همینطور که نشان داده شد: $Z_1 = Z_2$ (در رتبه اول اختلال)

* جالب است بدانیم که این رابطه در تمام مراتب اختلال صحیح است. $\longleftarrow$ Ward - identity

$Z_g = ?$

$$g_B = g\mu^{\epsilon/2} \underbrace{Z_1 Z_2^{-1}}_{=1} Z_3^{-1/2} = g\mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1/2}$$

$$g_B = \underbrace{g\mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1/2}}_{Z_g} \quad \text{with} \quad Z_3 = 1 - \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon} + O(g^4)$$

$$\rightarrow g_B = g Z_g$$

Renormalization of QED:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} = iZ_2 \bar{\psi}\not{\partial}\psi - (m+A)\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2} Z_3 A_\mu\left(-\Box g^{\mu\nu} + (1-\tfrac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu$$
$$- g\mu^{\epsilon/2} Z_1 \bar{\psi}\not{A}\psi$$

$\psi = Z_2^{-1/2}\psi_B \quad ; \quad Z_2 = (1+B)$ مقایسه با گرینر : Gare

$m_B = (m+A) Z_2^{-1} = Z_m m$

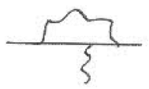
$A_\mu = Z_3^{-1/2} A_\mu^B \quad ; \quad Z_3 = (1+C)$

$g_B = g\mu^{\epsilon/2} Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \quad ; \quad Z_1 = (1+D)$

✓ Determination of A, B, C & D in one-loop level:

a)  $= -i\Sigma^{(1)}(p) = \frac{-ig^2}{8\pi^2\epsilon}(-\not{p} + 4m) +$ finite

b)  $= i\Pi^{\mu\nu}_{(1)}(p) = \frac{ig^2}{6\pi^2\epsilon}(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) +$ finite

c)  $= ig\mu^{\epsilon/2}\Lambda^{(1)}_\mu(p) = ig\mu^{\epsilon/2}\left(\frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\gamma_\mu\right) +$ finite

---

a) The fermionic part:

$$(\mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT})_{fermion} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + iB\bar{\psi}\not{\partial}\psi - A\bar{\psi}\psi$$

$\rightarrow$ انتشارگر کامل همراه با تمام جملات CT = 

$i\not{\partial} \rightarrow \not{p}$ در فضای تکانه $\times -i$ $\Big\{ -i(\not{p} - m) + (-i\Sigma(p)) + B\not{p} - iA$

یادآوری می‌کنیم که انتشارگر کامل فرمیونی با در نظر گرفتن نمودار خودانرژی ولی بدون در نظر گرفتن سهم Counter term ها عبارت بود از:

$$S_F = S_F^{(0)} + S_F^{(0)}\left(-i\Sigma(p)\right)S_F^{(0)} + \dots$$
$$= S_F^{(0)}\left(1 - i\Sigma(p)\, S_F^{(0)}(p) + \dots\right)$$
$$= \frac{S_F^{(0)}}{1 + i\Sigma(p) S_F^{(0)}} = \frac{1}{\left(S_F^{(0)}(p)\right)^{-1} + i\Sigma(p)}$$

اگر همین انتگرالها را با در نظر گرفتن جملات CT بخواهیم بدست آوریم، داریم:

$$S_F = \frac{1}{\left(S_F^{(0)}(p)\right)^{-1} + i\Sigma(p) + iA - iB\not p} = \frac{1}{-i\not p + im + i\Sigma_{div} + i\Sigma_{fin.} + iA - iB\not p}$$

$$= \frac{i}{\not p - m - \underbrace{\Sigma_{div}}_{\frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}(-\not p + 4m)} - \Sigma_{fin.} - A + B\not p} = \frac{i}{\not p - m + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\not p - \frac{g^2}{2\pi^2\epsilon} m - A + B\not p}$$

$$\rightarrow \boxed{A = -\frac{mg^2}{2\pi^2\epsilon} \quad ; \quad B = -\frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}}$$

$$\hookrightarrow Z_2 = 1 + B = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} + O(g^4)$$

$$m_B = (m + A) Z_2^{-1} = \left(m - \frac{mg^2}{2\pi^2\epsilon}\right)\left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\right)^{-1} \sim$$
$$\cong m\left(1 - \frac{g^2}{2\pi^2\epsilon}\right)\left(1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\right)$$
$$\sim m\underbrace{\left(1 - \frac{3g^2}{8\pi^2\epsilon} + O(g^4)\right)}_{Z_m} \quad \rightarrow m_B = Z_m\, m \ \text{ with}$$

$$\boxed{Z_m = 1 - \frac{3g^2}{8\pi^2\epsilon} + O(g^4)}$$

---

a) • Renormalized Fermion Propagator: $\psi_B = Z_2^{1/2}\psi$

$$\langle \psi\bar\psi \rangle \overset{?}{=} Z_2^{-1} \langle \psi_B \bar\psi_B \rangle$$

$$\underbrace{\frac{i}{\not p - m - \Sigma_f(p, m)}}_{\text{طرف چپ}} \overset{?}{=} \underbrace{Z_2^{-1}\frac{i}{\not p - m_B - \Sigma_{div}(m_B, p) - \Sigma_f(m_B, p)}}_{\text{طرف راست.}}$$

$$= \frac{i}{\underbrace{Z_2}_{1+B}\left[\not p - (m+A)Z_2^{-1} - \Sigma_{div}(m_B, p) - \Sigma_f(m_B, p)\right]}$$

طرف راست

$$= \frac{i}{\not p + \not p B - (m+A) - \Sigma_{div}(m, p) - \Sigma_f(m, p)}$$

• $Z_2 \Sigma_{div}(m_B, p) = (1+B)\, \Sigma_{div}(\underbrace{Z_m m}_{= m_B = m(1+O(g^2))}, p)$

$O(g^2)$

در ضمن خود Σ_{div} از مرتبه g^2 است.

$$\Rightarrow Z_2 \Sigma_{div}(m_B, p) \simeq \Sigma_{div}(m, p)$$

و همین ترتیب برای Σ_f.

• حالا با توجه به اینکه $\Sigma_{div}(m, p) = \not p B - A$ خواهیم داشت:

$$\text{طرف راست} = \frac{i}{\not p + \not p B - m - A - \not p B + A - \Sigma_f} = \frac{i}{\not p - m - \Sigma_f(m,p)} = \text{طرف چپ} \;\therefore$$

b) • Renormalized Photon Propagator:

$$\mathcal{L}_B^{gauge} = \mathcal{L}^{g.} + \mathcal{L}_{CT}^{g.} = -\frac{1}{4}(1+C)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{gauge fixing} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{B}F_{B}^{\mu\nu}$$

یادآوری:

$$D_{\mu\nu} = \overset{\mu\quad\nu}{\sim\sim} + \sim\!\bullet\!\sim + \sim\!\bullet\!\sim\!\bullet\!\sim + \cdots$$

$$= D_{\mu\nu}^{(0)} + D_{\mu\rho}^{(0)}\left(-i\Pi^{\rho\sigma}(p)\right)D_{\sigma\nu}^{(0)} + \cdots = \frac{ig_{\mu\nu}}{k^2}\left(1 - \Pi(k^2) + \cdots\right)$$

$$\sim \frac{ig_{\mu\nu}}{k^2(1+\Pi(k^2))}$$

$$\Pi^{\rho\sigma} = (k^\rho k^\sigma - k^2 g^{\rho\sigma})\,\Pi(k^2)$$

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{ig_{\mu\nu}}{k^2(1+\Pi_{div}+\Pi_{f.})}$$ Full photon propagator (unrenormalized)

که در آن Π_{div} شامل ∞ است.

$$\Pi_{div}(k) = \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon} + O(g^4)$$

• می‌خواهیم برای تعیین C، در نهایت Z_3 از روش قبلی محاسبه است اگر میدان بازبهنجار شده استفاده کنیم؛ یعنی تعریف

$$\langle A_\mu A_\nu \rangle = Z_3^{-1} \langle A_\mu^B A_\nu^B \rangle$$

انتشارگر آزاد باز بهنجار شده $\longrightarrow$ $D_{\mu\nu}^{(0)\,ren} = \frac{Z_3^{-1}\, i g_{\mu\nu}}{k^2}$ (در چپ بهنجار bare)

با استفاده از همین انتشارگر آزاد باز بهنجار شده سری اختلال را در نظر می گیریم و انتشارگر کامل باز بهنجار شده را بدست میاوریم:

$$\text{کامل}\; D_{\mu\nu}^{ren} = \frac{i g_{\mu\nu} Z_3^{-1}}{k^2} + \frac{i g_{\mu\rho} Z_3^{-1}}{k^2}\underbrace{\left(-i\Pi^{\rho\sigma}(k)\right)}_{= -i(k^\rho k^\sigma - k^2 g^{\rho\sigma})\Pi(k^2)}\frac{i g_{\sigma\nu} Z_3^{-1}}{k^2} + \dots$$

$$= \frac{i g_{\mu\nu} Z_3^{-1}}{k^2}\left(1 - Z_3^{-1}\,\Pi(k^2) + \dots\right)$$

$$= \frac{i g_{\mu\nu} Z_3^{-1}}{k^2}\,\frac{1}{1 + Z_3^{-1}\,\Pi(k^2)} \simeq \frac{i g_{\mu\nu} Z_3^{-1}}{k^2\left(1 + \Pi(k^2)\right)}$$

$Z_3^{-1}\Pi = \Pi$

Z_3: $1 + C = 1 + O(g^2)$, $\Pi(k^2) \sim O(g^2)$

$$\cong \frac{i g_{\mu\nu}}{k^2\left(Z_3 + \Pi(k^2)\right)} = \frac{i g_{\mu\nu}}{k^2\left(1 + C + \Pi_{div}(k^2) + \Pi_{finite}\right)}$$

اگر $C = -\Pi_{div} = \frac{-g^2}{6\pi^2\epsilon} + O(g^4)$ در انتشارگر کامل فوتون دیگر ∞ ظاهر نمی شود.

به این ترتیب

$$\boxed{Z_3 = 1 + C = 1 - \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon} + O(g^4)}$$

Coupling Constant and RG – β function:

با بهنجارش فیزیکی را چنان باز تعریف کردیم که در حد تک حلقه دیگر در انتشارگر (فرمیونی / فوتونی) بینهایتی ظاهر نمی شد. دیگر رأس ها هم در حد تک حلقه بینهایت ندارند. برای اینکار از روابط زیر استفاده کردیم

a) $m + \delta m = m_B$

m: ∞ ندارد ، δm: ∞ دارد ، m_B: ∞ دارد

b) $\psi_B = Z_2^{1/2}\psi$

c) $A_\mu^B = Z_3^{1/2} A_\mu$

d) $g_B = g\mu^{\epsilon/2}\,\underbrace{Z_1 Z_2^{-1}}_{=1}\,Z_3^{-1/2} = g\mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1/2}$

نامگذاری: $\psi \equiv \psi_{Ren.} \equiv \psi_{phys}$ و به همین ترتیب m ، A_μ .

• g_B ثابت جفت‌شدگی bare است که شامل ∞ است و به μ بستگی ندارد. برعکس $g_{ren.} = g(\mu)$ تابعی است از مقیاس انرژی.

$g(\mu)$ $\qquad \mu =$ sliding scale

or subtraction point

$g(\mu)$ running coupling constant.

سؤال: g برحسب μ چگونه تغییر می‌کند؟

$$\boxed{\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}}$$

Gell-Mann β-Function $\qquad$ Callan-Symanzik β-function

<u>β-Function of QED:</u>

$$\mu \frac{\partial g_B}{\partial \mu} = 0 \longrightarrow \mu \frac{\partial g(\mu)}{\partial \mu} = \beta(g(\mu))$$

$$\mu \frac{\partial g_B}{\partial \mu} = 0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\left(g \mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1/2}\right) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\left(g\mu^{\epsilon/2}\left(1 + \frac{g^2}{12\pi^2\epsilon}\right)\right)$$

$$= \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g\right)\mu^{\epsilon/2}\left(1 + \frac{g^2}{12\pi^2\epsilon}\right) + g\frac{\epsilon}{2}\mu^{\epsilon/2 - 1}\mu\left(\frac{g^2}{12\pi^2\epsilon} + 1\right)$$

$$+ g\mu^{\epsilon/2}\frac{2g\mu\frac{\partial g}{\partial \mu}}{12\pi^2\epsilon}$$

$$= \beta(g)\,\mu^{\epsilon/2}\left(1 + \frac{g^2}{12\pi^2\epsilon}\right) + \frac{g\epsilon}{2}\mu^{\epsilon/2}\left(1 + \frac{g^2}{12\pi^2\epsilon}\right)$$

$$+ g\mu^{\epsilon/2}\frac{g\beta(g)}{6\pi^2\epsilon}$$

$$0 = \mu^{\epsilon/2}\beta(g)\left(1 + \frac{3g^2}{12\pi^2\epsilon}\right) + \frac{g\epsilon}{2}\mu^{\epsilon/2}\left(1 + \frac{g^2}{12\pi^2\epsilon}\right)$$

$$\beta(g) = \frac{-\frac{\epsilon}{2}g\mu^{\epsilon/2}\left(1 + \frac{g^2}{12\pi^2\epsilon}\right)}{\mu^{\epsilon/2}\left(1 + \frac{3g^2}{12\pi^2\epsilon}\right)} \sim -\frac{\epsilon}{2}g\left(1 + \frac{g^2}{12\pi^2\epsilon}\right)\left(1 - \frac{3g^2}{12\pi^2\epsilon}\right)$$

$$= -\frac{\epsilon}{2}g\left(1 - \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon}\right) + O(g^4)$$

$$= -\frac{\epsilon}{2}g + \frac{g^3}{12\pi^2} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \frac{g^3}{12\pi^2}$$

$$\boxed{\beta(g) = b_0 g^3 \quad \text{with} \quad b_0 = +\frac{1}{12\pi^2} > 0}$$

برخلاف QED در QCD علامت b_0 منفی است، و این منجر می‌شود به آزادی مجانبی در انرژی‌های بالا و محبوس‌شدگی در انرژی‌های پایین.

حل معادله $\quad \mu \dfrac{\partial g}{\partial \mu} = \beta(g)$

$$\mu \frac{\partial g(\mu)}{\partial \mu} = \beta(g) = b_0 g^3(\mu)$$

$$\rightarrow \frac{dg(\mu)}{b_0 g^3(\mu)} = \frac{d\mu}{\mu} \rightarrow \left. \frac{-1}{2b_0 g^2(\mu)} \right|_{\mu_0}^{\mu} = \ln\mu \Big|_{\mu_0}^{\mu}$$

$$\rightarrow \frac{-1}{2b_0 g^2(\mu)} + \frac{1}{2b_0 g^2(\mu_0)} = \ln\frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow \frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{1}{g^2(\mu_0)} = -2b_0 \ln\frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - 2b_0 \ln\frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow \boxed{g^2(\mu) = \frac{g^2(\mu_0)}{1 - 2b_0 g^2(\mu_0) \ln\frac{\mu}{\mu_0}}}$$

μ – is an arbitrary renormalization point

μ_0 is the subtraction point.

• در حل معادله دیفرانسیل باید μ_0 و در نتیجه $g(\mu_0)$ معین باشند تا بتوان مقدار $g^2(\mu)$ را (البته تا تقریب مرتبه تک حلقه) تعیین کرد.

✓ با وجود این می‌توان بصورت زیر رابطه‌ای مستقل از μ_0 برای $g(\mu)$ بدست آورد.

Λ_{RG} = Renormalization Group invariant scale. مقیاس ناوردای گروه بازبهنجارش

در حین استدلال قبلی به رابطهٔ زیر رسیدیم:

$$\ln\frac{\mu}{\mu_0} = -\frac{1}{2b_0}\left(\frac{1}{g^2(\mu)} - \frac{1}{g^2(\mu_0)}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} = e^{-\frac{1}{2b_0 g^2(\mu)}} \, e^{+\frac{1}{2b_0 g^2(\mu_0)}} \longrightarrow \mu_0 e^{+\frac{1}{2b_0 g^2(\mu_0)}} = \mu e^{+\frac{1}{2b_0 g^2(\mu)}} \equiv \Lambda_{RG} = \text{const.}$$

$$\boxed{\Lambda_{RG} = \mu_0 \exp\left(\frac{1}{2b_0 g^2(\mu_0)}\right) = \mu \exp\left(\frac{1}{2b_0 g^2(\mu)}\right)}$$

به این ترتیب Λ_{RG} به ازای مقیاس‌های مختلف تغییر نمی‌کند.

با استفاده از Λ_{RG} داریم:

$$\frac{\Lambda_{RG}}{\mu} = \exp\left(\frac{1}{2b_0 g^2(\mu)}\right)$$

$$\rightarrow g^2(\mu) = \frac{1}{2b_0 \ln\frac{\Lambda_{RG}}{\mu}} \qquad b_0^{QED} = \frac{1}{12\pi^2}$$ برای one-loop.

$$g^2(\mu) = \frac{1}{2b_0 \ln \frac{\Lambda_{RG}}{\mu}}$$

In QED : $b_0 > 0$

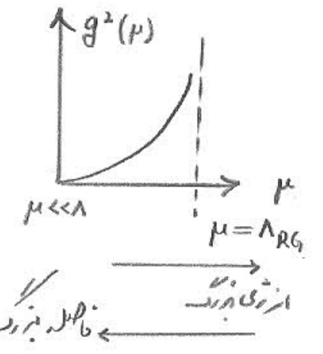
a) $\mu \ll \Lambda$ or $\frac{\Lambda}{\mu} \gg 1 \to \ln\frac{\Lambda}{\mu} \gg 1 \to g^2(\mu) \simeq 0$

به این ترتیب در انرژی‌های کوچک ($\mu \ll \Lambda$) با کوچک کردن هرچه بیشتر انرژی $g^2(\mu)$ کوچک می‌شود (در حد one-loop)
در نتیجه فقط در انرژی‌های پایین می‌توان به بسط اختلالی اعتماد کرد.

b) $\mu \gg \Lambda$ or $\frac{\Lambda}{\mu} \ll 1 \to \ln\frac{\Lambda}{\mu} \ll 1 \to g^2(\mu)$ بزرگ می‌شود

• به این ترتیب در انرژی‌های بزرگ (نسبت به Λ) مقدار $g(\mu)$ بزرگ است، و در این مقیاس‌های انرژی $g^2(\mu)$ بزرگ است، نمی‌توان به نتایج اختلالی اعتماد کرد.

(البته این استدلال فقط در مرتبه اول اختلال صحیح است).



بحث در مورد علامت تابع β :

$$\beta(g(\mu)) = b_0 g^3(\mu) = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu}$$

QED: $b_0 > 0$ $\quad \mu\uparrow\ g\uparrow$ & $\mu\downarrow\ g\downarrow$ $\quad$ μ انرژی

$L\downarrow\ g\uparrow$ & $L\uparrow\ g\downarrow$ $\quad$ L فاصله

RG_ fixed point:

$$\beta(g)\Big|_{g=g_0} = 0 \to g_0 \text{ is a fixed point}$$

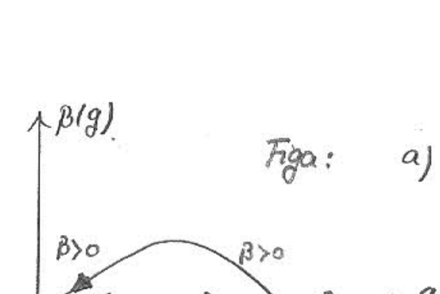
در نقطه fixed point مقدار g ثابت است و دیگر برحسب انرژی یا فاصله تغییر نمی‌کند.

نکته: ۱) QCD: $b_0 < 0$ $\quad \mu\uparrow\ g\downarrow$ & $\mu\downarrow\ g\uparrow$

$L\downarrow\ g\downarrow$ & $L\uparrow\ g\uparrow$

۲) دو نوع fixed point وجود دارد:

Figa



Figa: a) $g=0$ IR fixed point (or IR stable fixed point)

زیرا برای $g < 0$ اگر انرژی را کوچک کنیم ($\mu\downarrow$) ضریب جفت‌شدگی g هم کوچک می‌شود ($g\downarrow$) و به سمت $g\to 0$ می‌رود

b) $g = g_0$, UV fixed point (or UV stable f.p.)

b.1) $0 < g < g_0$ ($\beta(g) > 0 \to \mu\uparrow\ g\uparrow \Rightarrow g \to g_0$
پس چون با بزرگ شدن انرژی به سمت g_0 می‌رویم نقطه f.p. از نوع UV است)

b.2) $g > g_0$ ($\beta(g) < 0 \to \mu\uparrow\ g\downarrow \Rightarrow g \to g_0$
چون با بزرگ کردن انرژی به سمت g_0 می‌رویم نقطه f.p. از نوع UV است)

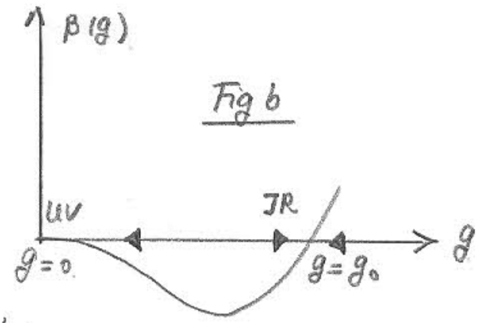


Fig 6:

a) حول $g=0$ for $g>0$ $(\beta<0) \longrightarrow \mu\uparrow \; g\downarrow \Rightarrow g\to 0$

پس نقطه $g=0$ از نوع UV-fixed point است.

b) 1) حول $g=g_0$ for $0<g<g_0$ $(\beta<0) \longrightarrow \mu\downarrow \; g\uparrow \Rightarrow g\to g_0$

2) for $g>g_0$ $(\beta>0) \longrightarrow \mu\downarrow \; g\downarrow \Rightarrow g\to g_0$

پس نقطه $g=g_0$ از نوع IR-fixed point است.

Running Mass:

علاوه بر g، جرم هم وابسته به انرژی است:

$$m_B = Z_m m$$

$$Z_m = 1-\frac{3g^2}{8\pi^2\epsilon}$$

Def: $m\gamma_m \equiv \mu\frac{d}{d\mu}m(\mu)$ ($\gamma_m \to$ کمیت بدون بعد نقش تابع β را بازی می‌کند)

برای بدست آوردن γ_m:

$$\mu\frac{d}{d\mu}m_B = 0 = \mu\frac{d}{d\mu}\left(Z_m m\right)$$

$$= \mu\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\frac{3g^2}{8\pi^2\epsilon}\right)m\right]$$

$$= m\left(\frac{-6g\,\underbrace{\mu\frac{d}{d\mu}g}_{=\beta(g)}}{8\pi^2\epsilon}\right)+\left(1-\frac{3g^2}{8\pi^2\epsilon}\right)\overbrace{\mu\frac{d}{d\mu}m}^{=m\gamma_m}$$

$$0 = m\left(\frac{-6g}{8\pi^2\epsilon}\right)\underbrace{\left(-\frac{\epsilon g}{2}+\frac{g^3}{12\pi^2}\right)}_{\beta(g(\mu))}+m\gamma_m\left(1-\frac{3g^2}{8\pi^2\epsilon}\right)$$

$$\curvearrowright\; m\gamma_m = \frac{-\left(\frac{3g^2}{8\pi^2}+O(g^4)\right)m}{\left(1-\frac{3g^2}{8\pi^2\epsilon}\right)} \simeq \frac{-3g^2m}{8\pi^2}\left(1+\frac{3g^2}{8\pi^2\epsilon}\right)\sim\frac{-3g^2m}{8\pi^2}+O($$

$\sim \frac{1}{\epsilon}$

$$\boxed{\longrightarrow\; \gamma_m = -\frac{3g^2}{8\pi^2}+O(g^3)}$$

$\beta(g)$ & $\gamma_m(g)$ are Callan–Symanzik Renormalization Group functions.