=+3/2
+1	+1/2	1

m_1	m_2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	J=3/2, M=−3/2
−1	−1/2	1

2×1/2

m_1	m_2	J=5/2, M=+5/2
+2	+1/2	1

m_1	m_2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	J=5/2, M=−5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

m_1	m_2	J=2, M=+2
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	J=2, M=0	J=1, M=0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=2, M=−1	J=1, M=−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	J=2, M=−2
−3/2	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	J=3, M=+3
+2	+1	1

m_1	m_2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	J=3, M=−3
−2	−1	1

1×1

m_1	m_2	J=2, M=+2
+1	+1	1

m_1	m_2	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	J=2, M=−1	J=1, M=−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	J=2, M=−2
−1	−1	1

3/2×1

m_1	m_2	J=5/2, M=+5/2
+3/2	+1	1

m_1	m_2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	J=5/2, M=−5/2
−3/2	−1	1