نسبیت خاص:

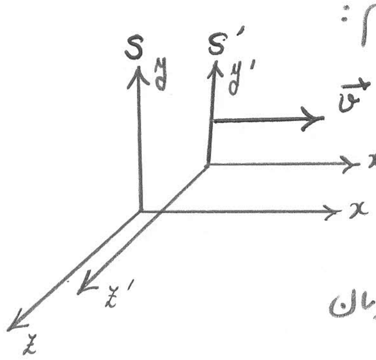
در نسبیت خاص تمام قوانین فیزیکی در تمام دستگاه‌های مرجع به یک شکل صحیح هستند

<u>دستگاه مرجع</u>: دستگاهی که قانون اول نیوتون در آن صحیح است.

تا وقتی نیرویی به جسمی وارد نشده است، اگر جسم در حال سکون باشد در همان حال می‌ماند و اگر در حال حرکت با سرعت یکنواخت باشد، به حرکت یکنواخت خود ادامه می‌دهد (شتاب پیدا نمی‌کند)

← به این ترتیب هر دستگاهی نسبت به یک دستگاه مرجع در حالت سکون باشد و یا در حال حرکت با سرعت یکنواخت باشد، خودش یک دستگاه مرجع است.

← <u>فرض</u>: فرض می‌کنیم دو دستگاه S و S' نسبت به هم با سرعت یکنواخت (اندازه و جهت سرعت ثابت است) $\vec{v}$ در حرکتند بدون نقض کلیت $\vec{v}$ را در جهت x و x' در نظر می‌گیریم:



<u>سؤال</u>: فرض کنید رویدادی در مکان $\vec{x} = (x, y, z)$ و زمان t در دستگاه S اتفاق افتاده است.

سؤال این است که همان رویداد در کدام مکان و در کدام زمان در دستگاه S' اتفاق می‌افتد؟

$$\vec{v} = (v, 0, 0) \qquad v_x = v \quad \text{تا مدتی}$$

تبدیلات لورنتس

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$$

عکس تبدیلات لورنتس:

$$\begin{cases} x = \gamma (x' + vt) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) \end{cases}$$

نتایج تبدیلات لورنتس: همزمانی زمان دو رویداد

انقباض طول

اتساع زمان

جمع سرعت‌ها

(a) همزمانی دو رویداد: اگر دو رویداد بصورت همزمان در دستگاه S اتفاق بیفتند، لزوماً در دستگاه S' همزمان نیستند

$$t_A = t_B$$

$$t_A = \gamma \left(t'_A + \frac{v}{c^2} x'_A\right)$$

$$t_B = \gamma \left(t'_B + \frac{v}{c^2} x'_B\right)$$

$$t_A - t_B = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma (t'_A - t'_B) + \gamma \frac{v}{c^2} (x'_A - x'_B) = 0$$

$$t'_A = t'_B - \frac{v}{c^2} (x'_A - x'_B)$$

$$x'_A - x'_B = \gamma (x_A - v t_A) - \gamma (x_B - v t_B)$$

$$= \gamma (x_A - x_B) - \gamma v \underbrace{(t_A - t_B)}_{=0} = \gamma (x_A - x_B)$$

$$\rightarrow \boxed{t'_A = t'_B - \frac{v}{c^2} \gamma (x_A - x_B)}$$

پس اگر دو رویداد همزمان در دستگاه S در یک مکان اتفاق بیفتد، در دستگاه S' در یک زمان دیده می‌شوند، در غیر اینصورت این دو رویداد در دستگاه S' همزمان نخواهند بود

(b) انقباض طول: اجسامی که در حال حرکت هستند کوتاهتر می‌شوند: (شرط: در مورد طولی که در جهت حرکت است صحبت کنیم):

میله‌ای به طول L را در نظر بگیرید

S' : left end $\rightarrow x' = 0$ at $t' = 0$

right end $\rightarrow x' = L$

S : left end $\rightarrow x = 0$ at $t = 0$

right end $\rightarrow x' = \gamma (x - vt)$

$$\rightarrow L' = \gamma (x - 0) = \gamma x \rightarrow \boxed{x \equiv L = \frac{L'}{\gamma}}$$

به این ترتیب ناظر در دستگاه S طول میله‌ای را که در دستگاه S' همراه با آن دستگاه با سرعت v در جهت x در حرکت است را کوتاهتر می‌بیند.

(c) انبساط زمان: فرض کنید با یک ساعت در مکان $x' = 0$ یک بازه زمانی $T' = t' - 0 = t'$ را اندازه‌گیری کنید، سؤال این که این بازه زمانی در دستگاه S چقدر است؟

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right)$$

$$\boxed{T \equiv t = \gamma T'} \longrightarrow \quad T > T'$$

به این ترتیب یک ساعت در دستگاه S بازه زمانی بزرگتری را اندازه‌گیری می‌کند

Moving clocks run slower یا بالعکس

d) جمع سرعتها: در دستگاه S' یک ذره با سرعت u' در حال حرکت است (در جهت x)

سؤال: سرعت ذره در دستگاه S چیست؟

$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\gamma(\Delta x'+v\Delta t')}{\gamma(\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x')}=\frac{\Delta x'/\Delta t'+v}{1+\frac{v}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}}=\frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'}$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\equiv u'$$

اگر $u'=c$ باشد (یعنی اگر ذره ای در دستگاه متحرک با سرعت نور حرکت کند ← در دستگاه ثابت هم با سرعت نور حرکت خواهد کرد).

$$u=\frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c}=c$$

به عبارت دیگر: سرعت نور در تمام دستگاهها ثابت است.

از این پس تا اطلاع ثانوی $c=1$ ← ابزار ریاضی

$$x^\mu=(t,\vec{x})$$

$$\vec{x}=(x^1,x^2,x^3) \text{ یا } (x,y,z) \quad , \quad x^0=t$$

تبدیل لورنتس $\quad x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

a مثال Boost → خیز در جهت x

$$\Lambda^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}\cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 & 0\\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\cosh\varphi=\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\sinh\varphi=\gamma\beta=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \qquad \beta=\frac{v}{c}\underset{c=1}{=}v$$

$$\tanh\varphi=\beta=v \longrightarrow \varphi=\operatorname{artg} v \to \text{rapidity}$$

$$\begin{cases}-1<\beta<1\\ \to -\infty<\varphi<+\infty\end{cases}$$

$$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

b مثال Rotation

دوران حول محور z

$$\Lambda^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x'^0=x^0\\ x'^1=x^1\cos\theta+x^2\sin\theta\\ x'^2=-x^1\sin\theta+x^2\cos\theta\\ x'^3=x^3\end{cases}$$

Four_Vectors

Contravariant four_vector $\quad x^\mu = (x^0, \vec{x})$

$$x^\mu x_\mu = x_0^2 - \vec{x}^2 \qquad x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$\longrightarrow$

Covariant four_vector $\quad x_\mu = (x^0, -\vec{x})$

حکم : اگر $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$\rightarrow \quad x'^\mu x'_\mu \overset{!}{=} x^\mu x_\mu$$

$$x'^\mu x'_\mu = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho}_{g_\nu{}^\rho} x^\nu x_\rho = x^\rho x_\rho$$

$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$ هر چهاربرداری مانند x^μ تبدیل شود یک بردار contrav. است .

$$a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$a^\mu a_\mu = a^2 \begin{cases} a^2 > 0 & \text{timelike four\_vector} \\ a^2 < 0 & \text{spacelike four\_vector} \\ a^2 = 0 & \text{Lightlike four\_vector} \end{cases}$$

Tensors

$$S'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma S^{\rho\sigma}$$

$$t'^{\mu\nu\rho} = \Lambda^\mu{}_\eta \Lambda^\nu{}_\delta \Lambda^\rho{}_\gamma t^{\eta\delta\gamma}$$

$$S^\mu{}_\nu = g_{\nu\rho} S^{\mu\rho}$$

$$S_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} S^{\rho\sigma}$$

$$t^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu \qquad t'^{\mu\nu} = a'^\mu b'^\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma a^\rho b^\sigma = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma t^{\rho\sigma}$$

---

a) Proper_time (زمان ویژه)

$$dt = \gamma\, d\tau \qquad T = \gamma T'$$

بازه زمانی در دستگاه ساکن
(آزمایشگاه)

بازه زمانی در دستگاه متحرک
(مثلاً همراه با ذره‌ای که با سرعت v در حرکت
است)

$$\Rightarrow \quad \boxed{d\tau = \frac{1}{\gamma} dt}$$

b) Proper velocity (سرعت ذره)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$ سرعت ذره در دستگاه آزمایشگاه

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\text{مسافت پیموده شده توسط ذره (این مسافتی است که آزمایشگر در آزمایشگاه اندازه می‌گیرد)}}{\text{زمان لازم برای پیموده شدن مسافت توسط ذره (")}}$$

$$\vec{\eta} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{\frac{1}{\gamma}dt} = \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma \vec{v} \Longrightarrow \eta^\mu = \gamma v^\mu$$

$$\vec{\eta} = \frac{\text{مسافت پیموده شده توسط ذره (که آزمایشگر اندازه می‌گیرد)}}{\text{زمان لازم برای پیموده شدن این مسافت (در دستگاه ذره)}}$$

• در حد غیرنسبیتی:

$$v \ll c \qquad \gamma \sim 1 \longrightarrow \vec{\eta} \simeq \vec{v}$$

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma v^\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

$$\eta^\mu \eta_\mu = \gamma^2 v^\mu v_\mu = \frac{1}{1-\vec{v}^2}(1-\vec{v}^2) = 1 = c^2$$

از آنجا که c در تمام دستگاه‌ها مقدارش تغییر نمی‌کند (ناوردای لورنتسی است) طول بردار η^μ هم تغییر نمی‌کند و در تمام دستگاه‌ها یکسان باقی می‌ماند. می‌گوییم η^μ ناوردای لورنتسی است.

proper velocity

c) Momentum

تکانه = سرعت × جرم

سؤال: کدام سرعت؟ $\vec{\eta}$ یا $\vec{v}$ $\left(\vec{\eta} = \frac{d\vec{x}}{d\tau},\ \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}\right)$

• اگر بخواهیم در همه دستگاه‌های مرجع پایستگی انرژی و تکانه را داشته باشیم، باید تعریف p^μ را بر اساس η^μ بدهیم:

$$p^\mu = m\eta^\mu \begin{cases} p^0 = m\eta^0 = m\gamma \xrightarrow{c\neq 1} mc\gamma & \text{for } \eta^\mu = \gamma(c, \vec{v}) \\ \vec{p} = m\vec{\eta} = m\gamma\vec{v} \end{cases}$$

• حال می‌دانیم $P_0 = \frac{E}{c}$

$$P_0 = m\gamma c = \frac{E}{c} \rightarrow E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

به این ترتیب:

$$p^\mu = \left(p_0 = \frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 \eta^\mu \eta_\mu = m^2c^2$$

$$\longrightarrow \quad p^\mu p_\mu = m^2c^2 \overset{c=1}{=} m^2 \rightarrow \text{Lorentz invariant}$$

چون η^μ ناوردای لورنتسی است.

$$p^2 = m^2c^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}$$

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$$

حد غیرنسبیتی:

$$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} = +mc^2\left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m^2c^2} + \dots\right)$$

علامت منفی را کنار می‌گذاریم.

$$= mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \dots$$

انرژی حالت سکون

انرژی جنبشی کلاسیکی (غیرنسبیتی)

انرژی جنبشی غیرنسبیتی $\quad \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \approx E - mc^2$

انرژی جنبشی نسبیتی

$$E - mc^2 = mc^2\gamma - mc^2 = mc^2(1-\gamma)$$

توجه شود که روابط فوق فقط برای ذراتی که جرم غیرصفر دارند صحیح است. (بخصوص رابطه $E = m\gamma c^2$)

ذره با جرم مساوی صفر:

- در مکانیک کلاسیک ذره‌ای که جرم صفر داشته باشد، تکانه و انرژی جنبشی آن مساوی صفر است. و اگر نیرویی به آن وارد شود، مطابق اصل اول نیوتن شتاب نمی‌گیرد.

$\leftarrow$

برای ذره‌ای با جرم صفر سرعت مساوی c است و لذا ذره نسبیتی است.

حال اگر از روابط نسبیتی تکانه و انرژی استفاده شود

$$E = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{و} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}}$$

در سرعت را مساوی c بگذاریم به $E, \vec{p} \sim \frac{0}{0}$ می‌رسیم که باید آن را رفع ابهام کرد

بجای آن عبارات از رابطه $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2$ استفاده شود و اگر $m = 0$ گذاشته شود $\rightarrow E = |\vec{p}|c$

این همان چیزی است که منجر می‌شود به

$$p^2 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}$$

$$= \vec{p}^{\,2} - \vec{p}^{\,2} = 0 \longrightarrow \boxed{p^2 = 0}$$

سؤال: $A+B \to C+D$ تفاوت بین برخورد کلاسیک و برخورد نسبیتی چیست؟

تفاوتها:

- در اینجا C, D لزوماً همان A, B نیستند
- امکان تولید ذرات جدید وجود دارد: $A+B \to C+D+E$
- برخوردها با سرعتهای نسبیتی یا فوق نسبیتی (خیلی نزدیک به سرعت نور) انجام می‌شوند که نیروهای خارجی از جنبش گرانش در آنها بی اثرند.

← برخوردهای کلاسیک: $A+B \to C+D$

(a) جرم در برخورد کلاسیک پایسته است $m_A + m_B = m_C + m_D$

(b) تکانه هم پایسته است $\vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{P}_C + \vec{P}_D$

(c) در مورد انرژی جنبشی معمولاً ۳ حالت جداگانه در نظر گرفته می‌شوند

(c.1) برخوردهای کاملاً غیرالاستیک: $T_A + T_B > T_C + T_D$

جمع انرژی جنبشی قبل از برخورد از جمع انرژی جنبشی بعد از برخورد بزرگتر است.

تفاوت این انرژی به گرما تبدیل می‌شود.

(c.2) برخوردهای انفجاری: $T_A + T_B < T_C + T_D$

کل انرژی جنبشی بعد از برخورد بزرگتر از کل انرژی جنبشی قبل از برخورد است.

تفاوت انرژی جنبشی تبدیل به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود.

(c.3) برخوردهای الاستیک: $T_A + T_B = T_C + T_D$

پایستگی انرژی قبل و بعد از برخورد.

← برخوردهای نسبیتی:

(a) در برخورد نسبیتی P^μ پایسته است: $P^\mu_A + P^\mu_B = P^\mu_C + P^\mu_D$

a) $E_A + E_B = E_C + E_D$

b) $\vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{P}_C + \vec{P}_D$

(b) انرژی جنبشی (تفاوت انرژی کل و انرژی حالت سکون) مانند مکانیک کلاسیک فقط در برخوردهای الاستیک پایسته است.

- از آنجا که انرژی جنبشی نسبیتی $E_{kin} = E - mc^2$ لزوماً پایسته نیست ولی E پایسته است، پس در نتیجه برخورد مثلاً اگر E_{kin} کم شود، mc^2 باید زیاد شود (پس mc^2 پایسته نیست).

(a) برخورد کاملاً غیر الاستیک : انرژی جنبشی بعد از برخورد کم می‌شود، پس انرژی سکون mc^2 و در نتیجه جرم کل بعد از برخورد بزرگ‌تر می‌شود.

(b) برخورد انفجاری : انرژی جنبشی بعد از برخورد زیاد می‌شود، پس انرژی سکون mc^2 و در نتیجه جرم کل بعد از برخورد کوچک‌تر می‌شود

(c) برخورد الاستیک : انرژی جنبشی کل قبل از برخورد بلا تغییر می‌ماند. در نتیجه انرژی سکون mc^2 و در نتیجه جرم کل نیز تغییر نمی‌کند.

در مکانیک کلاسیک : می‌گوییم اگر در برخورد غیر الاستیک انرژی جنبشی بعد از برخورد کمتر از انرژی جنبشی قبل از برخورد باشد باقیمانده انرژی به شکل دیگری از انرژی (گرمایی ... امثالهم) تبدیل می‌شود.

در مکانیک نسبیتی : اصولاً صحبتی از اشکال مختلف انرژی نیست. آنچه در برخورد غیر الاستیک افزایش پیدا کرده جرم است (انرژی حالت سکون mc^2) به این ترتیب انرژی گرمایی بخشی از جرم است.

این مثل این است که بگوییم سیب زمینی داغ از سیب زمینی سرد سنگین‌تر است. ← Griffiths
یا فنر فشرده از فنر باز سنگین‌تر است.

البته در ابعاد ماکروسکوپیک میزان این تغییر جرم بسیار کوچک است. ولی در فیزیک هسته‌ای و ذرات مقیاس‌ها بسیار کوچکند و این تغییر در انرژی سکون ذرات مقدار قابل ملاحظه‌ای می‌شود و قابل صرفنظر کردن نیست.

مثال‌های برخورد نسبیتی : قبل از برخورد : $\circ\!\rightarrow \quad \leftarrow\!\circ$ (1) (2) — مثال ۱

$$m_1 = m_2 = m$$

$$v = \frac{3}{5}c$$

بعد از برخورد : ∞ M — $M = ?$

برخورد غیر الاستیک : برخورد غیر الاستیک است ولی p^μ پایسته است:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_M^\mu$$

$$E_1 + E_2 = E_M$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_M$$

a) $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \rightarrow \vec{P}_1 = -\vec{P}_2 \Rightarrow \vec{P}_M = \vec{0}$

b) $E_1 = \gamma m_1 c^2 \underset{m_1 = m_2 \equiv m}{=} \gamma m_2 c^2 = E_2 \Rightarrow E_1 + E_2 = E_M = 2mc^2\gamma$

$$E_M = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \underset{\frac{v}{c}=\frac{3}{5}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4} \times 2mc^2 = \frac{5}{2} mc^2 \equiv Mc^2 \rightarrow \boxed{M = \frac{5}{2} m}$$

به این ترتیب جرم M دو و نیم برابر جرم هر کدام از ذراتی است که در برخورد شرکت می کنند. $m_1 + m_2 = 2m \neq M$

مثال ۲

$$A \rightarrow B + C$$

قبل از برخورد $v = 0 \ (\rightarrow \gamma = 1)$ $\quad M_A = M \quad E_M = Mc^2\gamma = Mc^2$

بعد از برخورد $\leftarrow\!\bigcirc\ \bigcirc\!\rightarrow$ (1) (2) $\quad m_1 = m_2 \equiv m$

$$E_1 + E_2 = 2mc^2\gamma$$

سؤال: سرعت بعد از برخورد؟

$$E_1 + E_2 = E_M$$

$$2mc^2\gamma = Mc^2 \rightarrow \gamma = \frac{M}{2m} \quad \text{or} \quad \gamma^2 = \frac{M^2}{4m^2}$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) = \frac{4m^2}{M^2} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{4m^2}{M^2} \rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$$

• برای اینکه واپاشی $M \rightarrow 2m$ انجام شود باید اقل $M = 2m$ باشد (جرم آستانه)

$$d \rightarrow p + n$$

دوترون d، proton p، neutron n

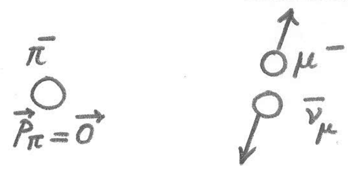
$$1875.6 \text{ MeV} \rightarrow 1877.9 \text{ MeV}$$

از آنجائیکه جرم دوترون از مجموع جرم نوترون و پروتون کمتر است، دوترون پایدار است.

برعکس اگر جرم یک موجود ترکیبی (composite) بیشتر از جرم ذرات تشکیل دهنده آن باشد، ذره اولیه خود بخود فرو می پاشد.

سؤال ۳

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$



مطلوب است E_{μ^-} و $|\vec{v}_{\mu^-}|$ ؟ $\leftarrow$

روش اول

$$\vec{P}_\pi = \vec{P}_\mu + \vec{P}_{\bar{\nu}} \Rightarrow \vec{P}_\mu = -\vec{P}_{\bar{\nu}}$$

$$E_\pi = E_\mu + E_{\bar{\nu}}$$

جرم حالت سکون پایون $E_\pi = m_\pi c^2 \quad (\text{for } \vec{P}_\pi = \vec{0})$

$$E_\mu = c\sqrt{m_\mu^2 c^2 + \vec{P}_\mu^{\,2}}$$

$0 =$ جرم نوترینو $\to E_{\bar{\nu}} = c\,|\vec{P}_\nu| \xrightarrow[\vec{P}_\nu = -\vec{P}_\mu]{} c\,|\vec{P}_\mu|$

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu$$

$$m_\pi c^2 = c\sqrt{\vec{P}_\mu^{\,2} + m_\mu^2 c^2} + c\,|\vec{P}_\mu| \to$$

$$m_\pi c = \sqrt{\vec{P}_\mu^{\,2} + m_\mu^2 c^2} + |\vec{P}_\mu|$$

$$m_\pi c - |\vec{P}_\mu| = \sqrt{\vec{P}_\mu^{\,2} + m_\mu^2 c^2} \Rightarrow \left(m_\pi c - |\vec{P}_\mu|\right)^2 = \vec{P}_\mu^{\,2} + m_\mu^2 c^2$$

$$m_\pi^2 c^2 + \cancel{\vec{P}_\mu^{\,2}} - 2 m_\pi c\,|\vec{P}_\mu| = \cancel{\vec{P}_\mu^{\,2}} + m_\mu^2 c^2$$

$$\boxed{|\vec{P}_\mu| = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)\,c}{2 m_\pi}}$$

$$E_\mu = c\sqrt{\vec{P}_\mu^{\,2} + m_\mu^2 c^2} = c\sqrt{\frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 c^2}{4 m_\pi^2} + m_\mu^2 c^2}$$

$$= c^2\sqrt{\frac{m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2 m_\pi^2 m_\mu^2 + 4 m_\pi^2 m_\mu^2}{4 m_\pi^2}} = c^2\sqrt{\frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)^2}{4 m_\pi^2}}$$

$$\to E_\mu = c^2\,\frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)}{2 m_\pi}$$

از طرفی

$$E_\mu = \gamma m_\mu c^2 \to \gamma m_\mu = \frac{E_\mu}{c^2}$$

$$\vec{P}_\mu = \gamma m_\mu \vec{v}_\mu \Rightarrow \vec{v}_\mu = \frac{\vec{P}_\mu}{\gamma m_\mu} \to |\vec{v}_\mu| = \frac{|\vec{P}_\mu|}{\gamma m_\mu} = \frac{|\vec{P}_\mu|\,c^2}{E_\mu}$$

$$\to |\vec{v}_\mu| = \left(\frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)\,c}{\cancel{2 m_\pi}}\right)\frac{\cancel{2 m_\pi}}{c^2 (m_\pi^2 + m_\mu^2)} =$$

$$\boxed{|\vec{v}_\mu| = c\,\frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{(m_\pi^2 + m_\mu^2)}}$$

روش دوم: همین مسئله را با استفاده از چاربردار [illegible] (تکانه و انرژی) می‌توان ساده‌تر حل کرد:

(۱) برای تمام ذرات حقیقی (غیرمجازی) رابطه پایستگی $P^2 = m^2c^2$ را داریم

a)
$$P_\pi^2 = m_\pi^2 c^2 \xrightarrow[\vec{P}_\pi = \vec{0}]{} E_\pi^2 = m_\pi^2 c^4 \rightarrow E_\pi = m_\pi c^2$$

$$P_\mu^2 = m_\mu^2 c^2$$

$$P_\nu^2 = 0$$

b) با پایستگی انرژی - تکانه

$$P_\pi = P_\mu + P_\nu \quad \text{or} \quad P_\nu = P_\pi - P_\mu$$

$$P_\nu^2 = (P_\pi - P_\mu)^2 = P_\pi^2 + P_\mu^2 - 2 P_\pi \cdot P_\mu$$

We use
$$P_\pi \cdot P_\mu = P_\pi^0 P_\mu^0 - \underbrace{\vec{P}_\pi}_{0} \cdot \vec{P}_\mu = P_\pi^0 P_\mu^0$$
$$= \frac{E_\pi}{c} \frac{E_\mu}{c}$$
$$= \frac{(m_\pi c^2) E_\mu}{c^2} = m_\pi E_\mu$$

$$P_\nu^2 = 0 \rightarrow \quad 0 = P_\pi^2 + P_\mu^2 - 2 P_\pi \cdot P_\mu = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2 m_\pi E_\mu$$

$$\Rightarrow \boxed{E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2) c^2}{2 m_\pi}}$$

c)
$$P_\mu = P_\pi - P_\nu$$

$$P_\mu^2 = P_\pi^2 + P_\nu^2 - 2 P_\pi \cdot P_\nu$$

$$\circ) \; P_\pi \cdot P_\nu = P_\pi^0 P_\nu^0 - \underbrace{\vec{P}_\pi}_{0} \cdot \vec{P}_\nu = \frac{E_\pi}{c} \frac{E_\nu}{c} = \frac{(m_\pi c^2) E_\nu}{c^2}$$
$$= m_\pi E_\nu$$

$$P_\mu^2 = P_\pi^2 + P_\nu^2 - 2 P_\pi \cdot P_\nu \Rightarrow m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 + 0 - 2 m_\pi E_\nu$$

$$\rightarrow E_\nu = \frac{(m_\mu^2 - m_\pi^2) c^2}{2 m_\pi} = |\vec{P}_\nu| c$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{P}_\nu| = \frac{(m_\mu^2 - m_\pi^2) c}{2 m_\pi}} = |\vec{P}_\mu|$$

حال
$$E_\mu = \gamma m_\mu c^2 \rightarrow \gamma m_\mu = \frac{E_\mu}{c^2} \quad \text{و} \quad \vec{P}_\mu = \gamma m_\mu \vec{v}_\mu$$

$$\rightarrow \vec{v}_\mu = \frac{\vec{P}_\mu}{\gamma m_\mu} = \frac{\vec{P}_\mu}{E_\mu} c^2$$

$$|\vec{v}_\mu| = \frac{|\vec{P}_\mu|}{E_\mu} c^2 = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{(m_\pi^2 + m_\mu^2)} c$$

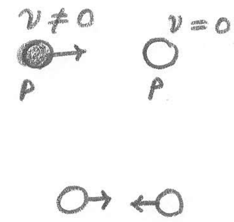
که این همان نتیجه قبلی است.

مثال ۴:

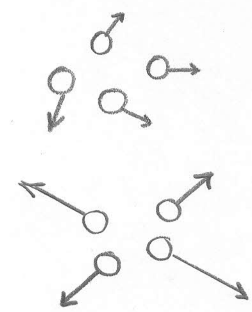
$P + P \to P + P + \bar{P} + P$

دستگاه آزمایشگاه (هدف ثابت) Lab   (1)

دستگاه مرکز جرم (CM)   (2)



قبل از برخورد



بعد از برخورد

فرض: ذرات تولید شده بعد از برخورد در حال سکون هستند.

سوال: انرژی آستانه برای این برخورد را محاسبه کنید. (کمترین مقدار انرژی که پروتون برخورد کننده باید داشته باشد برای اینکه یک جفت پروتون ـ آنتی پروتون تولید کند).

قبل از برخورد

Lab: $$(P^\mu_{tot})_{\text{قبل}} = (P_1^\mu + P_2^\mu) = \left(\frac{E_{tot}}{c}, \vec{P}_{tot}\right)_{\text{قبل}}$$
$$= \left(\frac{E}{c}, |\vec{P}|, 0, 0\right) + \left(\frac{mc^2}{c}, \vec{0}\right)$$

سرعت پروتون هدف برابر صفر است.

$$= \left(\frac{(E+mc^2)}{c}, |\vec{P}|, 0, 0\right)$$

CM: $$(P'^\mu_{tot})_{\text{قبل}} = (P_1'^\mu + P_2'^\mu)_{\text{قبل}} = \left(\frac{E'}{c}, |\vec{P}|, 0, 0\right) + \left(\frac{E'}{c}, -|\vec{P}|, 0, 0\right)$$
$$= \left(\frac{2E'}{c}, \vec{0}\right)$$

• مطلوب است E و E'؟

بعد از برخورد

Lab: $$(P^\mu_{tot})_{\text{بعد}} = (P_1^\mu + P_2^\mu + P_3^\mu + P_4^\mu)_{\text{بعد}} = \cdots = (P^\mu_{tot})_{\text{قبل}}$$

CM: $$(P'^\mu_{tot})_{\text{بعد}} = (P_1'^\mu + P_2'^\mu + P_3'^\mu + P_4'^\mu)_{\text{بعد}} = (4mc, \vec{0})$$

$\vec{P}_{tot}$ در دستگاه مرکز جرم مساوی صفر است قبل از برخورد. به علت پایستگی تکانه بعد از برخورد هم در دستگاه مرکز جرم تکانه کل مساوی صفر است.

✓ در دستگاه آزمایشگاه جزئیات P_i^μ مهم نیست (بعد و قبل از برخورد) مهم این است: $(P^\mu_{tot})_{\text{قبل}} = (P^\mu_{tot})_{\text{بعد}}$

آنچه می‌دانیم: (a) پایستگی تکانه قبل و بعد از برخورد

lab: $(P^\mu_{tot})_{\text{قبل}} = (P^\mu_{tot})_{\text{بعد}}$

CM: $(P'^\mu_{tot})_{\text{قبل}} = (P'^\mu_{tot})_{\text{بعد}}$

(b) می‌دانیم که حاصلضرب $P^\mu_{tot} P_\mu^{tot}$ قبل و بعد از برخورد در هر دو دستگاه تغییر نمی‌کند.

a) $$\left(P^{\mu}_{tot}\ P_{\mu\, tot}\right)_{\text{قبل}} = \left(P^{\mu}_{tot}\ P_{\mu\, tot}\right)_{\text{بعد}} \qquad (1)$$

$$\left(P'^{\mu}_{tot}\ P'_{\mu\, tot}\right)_{\text{قبل}} = \left(P'^{\mu}_{tot}\ P'_{\mu\, tot}\right)_{\text{بعد}} \qquad (2)$$

b) $$\left(P^{\mu}_{tot}\ P_{\mu\, tot}\right)_{\text{بعد}} = \left(P'_{\mu\, tot}\ P'^{\mu}_{tot}\right) \qquad (3)$$

که از ناوردایی نسبتی حاصلضرب دو چاربردار وقتی از دستگاهی به دستگاه دیگر می‌رویم می‌آید.

(1, 3) $$\left(P^{\mu}_{tot}\ P_{\mu\, tot}\right)_{\text{قبل}} = \left(P'_{\mu\, tot}\ P'^{\mu}_{tot}\right)_{\text{بعد}}$$

$$\left(\frac{E+mc^2}{c}\right)^2 - \vec{P}^2 = (4mc)^2 = 16m^2c^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} + m^2c^2 + 2mE - \vec{P}^2 = 16m^2c^2 \qquad (1)$$

از طرفی

$$P_\mu P^\mu = m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2 \Rightarrow \vec{P}^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2$$

جایگذاری در (1)

$$\cancel{\frac{E^2}{c^2}} + \cancel{m^2c^2} + 2mE - \left(\cancel{\frac{E^2}{c^2}} - \cancel{m^2c^2}\right) = 16m^2c^2$$

$$2mE = 16m^2c^2 - 2m^2c^2 = 14m^2c^2$$

$$\rightarrow \boxed{E = 7mc^2}$$

همچنین از الف خواهیم داشت:

$$\left(P'^{\mu}_{tot}\right)_{\text{قبل}} = \left(P'^{\mu}_{tot}\right)_{\text{بعد}}$$

$$\frac{2E'}{c} = 4mc \rightarrow \boxed{E' = 2mc^2}$$

نکته ۱: E انرژی پروتون در دستگاه آزمایشگاه است. در صورتیکه آزمایش طوری طراحی شود که یک پروتون ساکن باشد و دیگری حرکت کند و برخورد انجام شود، در اینصورت min انرژی لازم برای این کار $E = mc^2 + 6mc^2$ باید ۶ برابر انرژی حالت سکون یک پروتون باشد تا به پروتون درحال حرکت انرژی جنبشی لازم برای تولید یک پروتون ـ آنتی پروتون اضافی را بدهد.

نکته ۲: اگر آزمایش را بصورت هدف ثابت انجام ندهیم، بلکه پروتونها با $\vec{P}$ مساوی و مختلف العلامه از دو سو به هم برخورد کنند باید مقدار انرژی جنبشی اضافه ای که به آنها می‌دهیم مساوی انرژی حالت سکون خودشان باشد تا اینکه پروتون و آنتی پروتون اضافه تولید شود.

(البته فرض بر این است که ذرات تولید شده بعد از برخورد در حالت درحال سکون هستند).

روش دوم به صرفه‌تر است.

مثال ۵: فرض کنید دو ذره یکسان داریم، هر کدام با جرم m، انرژی جنبش هر کدام مساوی T است. فرض می‌کنیم دو ذره از روبرو با هم برخورد می‌کنند:

a) قبل از برخورد $\quad O\rightarrow \leftarrow O$

$$\left(p^{\mu}_{tot}\right)^{(a)}_{\text{قبل}} = \left(\frac{2E}{c}, \vec{0}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) + \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)$$

سؤال: انرژی جنبش کلی از ذره‌ها را در دستگاه سکون ذره دوم بدست آورید. (T' برحسب T)

b) $\quad O\rightarrow \quad O$

$$\left(p'^{\mu}_{tot}\right)^{(b)}_{\text{قبل}} = \left(\frac{E'+mc^2}{c}, \vec{p}'\right)$$

به علت ناوردائی نسبیتی قبل از برخورد:

$$\left(p'_{\mu tot}\, p'^{\mu tot}\right)_{\text{قبل}} = \left(p_{\mu tot}\, p^{\mu}_{tot}\right)_{\text{قبل}}$$

$$\left(\frac{E'+mc^2}{c}\right)^2 - \vec{p}'^2 = \left(\frac{2E}{c}\right)^2$$

$$\frac{E'^2}{c^2} + m^2c^2 + 2mE' - \vec{p}'^2 = \frac{4E^2}{c^2} \qquad (1)$$

$$p'_{\mu}p'^{\mu} = \frac{E'^2}{c^2} - \vec{p}'^2 = m^2c^2 \longrightarrow \vec{p}'^2 = \frac{E'^2}{c^2} - m^2c^2$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \cancel{\frac{E'^2}{c^2}} + m^2c^2 + 2mE' - \cancel{\frac{E'^2}{c^2}} + m^2c^2 = \frac{4E^2}{c^2}$$

$$2m^2c^2 + 2mE' = \frac{4E^2}{c^2}$$

$$\boxed{2E^2 = mc^2\left(E' + mc^2\right)} \quad \star$$

در مورد انرژی جنبش نسبیتی داریم: $\quad T' = E' - mc^2 \qquad T = E - mc^2$

$$\overset{\star}{\Longrightarrow} 2\left(T+mc^2\right)^2 = mc^2\left(T' + mc^2 + mc^2\right)$$

$$2T^2 + \cancel{2m^2c^4} + 4Tmc^2 = T'mc^2 + \cancel{2m^2c^4}$$

$$\boxed{T' = 4T + \frac{2T^2}{mc^2} = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right)}$$

انرژی جنبش در دستگاه حالت سکون یکی از ذره‌ها

مثال عددی: فرض کنید ذره مورد نظر الکترون باشد با جرم حالت سکون $m_ec^2 = 0.5MeV$
$= 5\times10^{-4} GeV$

انرژی جنبش را مساوی $T = 1GeV$ می‌گیریم در اینصورت

$$T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2m_ec^2}\right) = 4\left(1 + \underbrace{\frac{1}{2\times5\times10^{-4}}}_{10^3}\right) GeV \simeq 4TeV$$

این به این معنی است که اگر الکترون را به اندازه $1GeV$ انرژی جنبش بدهیم ولی از دید ذره‌ای که همین الکترون به آن برخورد می‌کند، انرژی الکترون برخورد کننده مساوی $4TeV$ است.

حد غیرنسبیتی: $T \ll m_ec^2 \Rightarrow T' = 4T$ و این درست است چون در حالت (b) ذره ساکن سرعت ذره متحرک را دو برابر می‌بیند. به این ترتیب انرژی جنبشی آن را ۴ برابر خواهد دید.