به نام خدا

درس مبانی برق ۱

مرجع درس : نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها - جلد اول

مؤلفین : ارنست کوه و چارلز دسور

مترجم : دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی

چارچوب خلاصه :

- مدارهای فشرده و قوانین کیرشهوف ← ۱ جلسه
- اجزاء مدار ← ۳ جلسه
- مدارهای ساده ← ۵ جلسه
- تقویت کننده عملیاتی ← ۱ جلسه
- مدارهای مرتبه اول ← ۶ جلسه
- مدارهای مرتبه دوم ← ۶ جلسه
- حالت دائمی سینوسی ← ۵ جلسه
- رفع اشکال قبل از پایان ترم ← ۱ جلسه

نمره دهی :

- میانترم ۵
- پایان ترم ۹
- کوئیز شماره ۱ ۱/۵
- کوئیز شماره ۲ ۱/۵
- ۶ سری تمرین ۳
- فعالیت سر کلاس ۱

- مدارهای نشرده
  * مدارهای نشرده
- اجزاء مدار
  * مقاومت‌ها و منابع نابسته، معادل تونن و نورتن و برخی از شکل موج‌ها
  * خازن‌ها و سلف‌ها
  * منابع وابسته و توان و انرژی
- مدارهای ساده
  * اتصال‌های سری، موازی و سری-موازی
  * تحلیل گره
  * تحلیل مش
  * معادل تونن و نورتن، جمع آثار و تقارن
- تقویت کننده عملیاتی
  * تقویت کننده عملیاتی
- مدارهای مرتبه اول
  * اتصالات سری و موازی در خازن‌ها و سلف‌ها
  * پاسخ ورودی صفر
  * پاسخ حالت صفر
  * پاسخ کامل، خطی بودن پاسخ حالت صفر
  * خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان، پاسخ پله
  * پاسخ ضربه
- مدارهای مرتبه دوم
  * پاسخ ورودی صفر
  * پاسخ حالت صفر
  * مدارهای دوگان و تشابهی
  * انتگرال کانولوشن
- حالت دائمی سینوسی
  * مرور اعداد مختلط
  * پاسخ کامل و پاسخ حالت دائمی سینوسی
  * امپدانس، ادمیتانس و تجزیه و تحلیل مدارها
  * مدارهای تشدید
  * توان در حالت دائمی سینوسی

توصیه‌ها :

* جزوه نوشته شود.
* کوئیزها به خصوص کوئیز دوم مهم است.
* تقلب نیز نباشد.
* تاخیر در تمرین‌ها { دوشنبه ← ٪5 ، شنبه ← ٪20 }
* رفع اشکال قبل از میانترم و پایان ترم

- مدارهای فشرده
جلسه اول : - جهت های قراردادی ولتاژ و جریان
- KCL , KVL

- نظریه مدار مبتنی بر مفهوم مدلسازی است.

* هر سیستم پیچیده فیزیکی را باید بتوان بصورت یک مدل ایده آل از به هم پیوستن اجزاء ایده آل بیان نمود.

* عناصر ایده آل به موجب تعریف دقیقاً مشخص می شوند

- دسته بندی مدارها :

* فشرده ← در این کتاب بررسی می کنیم.
* گسترده ← ترکیبی از مدل فشرده ← مانند خطوط انتقال

- مدارهای فشرده :

* از به هم پیوستن عناصر فشرده تشکیل می شوند ← { مقاومت، سلف، خازن }

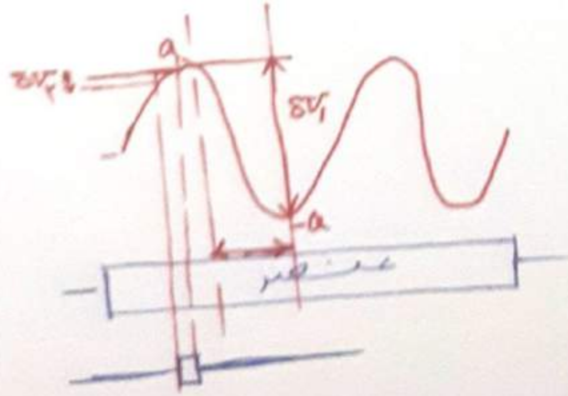
* عناصر فشرده ← معادل با دو سرهای نقطه ای هستند.
جریان یا ولتاژ از طریق قوانین KCL , KVL برای آنها برقرار است.
ولتاژ و جریان کاملاً معین و مستقل از ابعاد عنصر هستند

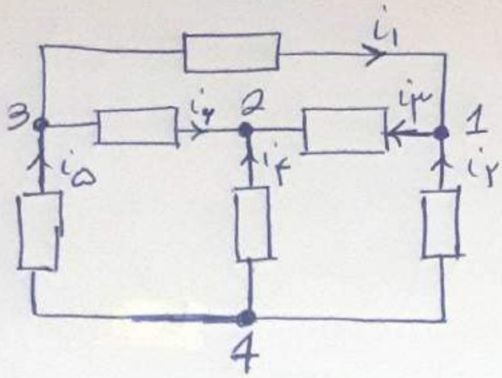
* تعریف : به هم پیوستن عناصر فشرده. به گونه ای که ابعاد مدار در مقایسه با کوچکترین طول موج (بالاترین فرکانس) مدار قابل صرف نظر باشد.

* معادلات ماکسول
فرض فشردگی ⇐ قوانین کرشهف

مثال : بالاترین فرکانس = 25 kHz ← $\lambda = \frac{c}{f} = 12$ km

" " = 500 MHz ← $\lambda = c/f = 60$ cm





تعریف :

شاخه ← عناصر دو سر

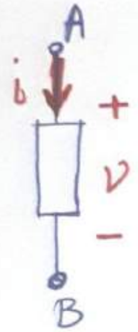
گره ← سرهای عناصر

ولتاژ شاخه ← ولتاژ دو سر یک شاخه

جریان شاخه ← جریان داخل یک شاخه

} متغیرهای اساسی تئوری مدار

جهت های قراردادی :



ولتاژ مثبت است اگر پتانسیل نقطه A از پتانسیل نقطه B بیشتر باشد.

$$v(t) = v_A(t) - v_B(t)$$

جریان i در لحظه t مثبت است اگر شاری از بارهای مثبت از گره A وارد و از گره B خارج شود.

* جهت های قراردادی دلخواه هستند و به فیزیک مسائل وابسته نیستند.

* اگر جهت های قراردادی لحاظ شوند در هر لحظه (t) $v(t)\, i(t)$ توانی خواهد بود که به عنصر تحویل داده می شود.

KCL ← قانون جریان کرشهف

در هر گره از مدار الکتریکی فشرده، و در هر لحظه از زمان مجموع جبری جریان همه شاخه هایی که از آن گره خارج می شوند صفر است.

* جریان خارج شونده ملاک است.

گره 1 $\Rightarrow -i_2 + i_3 - i_1 = 0$

* محدودیت خطی ← معادلات جبری خطی همگن.

* KCL به ماهیت عناصر وابسته نیست.

* KCL معادل اصل بقای بار است ← تغییرات بار صفر است.

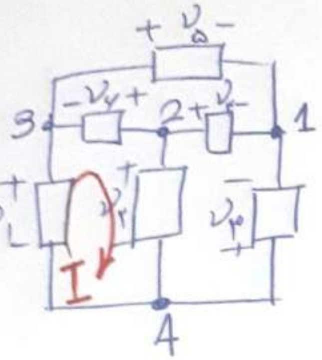
* KCL در گره های مرکب نیز برقرار است.

$$-i_2 - i_1 - i_4 - i_6 = 0$$

KVL ← قانون ولتاژ کرشهف :

حلقه ← مسیری است که گره ابتدایی و انتهایی آن بر هم منطبق باشد

KVL ← در هر حلقه از مدار الکتریکی فشرده و در هر لحظه از زمان مجموع جبری ولتاژهای شاخه‌های حلقه برابر صفر است.



برای نوشتن KVL ابتدا یک جهت برای جریان حلقه قرار داد می‌کنیم.

سپس ولتاژ متناظر با آن جریان را جمع خطی می‌کنیم.

$$-v_1 - v_4 + v_2 = 0$$

* معادلات حاصل از KVL نیز خطی و همگن هستند.

به ماهیت اجزاء وابسته نیست.

جلسه دوم :

- مقاومت ها
- منابع وابسته ، معادل تونن نورتن
- برخی شکل موج ها

- مقاومت ها :

« شکل مداری »

تعریف : یک عنصر دوسر را مقاومت گویند اگر در هر لحظه t ، ولتاژ $v(t)$ و جریان $i(t)$ در رابطه‌ای که در صفحه vi به وسیله یک منحنی تعریف می‌شود صدق کند.

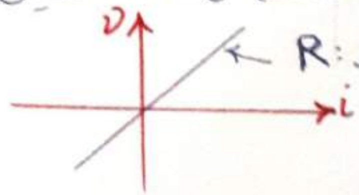
تغییرناپذیر با زمان : مقاومتی است که مشخصه آن با زمان تغییر نمی‌کند.
" **پذیر** " : " " " " " می‌کند.

خطی : در هر لحظه از زمان مشخصه آن خط مستقیمی باشد که از مبدأ می‌گذرد.
غیرخطی : مقاومتی است که خطی نباشد.

← برحسب چهار تعریف بالا چهار دسته‌بندی مختلف خواهیم داشت.

مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان :

* مشخصه آن خط مستقیمی است که از مبدأ می‌گذرد و با زمان نیز تغییر نمی‌کند.



$v(t) = R\, i(t)$ R: مقاومت

$i(t) = G\, v(t)$ G: رسانایی

$$R = \frac{1}{G}$$

، اهم‌ها

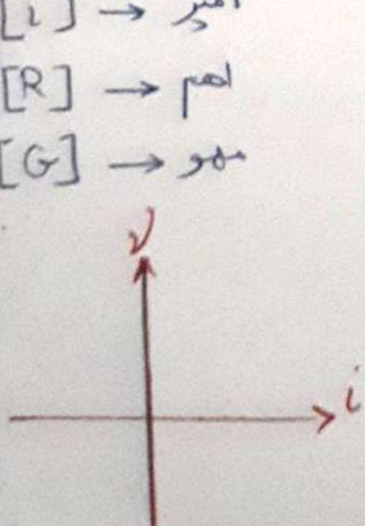
$[v] \rightarrow$ ولت

$[i] \rightarrow$ آمپر

$[R] \rightarrow$ اهم

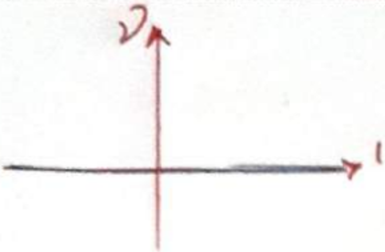
$[G] \rightarrow$ مهو

حالات خاص :



الف) مدار باز : عنصر دوسر را مدار باز گویند اگر جریان شاخه به ازای تمامی مقادیر ولتاژ صفر باشد.

$$\rightarrow \begin{cases} R = \infty \\ G = 0 \end{cases}$$



ب) اتصال کوتاه : عنصر دوسر اتصال کوتاه است اگر ولتاژ شاخه آن به ازای همه مقادیر جریان صفر باشد

$$\Rightarrow \begin{cases} R = 0 \\ G = \infty \end{cases}$$

*** انواع اتصال‌ها :**

الف) اتصال سری : اتصالی است که در آن جریان دو شاخه برابر است .

ب) اتصال موازی : اتصالی است که در آن ولتاژ دو شاخه برابر است .

تمرین :

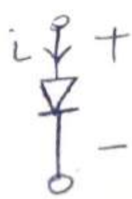
الف - اتصال سری مقاومت R و مدار باز

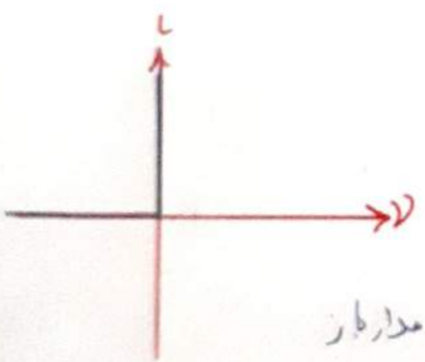
ب - اتصال سری مقاومت R و اتصال کوتاه

پ - اتصال موازی مقاومت R و مدار باز

ت - اتصال موازی مقاومت R با اتصال کوتاه

*** دیود ایده‌آل :**





وقتی $v < 0$ ← $i = 0$ ← ولتاژهای منفی مثل مدار باز

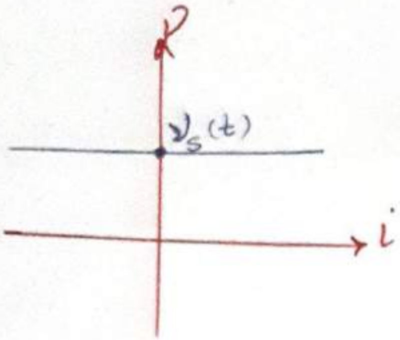
" $i > 0$ ← $v = 0$ ← جریان‌های مثبت مثل اتصال کوتاه

تعریف : مقاومت دوطرفه : منحنی آن نسبت به مبدأ متقارن است ← تمام مقاومت‌های خطی [illegible]

← فرقی ندارد دو سر آن شناسایی شود

اگر عنصری دوطرفه نباشد لازم است دو سر آن از یکدیگر تمیز داده شود

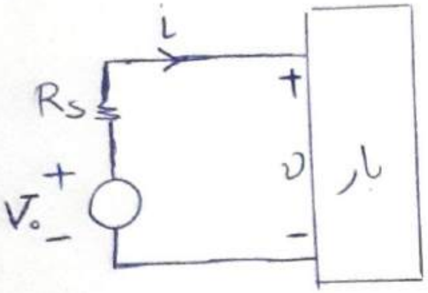
- منبع ولتاژ مستقل :



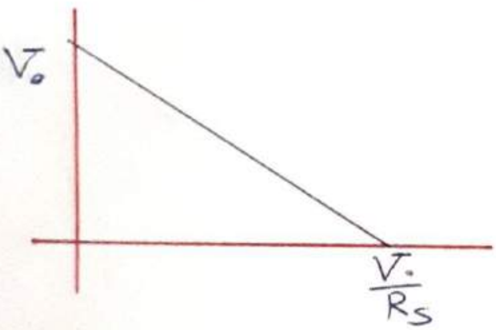
منبعی است که مستقل از جریانی که از آن عبور می کند ولتاژ دو سر آن ثابت و برابر با $v_s(t)$ باشد. حال اگر $v_s(t)$ به زمان وابسته نباشد منبع ولتاژ را ثابت می گوییم.

* منبع ولتاژ مستقل ← مقاومت غیرخطی متغیر با زمان
* منبع ولتاژ ثابت ← مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان
* منبع ولتاژ متحد با صفر ≡ اتصال کوتاه

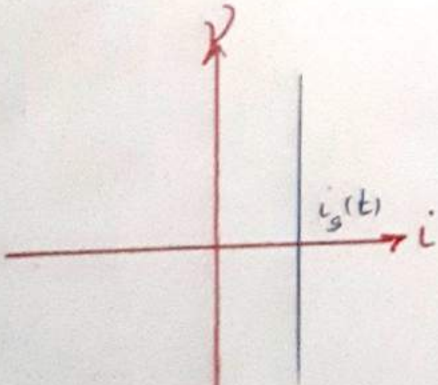
مثال : مدل واقعی یک منبع ولتاژ ثابت :



$$v = V_0 - R_s i$$



- منبع جریان مستقل :

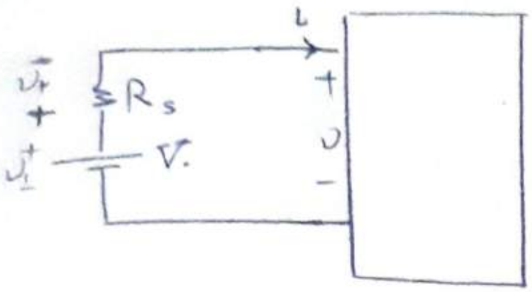


یک عنصر دو سر را منبع جریان مستقل گوییم اگر جریان معین $i_s(t)$ را صرف نظر از مداری که به آن وصل شده است نگه دارد. حال اگر $i_s(t)$ به زمان وابسته نباشد منبع جریان ثابت داریم.

* منبع جریان مستقل ← مقاومت غیر خطی تغییرپذیر با زمان
* منبع جریان ثابت ← مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان

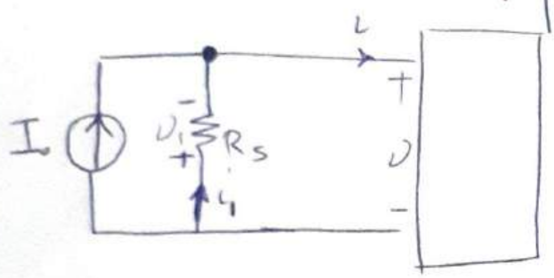
- معادل تونن نرتن

* مدل باتری ماشین



$$\left.\begin{aligned} KVL &: -v_1 + v_2 + v = 0 \\ v_1 &= V_0 \\ v_2 &= R_s i \end{aligned}\right\} \Rightarrow -V_0 + R_s i + v = 0 \rightarrow v = V_0 - R_s i$$

حال می‌خواهیم مدار معادل نرتن را به دست آوریم:



$$\left.\begin{aligned} & i - i_1 - I_0 = 0 \\ & i_1 = -\frac{v_1}{R_s} = -\frac{v}{R_s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow i + \frac{v}{R_s} - I_0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = R_s I_0 - R_s i \\ v = V_0 - R_s i \end{cases} \Rightarrow V_0 = R_s I_0$$

* در برخی از موارد استفاده از تونن و در برخی از موارد استفاده از نورتن راحت‌تر است.

- شکل موج‌های نمونه:

* سینوسی

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

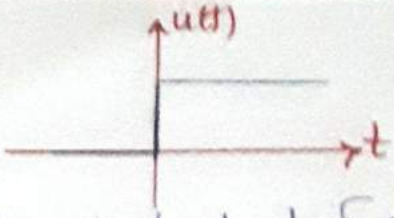
$A \rightarrow$ دامنه

$\omega \rightarrow$ فرکانس $[\omega]: \frac{rad}{sec}$

$\varphi \rightarrow$ فاز $[\varphi]: rad$

- پله واحد :

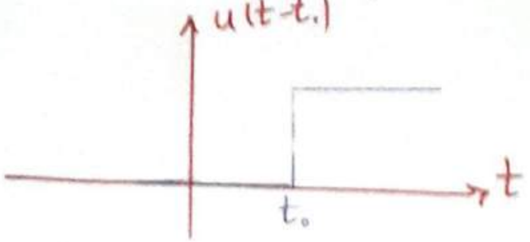
$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



در صفر می‌توان مقدار آن را 1 و یا $\frac{1}{2}$ در نظر گرفت

$u(t-t_0)$

$t_0>0$



- پالس :

$$P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & \Delta<t\end{cases} = \frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}$$

ضربه واحد : مفهوم دقیق ریاضی یک تابع نیست

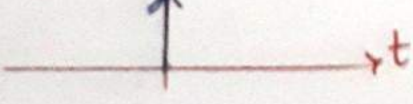
$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1 \quad \forall\varepsilon$$

* ضربه واحد حد پالس P_Δ است وقتی که $\Delta\to 0$.

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}=\frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')dt'$$



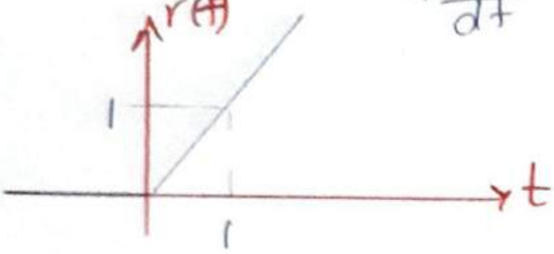
خاصیت غربالی :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(t)\delta(t)dt=f(0)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(t)\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t)\,dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{0}^{\Delta}f(t)\frac{1}{\Delta}dt=f(0)$$

- تابع شیب واحد:

$$r(t) = t\,u(t) \Longrightarrow \begin{cases} r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t')\,dt' \\ \dfrac{dr(t)}{dt} = u(t) \end{cases}$$



- تابع دوبلت واحد :

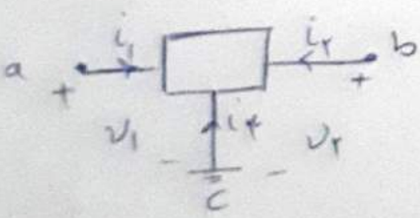
$$\delta'(t) = \frac{d\,\delta(t)}{dt}$$

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta'(t')\,dt'$$

- مثال:

- $3u(t) - 3u(t-2)$
- $5P_{0.1}(t) - 3P_{0.1}(t-0.1) + 2P_{0.2}(t-3)$
- $r(t) - u(t-1) - r(t-1)$

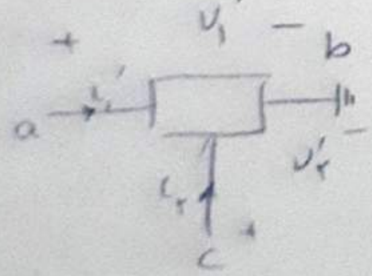
- مثال:



$$i_1 = (v_1 + v_2)^2$$

$$i_2 = (v_2 - v_1)$$

اگر سر b را زمین کنیم روابط به چه صورت در می آید



$$i_1' = i_1 = (v_1 + v_2)^2 = \left((v_1' - v_2') - v_2'\right)^2$$

$$= (v_1' - 2v_2')^2$$

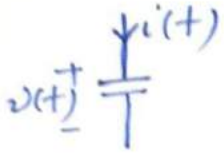
$$i_3' = -i_1' - i_2' = -(v_1' - 2v_2')^2 + v_1'$$

جلسه سوم :

- خازن :

تعریف : عنصر دوسری است که در هر لحظه از زمان بار الکتریکی ذخیره شده $q(t)$ و ولتاژ $v(t)$ آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه vq تعریف می‌شود صدق کند.

شکل :



انواع از نظر خطی بودن :

- خطی ← مشخصه vq آن خطی مستقیم و گذرنده از مبدا است.
- غیرخطی ← " " " " " " نیست.

از نظر تغییر با زمان :

- تغییرناپذیر با زمان ← مشخصه آن با زمان تغییر نمی‌کند.
- تغییرپذیر با زمان ← مشخصه آن با زمان تغییر می‌کند.

* خازن خطی تغییرناپذیر با زمان :

$q(t) = C\,v(t)$ C : شیب مشخصه (ظرفیت) $[C] \rightarrow$ فاراد

$[q(t)] \rightarrow$ کولمب

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{S}\frac{dv}{dt} \qquad S = C^{-1} \rightarrow \text{الستانس}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' = v(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t')\,dt'$$

$i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$ ← این رابطه نسبت به ولتاژ $v(t)$ و $i(t)$ خطی است

$v(t) = v(0) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t')dt'$ ← تنها در صورتی $v(t)$ تابعی خطی از $i(t)$ است که $v(0)=0$ باشد.

* $v(t)$ به $v(0)$ و همه مقادیر جریان از لحظه صفر تا لحظه t بستگی دارد ← خازن‌ها دارای حافظه می‌باشند.

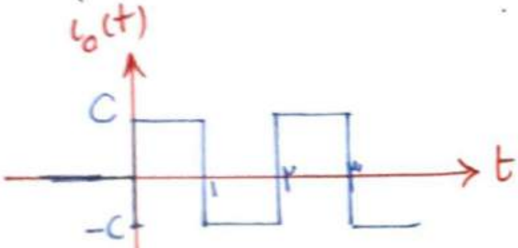
چند نکته :

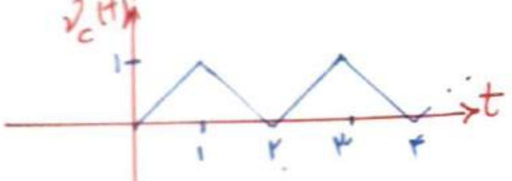
* ولتاژ خازن تغییر آنی نمی‌تواند داشته باشد زیرا در این صورت جریان آن بینهایت می‌شود و این ممکن نیست.
* جریان خازن می‌تواند تغییر آنی داشته باشد.
* i_c مثبت (منفی) ← v_c زیاد (کم)

$i_c=0$ ← v_c ثابت است.

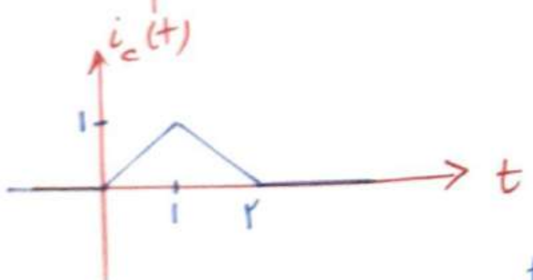
* اگر ولتاژ خازن ثابت شده باشد ← $i_c=0$ ← خازن اتصال باز خواهد بود.
* در لحظه اول برقراری مدار خازن اتصال کوتاه است.

مثال ۱: ولتاژ به صورت $v_c(t)$ است. جریان را رسم کنید.





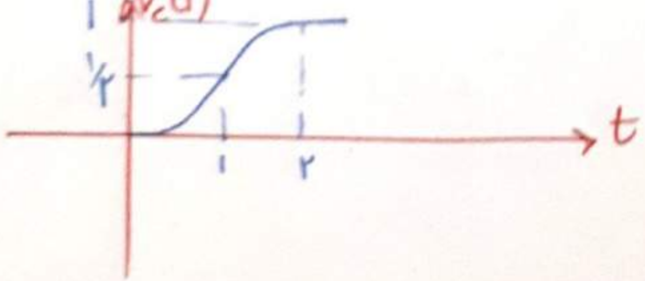
مثال ۲: ولتاژ در $t=0$ برابر با صفر است. شکل موج جریان به صورت مقابل است. $C=1F$ است. ولتاژ خازن را در $t\geq 0$ رسم کنید.



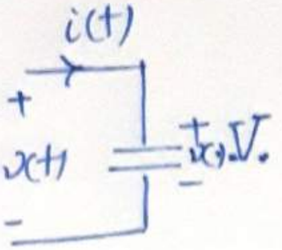
$$t\geq 0 \Rightarrow v_c(t)=v_c(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i_c(t')dt' = 0+\int_0^t i_c(t')dt'$$

$$0\leq t\leq 1 \Rightarrow v_c(t)=0+\int_0^t t'dt' = \frac{1}{2}t^2$$

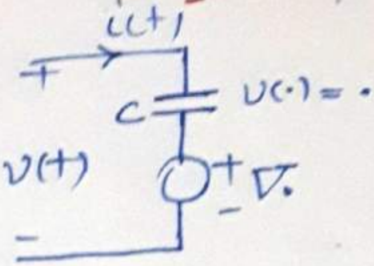
$$1\leq t\leq 2 \Rightarrow v_c(t)=v_c(1)+\int_1^t(-t'+2)dt' = -\frac{t^2}{2}+2t-1$$



* مدل کردن خازن با ولتاژ اولیه:

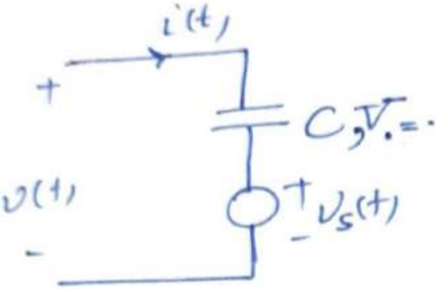


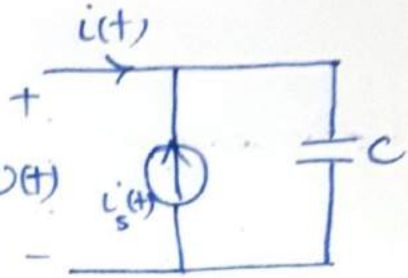
≡



* معادل تونن - نرتن:

ولتاژ خازن در لحظه صفر برابر صفر است.





$$i(t) = C\frac{d}{dt}\left(v(t) - v_s(t)\right)$$

$$= C\frac{dv(t)}{dt} - C\frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$i(t) = -i_s(t) + C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad i_s(t) = C\frac{dv_s(t)}{dt} \quad \equiv \quad v_s(t) = \frac{1}{C}\int^{t} i_s(t')dt'$$

اگر منبع ولتاژ $v_s(t)$ یک پله واحد باشد ← $i_s(t)$ ضربه $C\delta(t)$ خواهد بود.

$$\left.v(t+dt) - v(t) = \frac{1}{C}\int_{t}^{t+dt} i(t')dt' \right\} \Rightarrow v(t+dt) \rightarrow v(t)$$

* شکل موج ولتاژ پیوسته است.

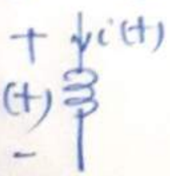
$$|i(t)| \leq M$$

* مادامیکه جریان خازن در فاصله بسته $[0,T]$ کراندار بماند، ولتاژ $v(t)$ دو سر آن در فاصله باز $(0,T)$ پیوسته خواهد بود.

- سلف ها:

تعریف: عنصر دوسری است که در هر لحظه از زمان شار $\phi(t)$ و جریان $i(t)$ آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه $i\phi$ تعریف می‌شود صدق کند.

شکل مداری:



انواع از نظر خطی بودن :

- خطی ← مشخصه $\phi\, i$ آن خطی مستقیم و گذرنده از مبدأ است.

〃 〃 〃 〃 〃 〃 نیست.

از نظر تغییر با زمان :

- تغییر ناپذیر با زمان ← مشخصه آن با زمان تغییر نمی‌کند.
- تغییر پذیر با زمان ← 〃 〃 〃 〃 〃 می‌کند.

* سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان :

$\phi(t) = L_1 i(t)$ L_1 : شیب مشخصه (اندوکتانس) $[L_1] \to$ هانری

$[\phi] \to$ وبر

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L_1 \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{\Gamma} \frac{di(t)}{dt}$$ $\Gamma = 1/L \to$ اندوکتانس معکوس

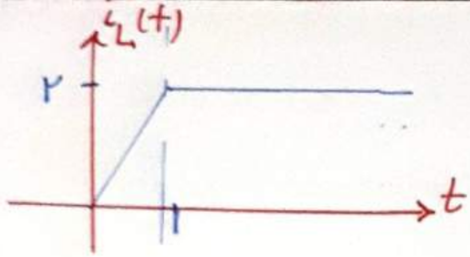
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t')dt' = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(t')dt'$$

$v(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt}$ ← این رابطه نسبت به جریان $i(t)$ خطی است.

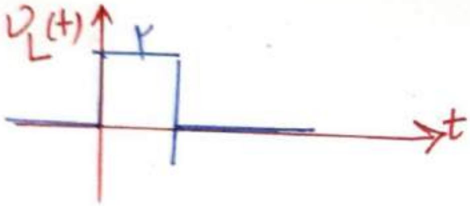
$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(t')dt'$ ← تنها در صورتی نسبت به $v(t)$ خطی است که $i(0)=0$ باشد.

چند نکته :

* جریان سلف تغییر آنی نمی‌تواند داشته باشد زیرا در این صورت ولتاژ آن بینهایت می‌شود و این ممکن نیست.
* ولتاژ سلف می‌تواند تغییر آنی داشته باشد.
* v_L مثبت (منفی) ← i_L زیاد (کم)
* $v_L = 0$ ← i_L ثابت است.
* اگر جریان سلف ثابت شود، سلف اتصال کوتاه خواهد بود.
* در لحظه اول برقراری مدار سلف اتصال باز است.



مثال: جریان سلف به صورت مقابل است. ولتاژ آن را رسم کنید. ($L=1H$)

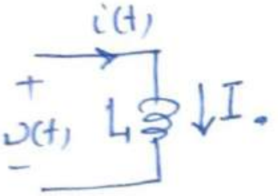


تا زمانیکه جریان تغییر می‌کند ← فلوی مغناطیسی هم تغییر می‌کند ← ولتاژ القا می‌شود.

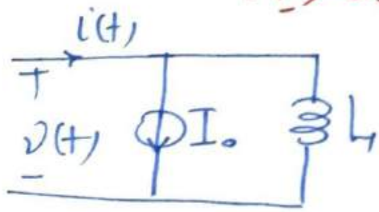
اگر جریان ۲ آمپر در این سلف در مدت ۵۰ms به صورت خطی صفر شود چه ولتاژی در دو سر آن القا می‌شود؟

$$V = -\frac{2}{50\times10^{-3}} \simeq -40\ V$$

*** مدل کردن سلف با جریان اولیه:**

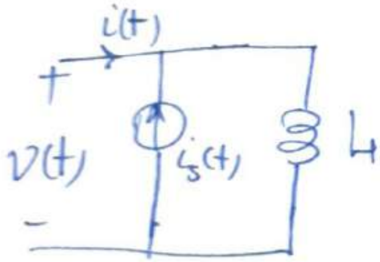


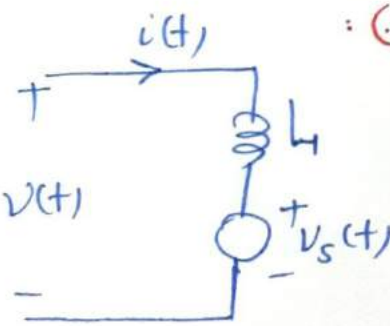
$\equiv$



*** معادل تونن نرتن:**

جریان سلف در لحظه صفر برابر صفر است.





$$v(t) = L\frac{d}{dt}\left(i(t)+i_s(t)\right)$$

$$= L\frac{di(t)}{dt} + L\frac{di_s(t)}{dt}$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} + v_s(t)$$

$$\Rightarrow v_s(t) = L\frac{di_s(t)}{dt} \equiv i_s(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_s(t')dt'$$

اگر منبع جریان $i_s(t)$ یک پله واحد باشد ← $v_s(t)$ ضربه $L\delta(t)$ خواهد بود.

$$\left.\begin{array}{l} i(t+dt)-i(t)=\frac{1}{L}\int_{t}^{t+dt} v(t')dt' \\ |v(t')| \leqslant M \end{array}\right\} \Rightarrow i(t+dt) \to i(t)$$

* شکل موج جریان پیوسته است.

* ما دامیکه ولتاژ سلف در فاصله بسته $[0,T]$ کراندار بماند، جریان عبوری از آن در فاصله باز $(0,T)$ پیوسته خواهد بود.

جلسه چهارم

- منابع وابسته
- توان و انرژی
- اتصال سری، موازی و سری-موازی

- منابع وابسته :

* مقدار این منابع به ولتاژ و یا جریان شاخه‌ی دیگری در مدار بستگی دارد.

* در قواعد KVL , KCL کاملاً شبیه منابع مستقل عمل می‌کنند.

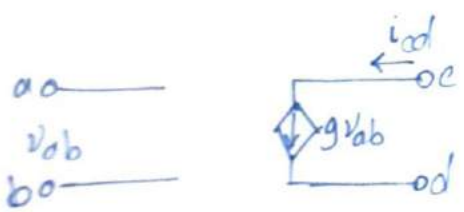
* انواع منابع وابسته :

۱) منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ VCVS

$v_{cd} = \mu v_{ab}$ $[\mu] \rightarrow$ بدون واحد

ولتاژ v_{ab} اصولاً ولتاژ دو سر یک عنصر مداری است.

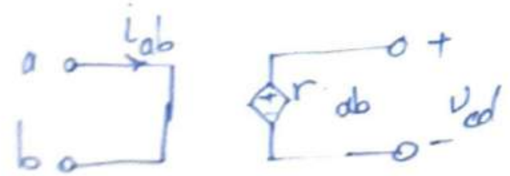
۲) منبع جریان کنترل شده با ولتاژ VCCS



$i_{cd} = g v_{ab}$ $[g] \rightarrow$ زیمنس (رسانایی متقابل)

ولتاژ v_{ab} اصولاً ولتاژ دو سر یک عنصر مدار است.

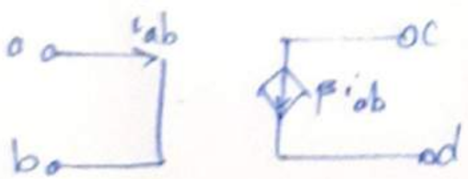
۳) منبع ولتاژ کنترل شده با جریان CCVS



$v_{cd} = r i_{ab}$ $[r] \rightarrow$ اهم (مقاومت متقابل)

جریان i_{ab} عموماً جریان گذرنده از یک عنصر در مدار است.

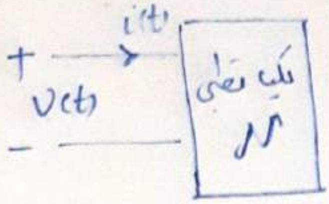
۴) منبع جریان کنترل شده با جریان CCCS



$i_{cd} = \beta i_{ab}$ $[\beta] \rightarrow$ بدون واحد

جریان i_{ab} عموماً جریان گذرنده از یک عنصر در مدار است.

- توان و انرژی:



* جریان لحظه‌ای که از یکی از سرها وارد می‌شود برابر جریان لحظه‌ای است که از سر دیگر خارج می‌شود

* توان لحظه‌ای که وارد یک قطبی می‌شود مساوی حاصلضرب ولتاژ در جریان قطب است به نحوی که جهت ولتاژ و جریان قطب به صورت متناظر انتخاب شده است.

$p(t)=v(t)i(t)$

* انرژی تحویل داده شده به یک قطبی از زمان t_0 تا زمان t:

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} p(t')dt' = \int_{t_0}^{t} v(t')i(t')dt'$$

* پسیو بودن:

* برای یک مقاومت که در نقطه کار $(v(t), i(t))$ قرار دارد، توان لحظه‌ای مساوی مساحت مستطیلی است که توسط نقطه کار، محورهای مختصات تشکیل می‌شود.

* اگر نقطه کار در ربع دوم یا چهارم باشد توانی که وارد مقاومت می‌شود منفی می‌گردد، یعنی مقاومت به دنیای خارج توان تحویل می‌دهد.

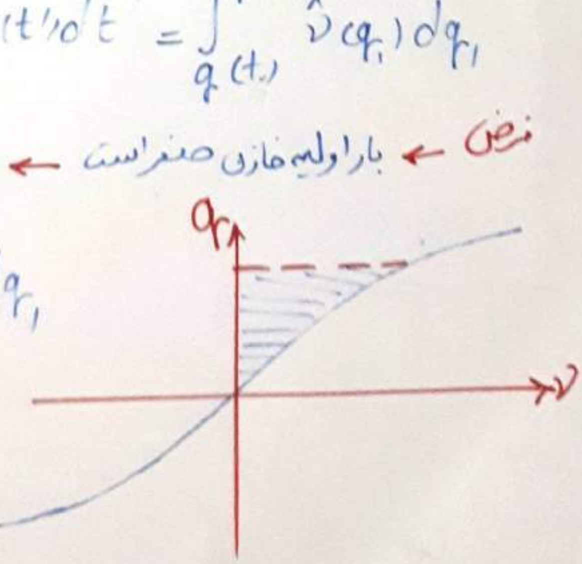
*مقاومت پسیو: یک مقاومت پسیو است اگر در هر لحظه از زمان مشخصه آن در ربع اول و سوم قرار گیرد

* مقاومتی را که پسیو نباشد اکتیو گویند. ← منبع ولتاژ و منبع جریان

* انرژی ذخیره شده در خازن تغییرناپذیر با زمان:

$$i(t)=\frac{dq}{dt},\quad v=\hat{v}(q) \rightarrow W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} v(t')i(t')dt' = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \hat{v}(q_1)dq_1$$

فرض ← بار اولیه خازن صفر است ← $q(t_0)=0$



$$W(t_0,t)=\mathcal{E}_E(t)=\int_{0}^{q(t)} \hat{v}(q_1)dq_1$$

حالت خاص
$$\begin{cases} q=Cv \\ \mathcal{E}_E(t)=\int_{0}^{q(t)} \frac{q_1}{C}dq_1=\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}=\frac{1}{2}Cv^2(t) \end{cases}$$

* خازن پسیو: هرگاه انرژی ذخیره شده در یک خازن همواره نامنفی باشد، خازن را پسیو می‌گویند.

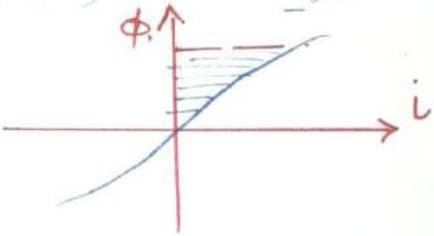
* خازن خطی تغییرناپذیر با زمان وقتی پسیو است که ظرفیت آن نامنفی باشد و زمانی اکتیو است که ظرفیت آن منفی باشد.

* انرژی ذخیره شده در سلف های تغییرناپذیر با زمان

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt}, \quad i = \hat{i}(\phi) \Longrightarrow W(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} v(t')\,i(t')\,dt' = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \hat{i}(\phi_1)\,d\phi_1$$

فرض: شار اولیه سلف صفر است ← $\phi(t_0)=0$

$$W(t_0,t) = \mathcal{E}_M(t) = \int_0^{\phi(t)} \hat{i}(\phi_1)\,d\phi_1$$



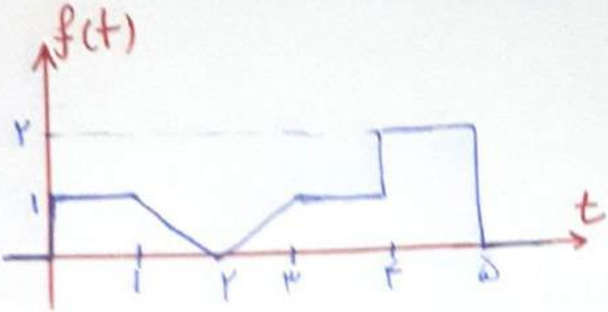
فرض: سلف خطی تغییرناپذیر با زمان: $\phi = Li$

$$\mathcal{E}_M(t) = \int_0^{\phi(t)} \frac{\phi_1}{L}\,d\phi_1 = \frac{1}{2}\frac{\phi^2(t)}{L} = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$$

* سلف پسیو: هرگاه انرژی ذخیره شده در یک سلف همواره نامنفی باشد سلف را پسیو گوییم.

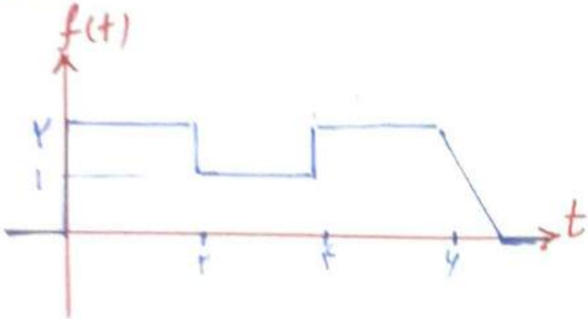
* سلف خطی تغییرناپذیر با زمان وقتی پسیو است که اندوکتانس آن نامنفی باشد و زمانی اکتیو است که اندوکتانس آن منفی باشد.

مثال ۱: شکل موج‌های زیر را برحسب توابع ویژه بیان کنید و مشتق آنها را محاسبه نمایید



$$f(t) = u(t) - r(t-1) + 2r(t-2) - r(t-3) + u(t-4) - 3u(t-5)$$

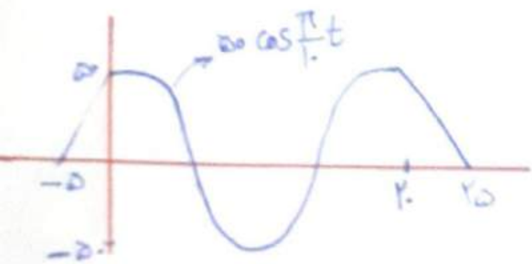
$$f'(t) = \delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4) - 2\delta(t-5)$$



$$f(t) = 2u(t) - u(t-2) + u(t-4) - 2r(t-6) + 2r(t-7)$$

$$f'(t) = 2\delta(t) - \delta(t-2) + \delta(t-4) - 2u(t-6) + 2u(t-7)$$

مثال ۲: با استفاده از توابع پله و شیب، شکل موج نشان داده شده در شکل مقابل را با یک طرح ریاضی برای تمام t ها بیان کنید.



$$f(t) = 10r(t+5) - 10r(t) + 50\left(-1 + \cos\frac{\pi}{10}t\right)\left(u(t) - u(t-2)\right)$$

$$-10r(t-20) + 10r(t-25)$$

مثال ۳ - مشتق شکل موج های زیر را تعیین نمایید :

الف)

$f(t)=(t-2)\,u(t-1)$

$f'(t)=u(t-1)+(t-2)\,\delta(t-1)=u(t-1)-\delta(t-1)$

ب)

$f(t)=t\,u(t-1)$

$f'(t)=u(t-1)+t\,\delta(t-1)=u(t-1)+\delta(t-1)$

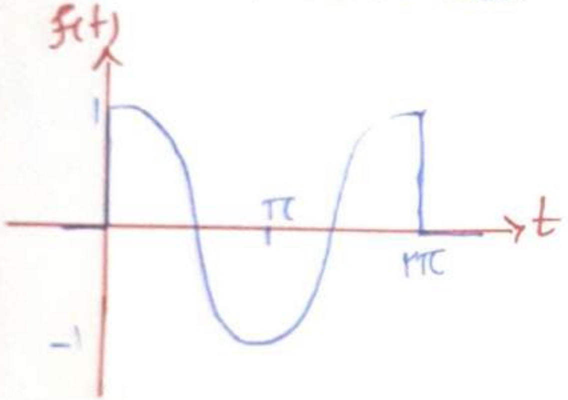
پ)

$f(t)=(t-1)u(t)-t\,u(-t)$

$f'(t)=u(t)+(t-1)\delta(t)-u(-t)-t\big(-\delta(-t)\big)$

$=u(t)-\delta(t)-u(-t)$

ت)



$f(t)=\cos t\,\big[u(t)-u(t-2\pi)\big]$

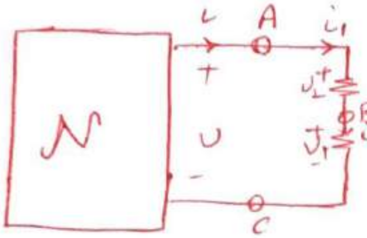
$f'(t)=-\sin t\big[u(t)-u(t-2\pi)\big]+\cos t\big[\delta(t)-\delta(t-2\pi)\big]$

$=-\sin t\big[u(t)-u(t-2\pi)\big]+\delta(t)-\delta(t-2\pi)$

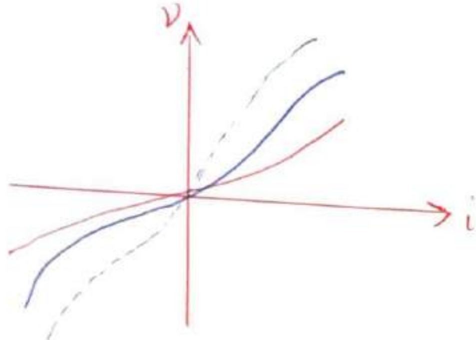
جلسه پنجم

- اتصال سری
- اتصال موازی
- اتصال سری - موازی

- اتصال سری مقاومت ها :



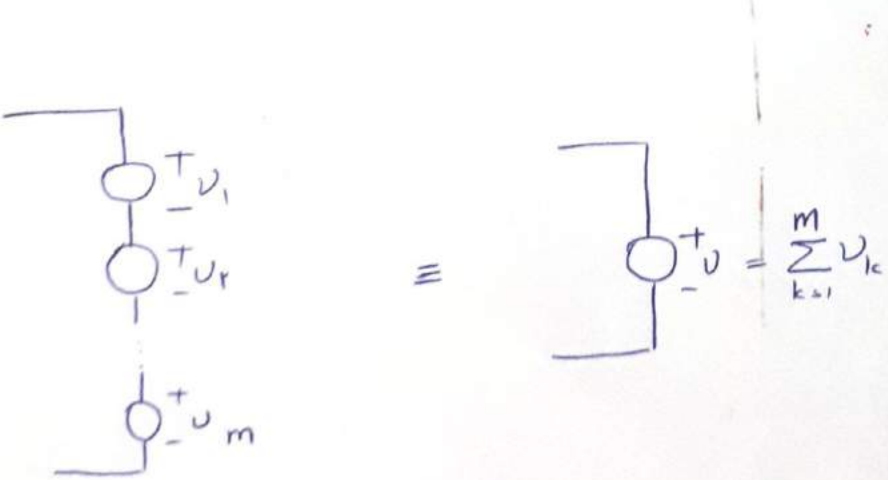
$$\left.\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 \\ i &= i_1 = i_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r}\text{جریان یکسانی میگذرد} \\ \text{ولتاژ دو سر مجموع ولتاژهاست}\end{array}\right.$$



حالت خاص : مقاومت های تغییرناپذیر با زمان خطی :

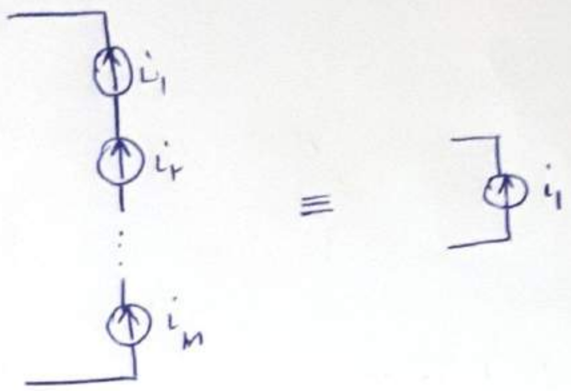
$$\left.\begin{aligned} v_k &= R_k\, i_k \\ v &= \sum_{k=1}^{m} v_k \\ i_1 &= i_2 = \cdots = i_m = i \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sum_{k=1}^{m} R_k i_k = \left(\sum_{k=1}^{m} R_k\right) i \Rightarrow R_T = \sum_{k=1}^{m} R_k$$

حالت خاص : منابع ولتاژ :



$$\equiv \quad v = \sum_{k=1}^{m} v_k$$

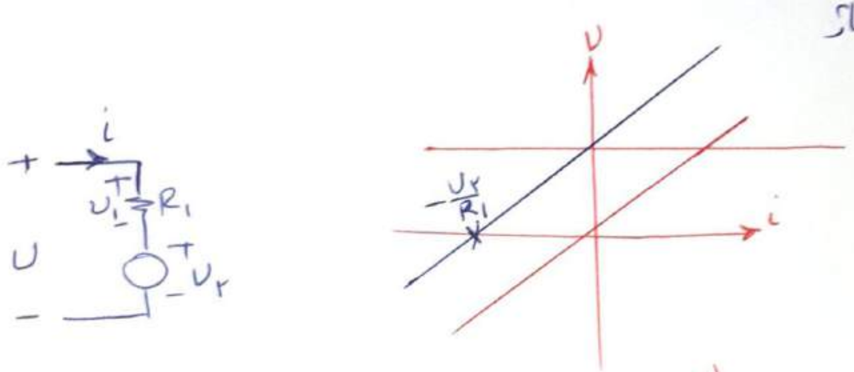
حالت خاص: منابع جریان

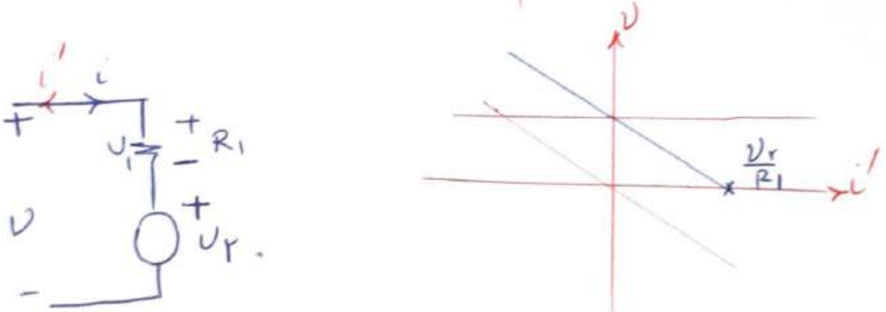


تنها زمانی امکان پذیر است که:

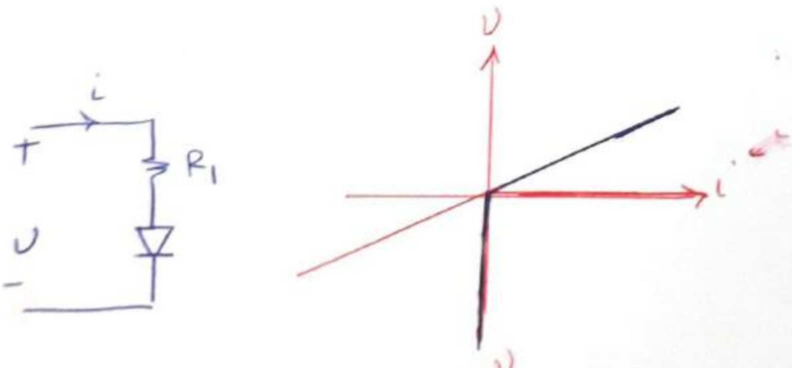
$i_1 = i_2 = \dots = i_m$

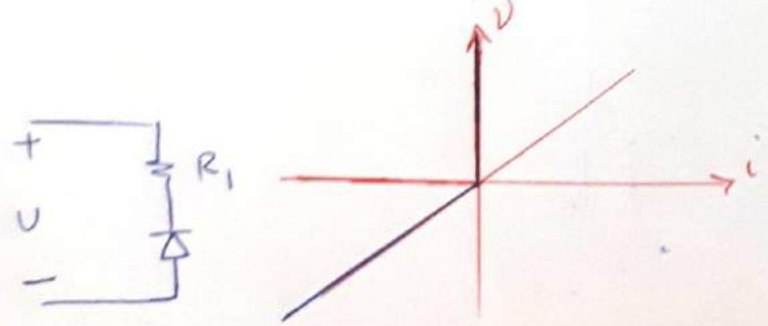
حالت خاص: مقاومت و منبع ولتاژ

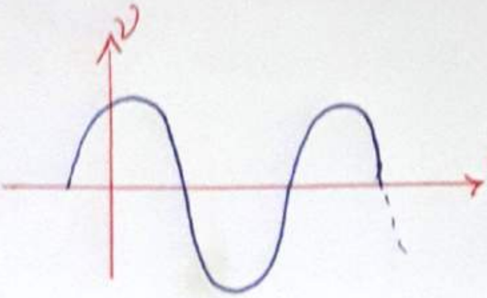
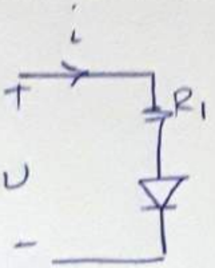
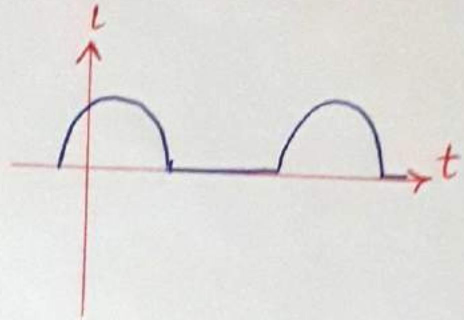


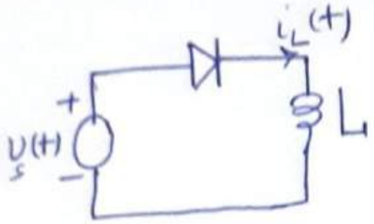


حالت خاص: دیود و مقاومت:







مثال: $V_s(t) = A\sin\omega t$

جریان اولیه سلف صفر است

شکل موج جریان سلف را رسم کنید.

در بازه $0 \le \omega t \le \pi$: ولتاژ مثبت ← جریان بگذرند. از دیود و سلف مثبت است ← دیود اتصال کوتاه است.

$$i_L(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t A\sin\omega t'dt' = \frac{A}{L\omega}(1-\cos\omega t) \qquad 0 \le \omega t \le \pi$$

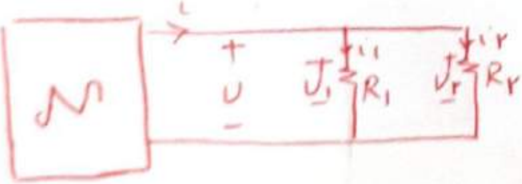
چون $1-\cos\omega t$ برای تمام t ها نامنفی است ← جریان گذرنده از دیود و سلف مثبت بوده و دیود مانند اتصال کوتاه عمل می‌کرده است.

در لحظه $t = \pi/\omega$ جریان سلف برابر با $\frac{2A}{L\omega}$ است. حال در بازه $\pi \le \omega t \le 2\pi$ داریم:

$$i_L(t) = i_L(\pi) + \frac{1}{L}\int_{\pi/\omega}^{t} A\sin\omega t'dt' = \frac{A}{L\omega}(1-\cos\omega t)$$

بنابراین در این بازه نیز جریان مثبت است و دیود اتصال کوتاه باقی می‌ماند ← دیود همواره اتصال کوتاه است.

۱- اتصال موازی:

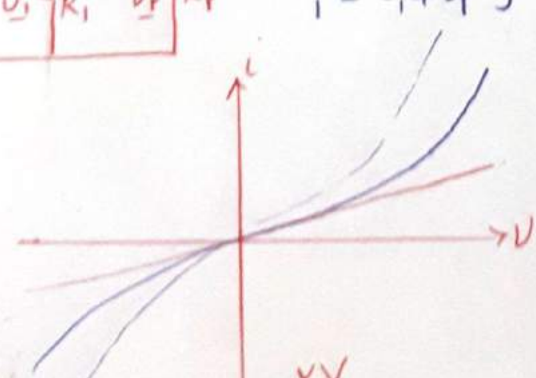


$v = v_1 = v_2$

$i_1 = i_1 + i_2$

⇒ ولتاژ عناصر یکسان است.

جریان مجموع جریان‌ها است.

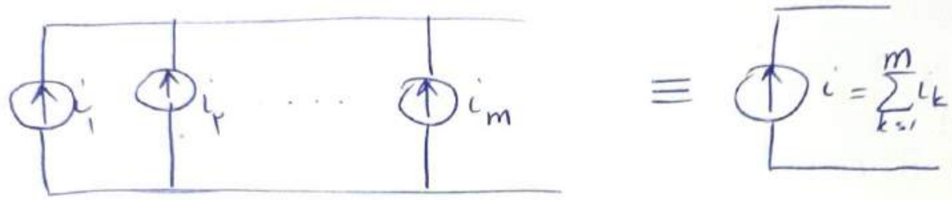


حالت خاص: مقاومت های خطی تغییر ناپذیر با زمان:

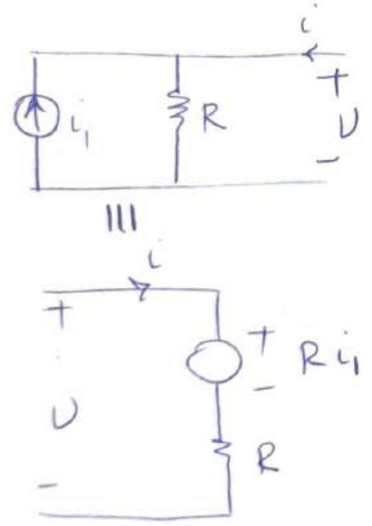
$$\left.\begin{aligned} i_k &= G v_k \\ v &= v_1 = \cdots = v_m \\ i &= i_1 + i_2 + \cdots + i_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow i = \sum_{k=1}^{m} G_k v_k = \left(\sum_{k=1}^{m} G_k\right) v \Rightarrow G_T = \sum_{k=1}^{m} G_k$$

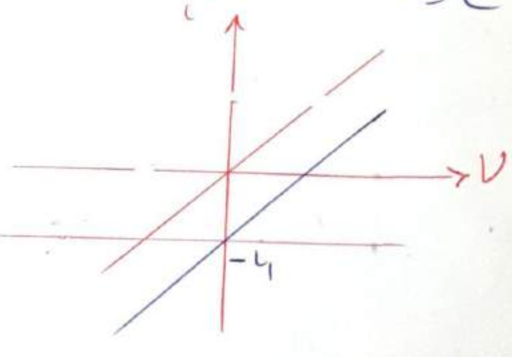
$$R_T = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_k}}$$

حالت خاص: منابع جریان:

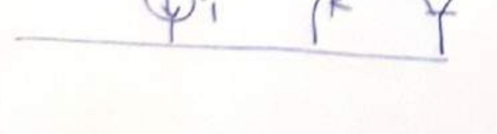


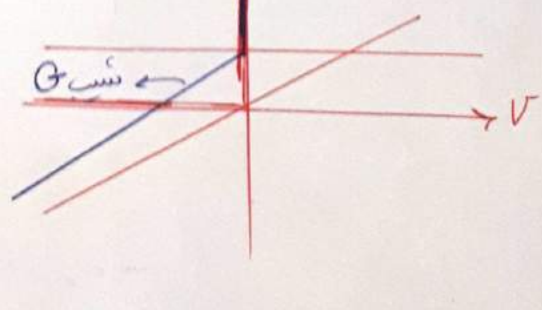
حالت خاص: منبع جریان و مقاومت:



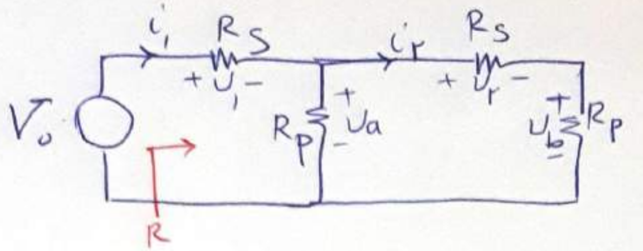


حالت خاص: منبع جریان، مقاومت خطی و دیود ایده آل:





- اتصال سری-موازی :



$V_0 = ۱۰$

$R_s = ۲$

$R_p = ۱$

$$R = R_s + \frac{۱}{\frac{۱}{R_p} + \frac{۱}{R_s + R_p}} = ۲\frac{۳}{۴}\ \Omega$$

$$i_1 = \frac{V_0}{R} = \frac{۴۰}{۱۱}\ A$$

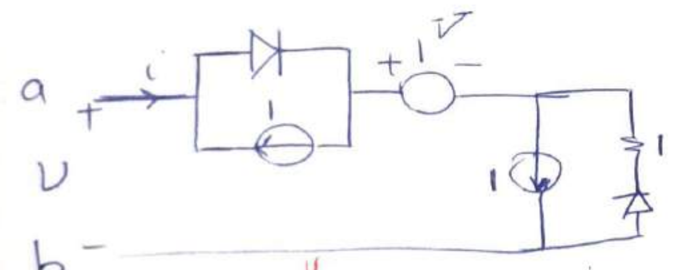
$$v_1 = R_s i_1 = \frac{۸۰}{۱۱}\ V$$

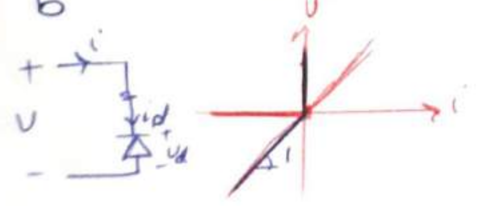
$$v_a = V_0 - v_1 = \frac{۳۰}{۱۱}\ V$$

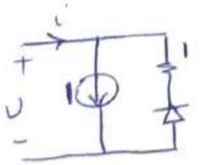
$$i_2 = \frac{v_a}{R_s + R_p} = \frac{۱۰}{۱۱}\ A$$

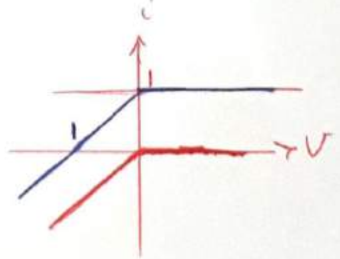
$$v_b = R_p i_2 = \frac{۱۰}{۱۱}\ V$$

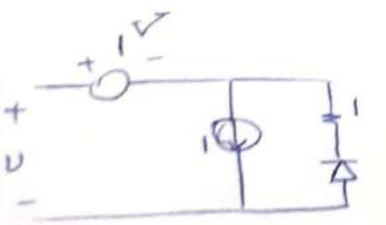
مثال :

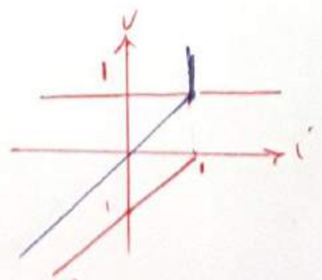


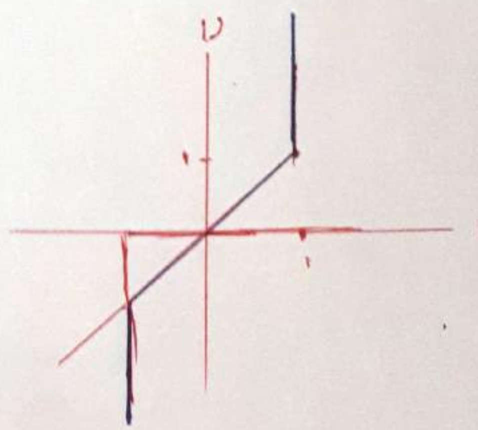


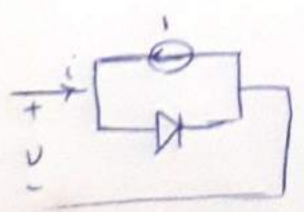












جلسه ششم :

- روش تحلیل گره :

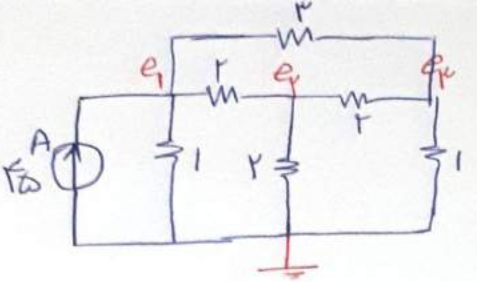
* تحلیل مدار ← بدست آوردن ولتاژ و جریان تمامی شاخه‌ها

* اساس همه روش ها
- KVL
- KCL
- نوشتن درست معادلات

* متغیرها ← ولتاژ گره‌ها است ← چون ولتاژ گره‌ها نسبت به هم سنجیده می‌شود
بنابراین ابتدا گرهی را به عنوان گره مبنا با ولتاژی دلخواه انتخاب می‌کنیم
← ولتاژ گره مبنا را معمولاً صفر در نظر می‌گیریم
← معمولاً گره‌ای که بیشترین تعداد شاخه به آن متصل است را زمین می‌گیریم
← گره مبنا را با علامت ⏚ مشخص می‌کنیم.
← منابع ولتاژ سری با مقاومت را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم.

* مراحل :

۱- انتخاب گره مبنا و صفر قرار دادن ولتاژ آن
۲- شماره گذاری گره‌های مدار ← گره معیار را با شماره صفر نشان می‌دهیم.
۳- متغیرهای مدار را برابر ولتاژ گره‌ها نسبت به گره زمین در نظر می‌گیریم
۴- نوشتن KCL در تمام گره‌ها به جز گره زمین
۵- همه منابع را مانند منابع نابسته در نظر می‌گیریم و سعی کنیم در نهایت متغیرها فقط ولتاژ گره‌ها باشند.
۶- معادلات را حل می‌کنیم و ولتاژ گره‌ها را به دست می‌آوریم
۷- با داشتن ولتاژ گره‌ها ولتاژ شاخه‌ها و سپس جریان آنها را تعیین می‌کنیم



مثال ۱ - رساناییها داده شده است.

* برای مثال ۳ راه حل حفظ شود.

$$KCL\,1:\ e_1 + 2(e_1 - e_2) + 3(e_1 - e_3) - 45 = 0$$

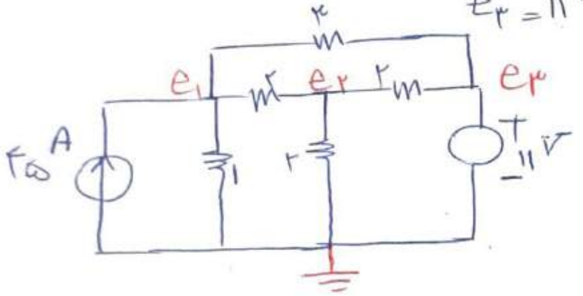
$$KCL\,2:\ 2(e_2 - e_1) + 2e_2 + 2(e_2 - e_3) = 0$$

$$KCL\,3:\ 3(e_3 - e_1) + 2(e_3 - e_2) + e_3 = 0$$

اگر هر سه معادله را با هم جمع کنیم به KCL در گره مبنا می‌رسیم بنابراین KCL در گره مبنا معادله جدیدی در اختیار ما قرار نمی‌دهد.

$$e_1 + 2e_2 + e_3 = 45$$

با حل دستگاه سه معادله و سه مجهول فوق، ولتاژ گره‌ها مشخص می‌شود و از روی آن می‌توان جریان شاخه‌ها را به دست آورد. ← $e_1 = 14\,V,\ e_2 = 9\,V,\ e_3 = 11\,V$



مثال ۲ - چطور در گره ۳ KCL بزنیم؟

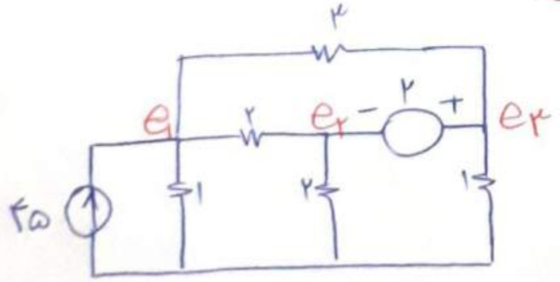
ولتاژ گره ۳ مجهول نیست.

$$-45 + e_1 + 2(e_1 - e_2) + 3(e_1 - 11) = 0$$

$$+2(e_2 - e_1) + 2e_2 + 2(e_2 - 11) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = 14\,V \\ e_2 = 9\,V \end{cases}$$

* KCL در گرهی که منبع ولتاژ است مناسب نیست.



مثال ۳ - KCL در گره‌های ۲ و ۳ چون منبع ولتاژ داریم مناسب نیست.

$$e_3 - e_2 = 2$$

$$KCL\,1\quad -45 + e_1 + 2(e_1 - e_2) + 3(e_1 - e_3) = 0$$

$$KCL\,23\quad 2(e_2 - e_1) + 2e_2 + e_3 + 3(e_3 - e_1) = 0$$

از حل دستگاه معادلات فوق داریم:

$e_1 = 14\,V$

$e_2 = 9\,V$

$e_3 = 11\,V$

* نتایج کاملاً مشابه مثال ۱ شد. علت چیست؟

* در روش گره اگر منبع ولتاژی بین دو گره زمین نشده وجود داشت به جای نوشتن KCL ها در دو گره دو رابطه زیر را می‌نویسیم :

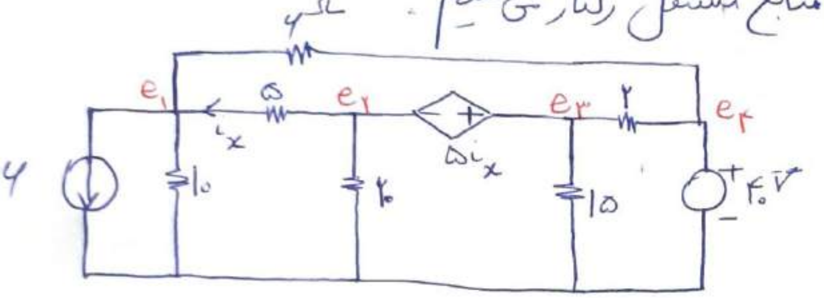
۱- رابطه ایجاد شده بین دو ولتاژ حسب منبع ولتاژ

۲- نوشتن KCL ها در گره مرکب از دو گره

* در روش گره اگر منبع ولتاژ بین گره زمین و یک گره باشد، ولتاژ آن گره معلوم است و دیگر نیازی نیست در آن گره KCL ها بنویسیم.

* با منابع وابسته نیز عیناً مشابه منابع مستقل رفتار می‌کنیم.

مثال ۴ :



$\rightarrow \quad e_4 = 40\,V$

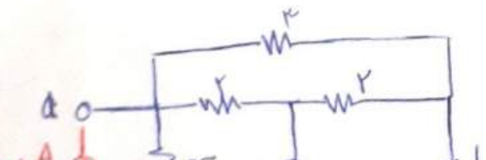
$\rightarrow \quad e_3 - e_2 = 5\left(\frac{e_2 - e_1}{5}\right) \Rightarrow e_3 - e_2 = e_2 - e_1$

KCL23: $\frac{1}{2}(e_3 - 40) + \frac{1}{15}e_3 + \frac{1}{20}e_2 + \frac{1}{5}(e_2 - e_1) = 0$

KCL 1: $+6 + \frac{1}{10}e_1 + \frac{1}{5}(e_1 - e_2) + \frac{1}{6}(e_1 - 40) = 0$

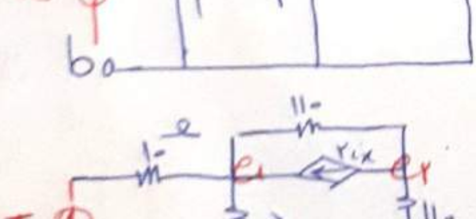
$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = 10\,V \\ e_2 = 20\,V \\ e_3 = 30\,V \end{cases}$$

مثال ۵ :



$e_1 = 14\,V \Rightarrow R = \frac{14}{45}\,\Omega$

مثال ۶: مقاومت دیده شده از سرهای a و b را تعیین کنید.

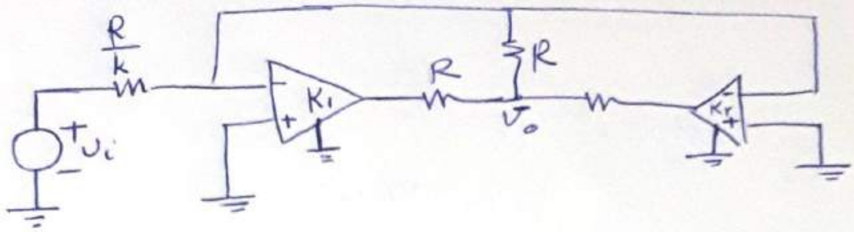


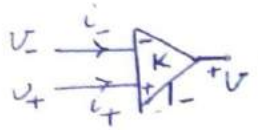
$-I_0 + \frac{1}{5}e_1 + \frac{1}{110}(e_1 - e_2) - 2I_0 = 0 \rightarrow$ KCL e_1

$\frac{1}{100}e_2 + 2I_0 + \frac{1}{110}(e_2 - e_1) = 0 \rightarrow$ KCL ها e_2

$$\rightarrow \begin{cases} e_1 = 10\,I_0 \\ e_2 = -100\,I_0 \end{cases} \rightarrow e_I = 20\,I_0 \rightarrow R = 20$$

مثال ۷ :

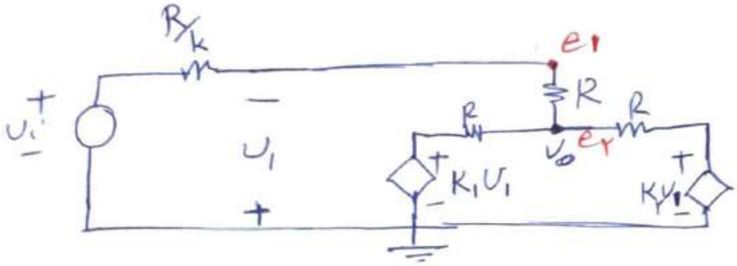




$i_- = 0$

$i_+ = 0$

$v = K(v_+ - v_-)$



$$e_1 = -v_1$$

$$\frac{1}{R}(e_1 - e_2) + \frac{k}{R}(e_1 - v_i) = 0$$

$$\frac{1}{R}(e_2 - e_1) + \frac{1}{R}(e_2 + K_1 e_1) + \frac{1}{R}(e_2 + K_2 e_1) = 0$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{k(1 - K_2 - K_1)}{2 + 3k + K_2 + K_1} v_i = v_o$$

جلسه هشتم :

- روش تحلیل مش :

* مش ← ساده‌ترین حلقه‌ای که شاخه درون آن نباشد ← هر شاخه مدار یا در یک مش تنها قرار می‌گیرد و یا در دو مش مشترک است.

* متغیرها ← جریان‌های فرضی که در مش‌ها گردش می‌کنند ← اگر شاخه‌ای در دو مش مشترک باشد جریان هر دو مش از آن می‌گذرد.

* قرارداد ← انتخاب جهت جریان فرضی مش اختیاری است ولی معمولاً جریان همه مش‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیرند

* اساس روش ← نوشتن KVL در مش‌ها و به دست آوردن جریان مش‌ها

* مراحل :

۱- منابع جریان موازی با مقاومت را به منابع ولتاژ سری با آنها تبدیل می‌کنیم

۲- شماره‌گذاری مش‌ها - انتخاب جهت جریان فرضی برای آنها (معمولاً همه ساعتگرد)

۳- جریان شاخه‌ای که فقط در یک مش است = جریان آن مش
جریان شاخه مشترک در دو مش = تفاضل جریان دو مش

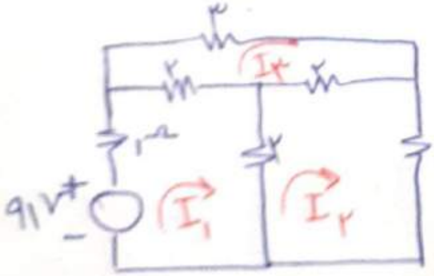
۴- نوشتن KVL در تمامی مش‌ها ← سعی می‌کنیم معادلات حاصل منحصراً برحسب جریان مش‌ها نوشته شود.

۵- منابع وابسته را نیز مشابه منابع مستقل در نظر می‌گیریم (منابع وابسته را نیز منحصراً برحسب جریان مش‌ها می‌نویسیم)

۶- یک دستگاه معادله n تایی با n مجهول حاصل می‌شود ← جریان مش‌ها را به دست می‌آوریم

۷- با استفاده از جریان مش‌ها می‌توان ولتاژ و جریان هر شاخه‌ای از مدار را کسب کرد.

مثال ۱ :



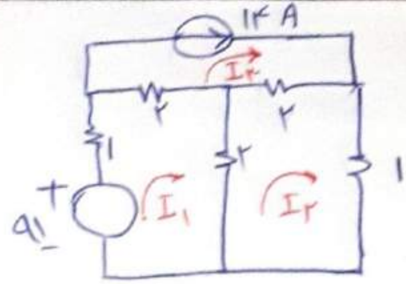
KVL1 : $I_1 + 2(I_1 - I_3) + 2(I_1 - I_2) = 91$

KVL2 : $2(I_2 - I_1) + 2(I_2 - I_3) + I_2 = 0$

KVL3 : $3I_3 + 2(I_3 - I_2) + 2(I_3 - I_1) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} I_1 = 31^{A} \\ I_2 = 18^{A} \\ I_3 = 14^{A} \end{cases}$$

مثال ۲:



$$\text{KVL1: } I_1 + 2(I_1 - I_3) + 2(I_1 - I_2) = 91$$

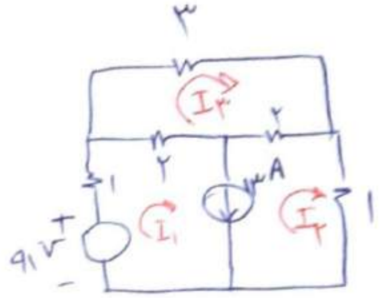
$$\text{KVL2: } 2(I_2 - I_1) + 2(I_2 - I_3) + I_2 = 0$$

$$\text{KVL3: } I_3 = 14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = 31\ A \\ I_2 = 18\ A \\ I_3 = 14\ A \end{cases}$$

* مقایسه مثال ۱ و ۲ ⇐ قضیه جانشینی

مثال ۳:



$$\text{KVL3: } 3I_3 + 2(I_3 - I_2) + 2(I_3 - I_1) = 0$$

$$\text{KVL12: } I_1 + 2(I_1 - I_3) + 2(I_2 - I_3) + I_2 = 91$$

$$\longrightarrow I_1 - I_2 = 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = 31\ A \\ I_2 = 18\ A \\ I_3 = 14\ A \end{cases}$$

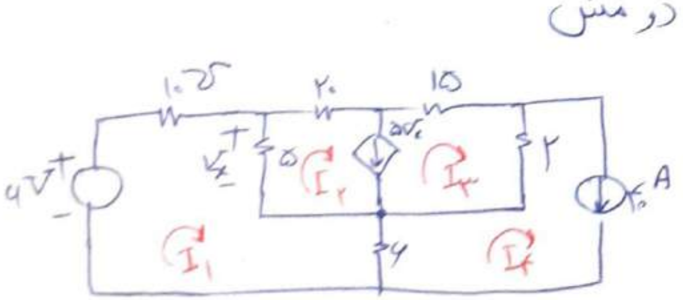
* در روش مش اگر منبع جریان شاخه تنها از یک مش باشد ← جریان مش مشخص است و دیگر نیازی به نوشتن معادلات KVL در آن مش نیست.

* اگر منبع جریانی در شاخه مشترک بین دو مش قرار داشته باشد به جای نوشتن KVL در دو مش دو رابطه زیر را می‌نویسیم:

۱- رابطه ایجاد شده بین جریان دو مش برحسب منبع جریان موجود در شاخه مشترک

۲- نوشتن KVL در حلقه مرکب دو مش

مثال ۴:



$$I_4 = 40$$

$$\left\{\begin{array}{l} I_2 - I_3 = 5V_x \\ V_x = \frac{1}{5}(I_1 - I_2) \end{array}\right\} \Rightarrow I_2 - I_3 = I_1 - I_2 \Rightarrow I_1 - 2I_2 + I_3 = 0$$

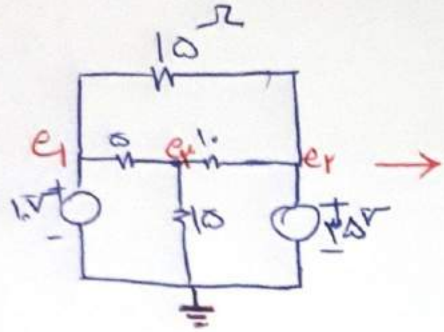
$$5(I_2 - I_1) + 20 I_2 + 15 I_3 + 2(I_3 - 40) = 0$$

$$-6 + 10 I_1 + 5(I_1 - I_2) + 6(I_1 - 40) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = 10\ A \\ I_2 = 20\ A \\ I_3 = 30\ A \\ I_4 = 40\ A \end{cases}$$

* روشی برای تحلیل مدار مناسب تر است که منجر به معادلات کمتری شود

مثال:



→ گره

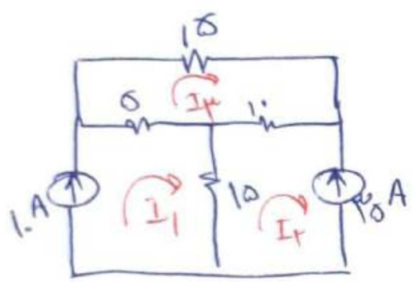
$e_1 = 10\,V$

$e_2 = 35\,V$

KCL3: $\frac{1}{5}(e_3-10)+\frac{1}{15}e_3+\frac{1}{10}(e_3-35)=0$

$\Rightarrow e_3 = 15\,V$

با روش مش باید سه معادله با سه مجهول را حل می‌کردیم.



→ مش

$I_1 = 10$

$I_2 = -35$

$15 I_3 + 10(I_3 + 35) + 5(I_3 - 10) = 0$

$\Rightarrow I_3 = -10\,A$

با روش گره باید سه معادله با سه مجهول را حل می‌کردیم

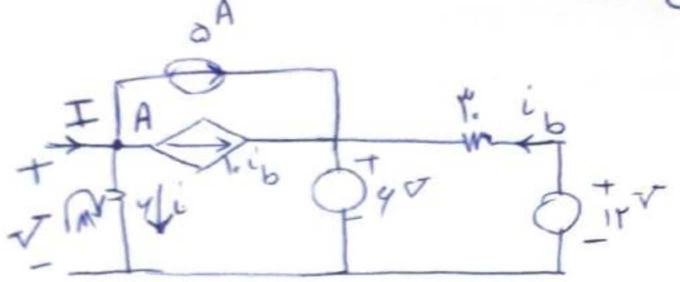
جلسه هشتم:

- مدارهای معادل تونن نورتن

* مداری داریم که ترکیب هر تعداد مقاومت خطی منابع وابسته و منابع مستقل است
* تنها رفتار مدار از دو سر مشخص شده آن مورد نظر است.

← مدار معادل تونن: اتصال سری منبع ولتاژ و مقاومت
مدار معادل نورتن: اتصال موازی منبع جریان و مقاومت

مثال ۱:

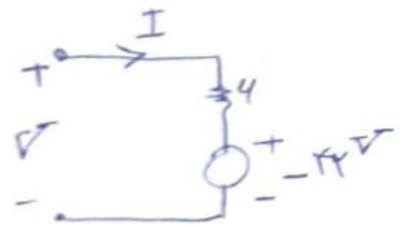


$i_b = \frac{12-6}{30} = \frac{1}{5}\ A$

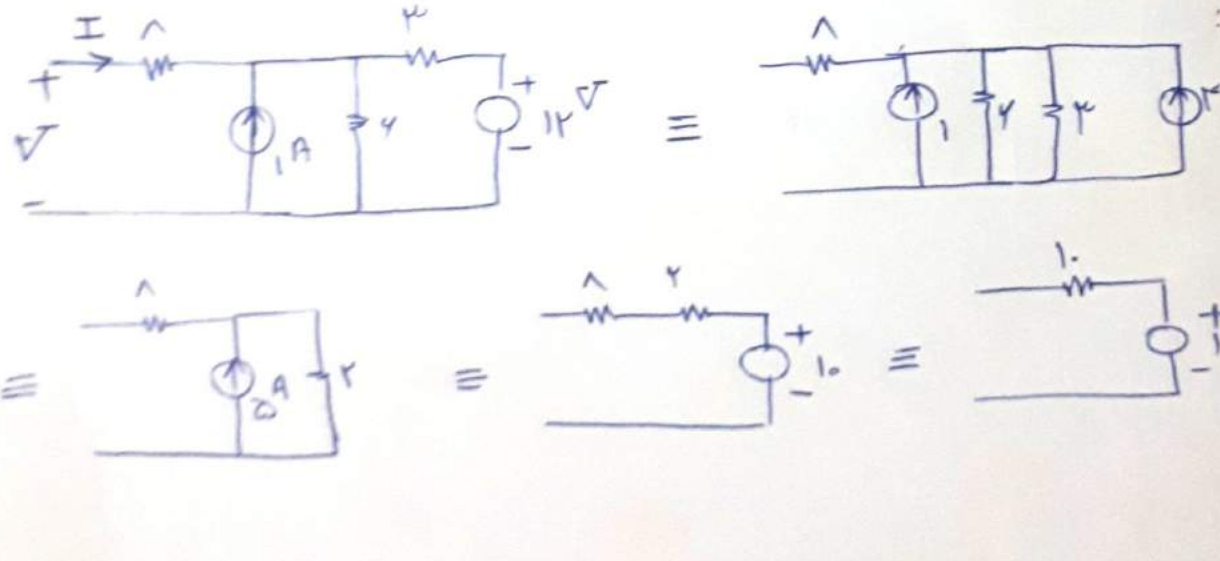
KCL A: $i + 10 i_b + 5 - I = 0 \Rightarrow i = I - 5 - 10\,\frac{1}{5} = I - 7$

KVL M: $-V + 6(I-7) = 0 \Rightarrow V = 6I - 42$

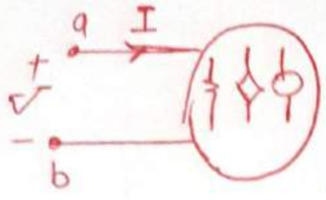
مدار معادل تونن حاصل:



مثال ۲:



تعمیم نتایج :

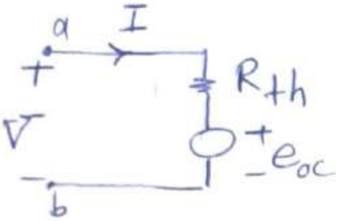


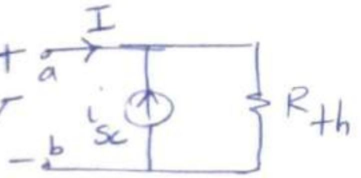
اگر از هر دو سر (تک قطب) مانند a و b در شکل مقابل به مدار نگاه کنیم رابطه میان ولتاژ V ، جریان I یک رابطه خطی به شکل $V=\alpha I+\beta$ است. تونن ثابت کرد α مقاومت دیده شده از دو سر a و b و β ولتاژ مدار باز دیده شده در این دو سر است که از این به بعد به آنها به ترتیب R_{th} و e_{oc} می گوییم.

نکته ۱ ← e_{oc} را می توانیم به راحتی با هر کدام از روش های تحلیل مدار به دست آوریم.

نکته ۲ ← برای محاسبه R_{th} نیز ابتدا تمام منابع مستقل داخل مجموعه را صفر می کنیم و سپس مقاومت معادل را محاسبه می کنیم.

نکته ۳ ← مدار معادل تونن به صورت مقابل است.

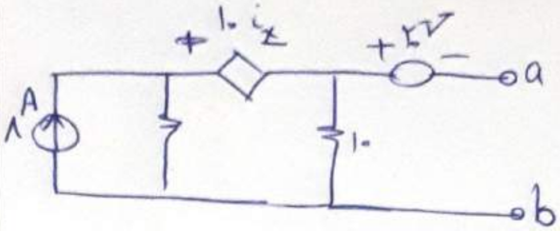




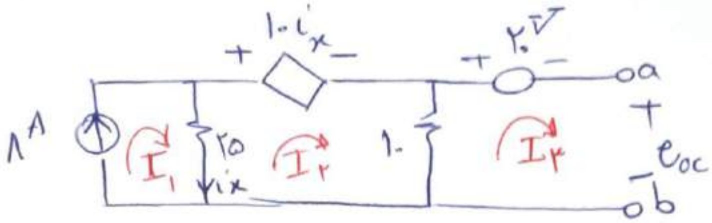
می توان مدار فوق را به صورت مقابل نیز نشان داد:
که در رابطه مقابل $i_{sc}=\frac{e_{oc}}{R_{th}}$ ، نرتن ثابت کرد i_{sc} را می توان از اتصال کوتاه کردن سرهای a و b و تعیین جریان گذرنده از این شاخه اتصال کوتاه در جهت a به b تعیین کرد.

نکته ۴ ← برای تعیین مدارهای معادل تونن و نرتن دیده شده از دو سر دلخواه هر مدار خطی کافیست که دو تا از سه مقدار e_{oc} ، i_{sc} ، R_{th} را تعیین کنیم. بهتر است آن دو تایی را پیدا کنیم که محاسبه آنها در مدار راحتتر است.

مثال: هریک از کمیت‌های e_{oc}، R_{th}، i_{sc} را در مدار مقابل به دست آورده و رابطه $e_{oc}=R_{th}\,i_{sc}$ را تحقیق کنید.



محاسبه e_{oc}:



$I_1 = 8\,A$

$I_3 = 0\,A$

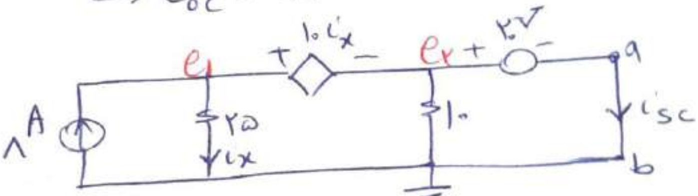
$25(I_2-8)+10i_x+10(I_2)=0 \Rightarrow 25(I_2-8)+10(8-I_2)+10I_2=0$

$\Rightarrow 25I_2=120 \Rightarrow I_2=4.8$

$10(I_3-I_2)+20+e_{oc}=0 \Rightarrow 10(-4.8)+20+e_{oc}=0$

$\Rightarrow e_{oc}=48-20=28\,V$

محاسبه i_{sc}:

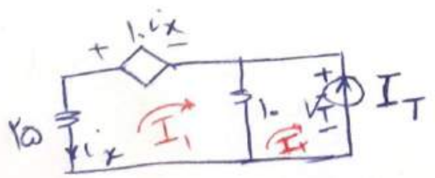


$e_1-e_2=10i_x=10\,\frac{e_1}{25} \Rightarrow \frac{15}{25}e_1=e_2=20 \Rightarrow e_1=\frac{25}{15}\times 20$

$-8+\frac{e_1}{25}+\frac{e_2}{10}+i_{sc}=0$

$\Rightarrow i_{sc}=8-\frac{e_1}{25}-\frac{e_2}{10}=8-\frac{20}{15}-$

محاسبه R_{th}: ابتدا کلیه منابع مستقل را صفر می‌کنیم



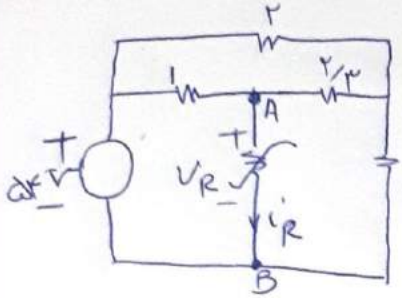
$I_2=-I_T$

$25I_1+10(-I_1)+10(I_1+I_T)=0 \Rightarrow 25I_1=-10I_T \Rightarrow I_1=-\frac{10}{25}I_T$

$-V_T+10(I_1-I_2)=0 \Rightarrow V_T=10(+I_T-\frac{10}{25}I_T)=10(\frac{15}{25})I_T$

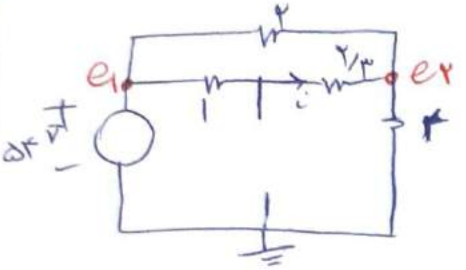
$\Rightarrow R_{th}=6$

مثال در مدار شکل مقابل مقاومت غیرخطی R با رابطه $v_R = 6 i_R^3 - \frac{2}{3} i_R$ توصیف می‌شود. جریانی که از این مقاومت می‌گذرد را تعیین نمایید.



ابتدا مدار معادل تونن را از دو سر A و B تعیین می‌کنیم.

بدست آوردن e_{oc} :



$$e_1 = 54$$

$$KCL2:\ \frac{e_2}{4} + \frac{e_2 - 54}{10/11} = 0$$

$$\frac{10+44}{40} = \frac{54}{40}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{11}{10}\right) e_2 = 54 \times \frac{11}{10}$$

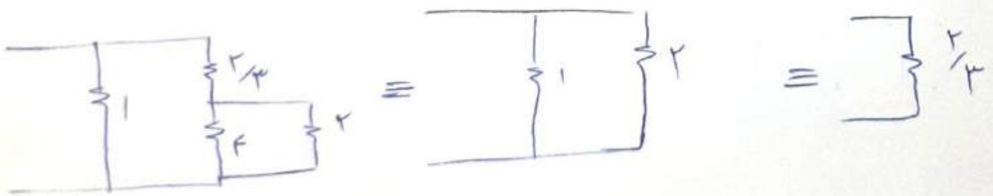
$$\Rightarrow e_2 = 54 \times \frac{11}{10} \times \frac{40}{54} = 44$$

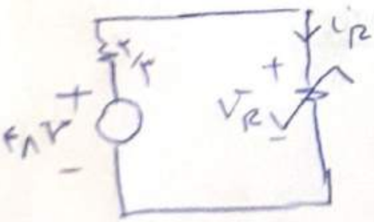
$$i = \frac{54-44}{5/3} = 10 \times \frac{3}{5} = 6$$

$$e_{oc} = e_2 + \frac{2}{3} i = 44 + \frac{2}{3} \times 6 = 48$$

بدست آوردن R_{th} :

$(2 \parallel 4)$



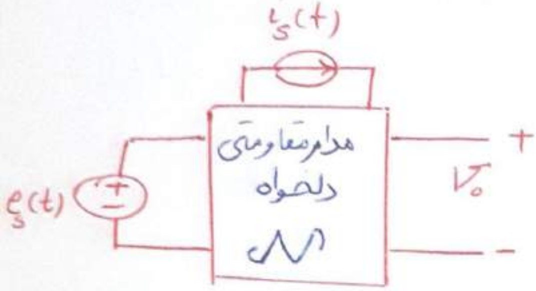


$$48 = \frac{2}{3} i_R + v_R = \frac{2}{3} i_R + 6 i_R^3 - \frac{2}{3} i_R = 6 i_R^3 \Rightarrow i_R^3 = 8 \Rightarrow i_R = 2^A$$

جلسه نهم:

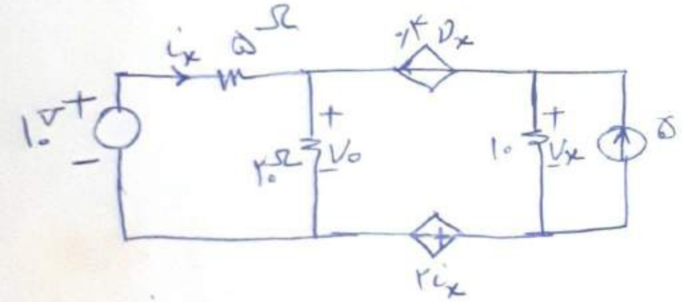
- جمع آثار
- استفاده از تقارن در حل مدارهای مقاومتی
- اتصال سری و موازی سلف‌ها و خازن‌ها

- جمع آثار:



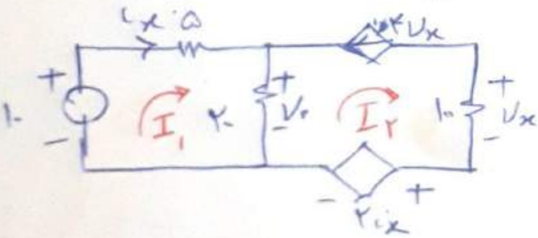
- مدار مقاومتی N را در نظر بگیرید. ولتاژ خروجی V_o در این مدار از اعمال همزمان دو منبع حاصل می‌شود و یقیناً از هر دو متأثر می‌شود.

قضیه جمع آثار می‌گوید پاسخ حاصل از اعمال همزمان دو یا چند منبع نابسته برابر مجموع پاسخ‌های حاصل از اعمال هر یک از منابع به تنهایی است به شرط آنکه دیگر منابع نابسته موجود در مدار برابر صفر قرار داده شوند.



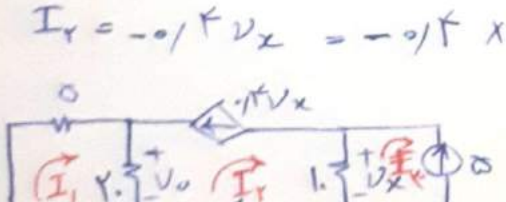
- مثال: ولتاژ خروجی v_o را با استفاده از قضیه جمع آثار به دست آورید.

۱- v_o حاصل از منبع ولتاژ



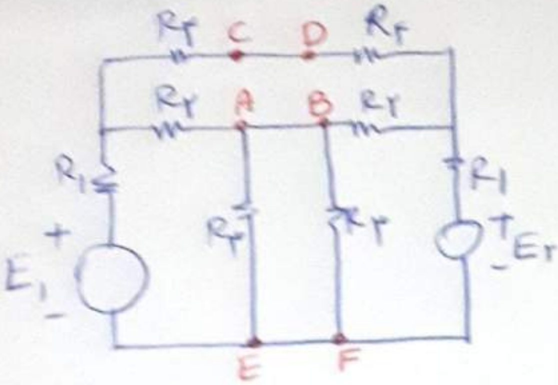
$$-10 + 5I_1 + 20(I_1 - I_2) = 0$$
$$I_2 = -0.4 v_x = -0.4 \times 10 I_2 \Rightarrow I_2 = 0$$
$$\Rightarrow -10 + 5I_1 + 20 I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{10}{25} \Rightarrow v_{o1} = 8$$

۲-

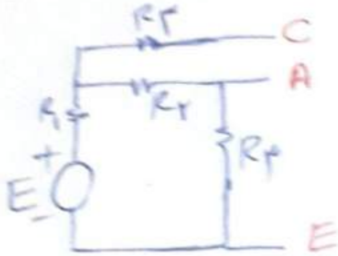


$$I_3 = -5$$
$$I_2 = -0.4 v_x = -0.4\left(10\left(I_2 - I_3\right)\right) = -4I_2 + 4I_3 \Rightarrow 5I_2 = 4I_3 \Rightarrow I_2 = -4$$
$$5I_1 + 20(I_1 + 4) = 0 \Rightarrow 25 I_1 = -80 \Rightarrow I_1 = -3.2$$
$$v_{o2} = 20(I_1 - I_2) = 20(-3.2 + 4) = 20 \times 0.8 = 16\ V \Rightarrow V_o = 24\ V$$

- استفاده از تقارن :

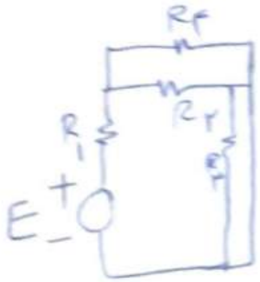


۱) $E_1 = E_2 = E$



مدار متقارن را می‌توان به راحتی تحلیل نمود و نتایج را به مدار اصلی مرتبط نمود.

۲) $E_2 = -E_1 = E$



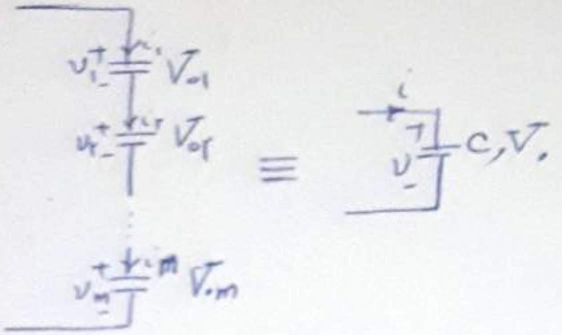
۳) E_1 و E_2 دلخواه

$$E_1 \longrightarrow \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{E_1 - E_2}{2}$$

$$E_2 \longrightarrow \frac{E_1 + E_2}{2} - \frac{E_1 - E_2}{2}$$

با استفاده از جمع آثار دو روش فوق مدار را حل می‌کنیم

- اتصال سری خازن‌ها



$KCL \rightarrow i_k(t) = i(t) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, m$

$KVL \rightarrow v(t) = \sum_{k=1}^{m} v_k(t)$

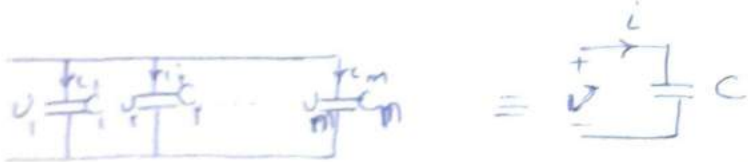
$$v_k(t) = V_{0k} + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(t')dt'$$

$$\Rightarrow v(t) = \sum_{i=1}^{m} v_i(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} V_{0k}}_{V_0} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{C_k}\right)}_{1/C_T} \int_0^t i(t')dt'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_T} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{C_k}$$

$$V_0 = \sum_{k=1}^{m} V_{0k}$$

- اتصال موازی خازن‌ها:



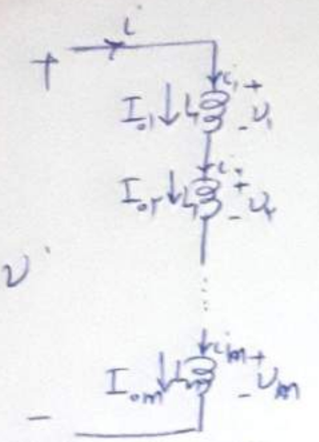
* براساس KVL باید داشته باشیم:

$V_{01} = \ldots = V_{0m}$

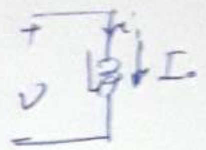
$$\left.\begin{array}{l} KCL \quad i = \sum_{k=1}^{m} i_k \\ i_k = C_k \frac{dv_k}{dt} \\ v_1(t) = \ldots = v_k(t) \end{array}\right\} \Rightarrow i = \sum_{k=1}^{m} C_k \frac{dv}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{m} C_k\right)\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_T = \sum_{k=1}^{m} C_k \\ V_0 = V_{01} = \ldots = V_{0k} \end{cases}$$

اتصال سری سلف ها.



$=$

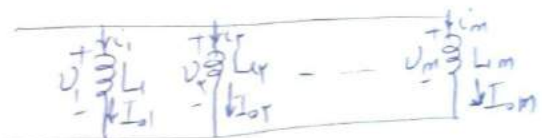


$$KCL \rightarrow I_{01} = I_{02} = \cdots = I_k = I_0$$

$$\left.\begin{aligned} & i_1 = i_2 = \cdots = i_k \\ & v_k = L_k \frac{d\, i_k(t)}{dt} \\ & v = \sum_{k=1}^{m} v_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sum_{k=1}^{m} L_k \frac{d\, i_k(t)}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{m} L_k\right) \frac{d\, i(t)}{dt}$$

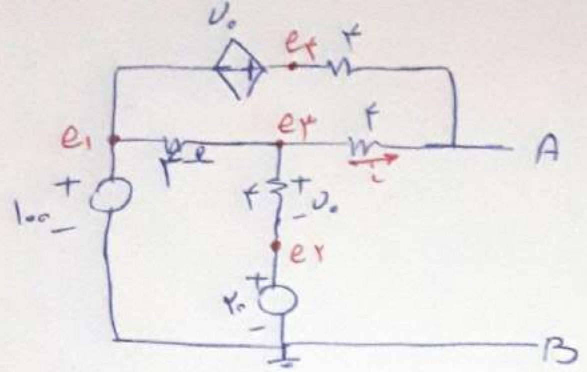
$$\Rightarrow \begin{cases} L = \sum_{k=1}^{m} L_k \\ I_0 = I_{01} = I_{02} = \cdots = I_{0m} \end{cases}$$

اتصال موازی سلف ها.



$$\left.\begin{aligned} & KVL \Rightarrow v(t) = v_1(t) = \cdots = v_m(t) \\ & KCL \Rightarrow i(t) = \sum_{k=1}^{m} i_k(t) \\ & \qquad i_k(t) = I_{0k} + \frac{1}{L} \int_0^t v_k(t')\,dt' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{L_k} \\ I_0 = I_{01} + \cdots + I_{0m} \end{cases}$$

مثال ۱: معادل تونن نورتن را از سرهای A , B بیابید.



e_{oc} :

$e_1 = 100$

$e_2 = 20$

$e_4 = e_1 + v_0 = 100 + e_3 - e_2 = 100 + e_3 - 20 \Rightarrow e_4 - e_3 = 80$

$$\frac{e_3 - e_1}{4} + \frac{e_3 - e_2}{4} + \frac{e_3 - e_4}{8} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e_3}{4} - 25 + \frac{e_3}{4} - 5 + \frac{e_3 - e_4}{8} = 0$$

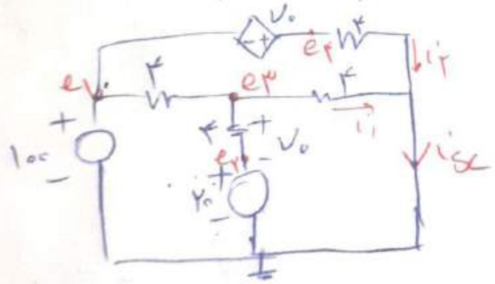
$$\Rightarrow \frac{e_3}{2} + \frac{e_3}{8} - \frac{e_4}{8} = 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -e_3 + e_4 = 80 \\ \frac{5}{8} e_3 - \frac{1}{8} e_4 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_3 = 80 \\ e_4 = 160 \end{cases}$$

$$i = -\frac{80}{8} = -10 \ A$$

$$-e_3 + 4i + e_{oc} = 0 \Rightarrow e_{oc} = e_3 - 4i = 80 + 40 = 120 \ V$$

i_{sc} :



$e_1 = 100$

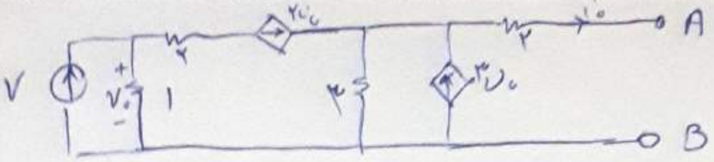
$e_2 = 20$

$e_4 = 100 + e_3 - e_2 = 100 + e_3 - 20 \Rightarrow e_4 - e_3 = 80 \Rightarrow e_4 = 120$

$$\frac{e_3 - 100}{4} + \frac{e_3 - 20}{4} + \frac{e_3}{4} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} e_3 = 30 \Rightarrow e_3 = 40$$

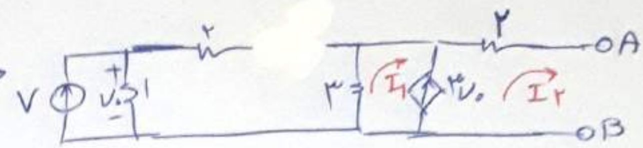
$$i_{sc} = i_1 + i_2 = \frac{120}{4} + \frac{40}{4} = 30 + 10 = 40 \ A$$

مثال ۵۲



: e_{oc}

$i_o = 0 \Rightarrow$

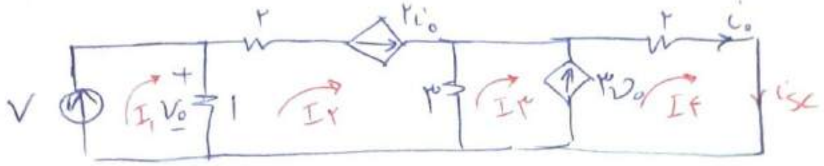


$v_o = 7V$

$$\begin{cases} I_2 = 0 \\ I_2 - I_1 = 3v_o \Rightarrow I_1 = -3v_o = -21 \end{cases}$$

$$3I_1 + 2(I_2) + e_{oc} = 0 \Rightarrow e_{oc} = -3I_1 = -3(-21) = 63$$

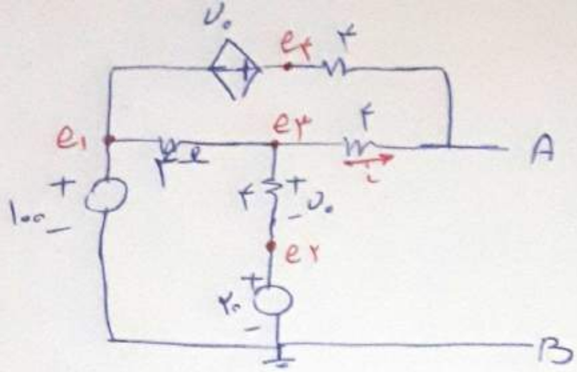
: i_{sc}



$$\left.\begin{aligned} &I_1 = 7 \\ &I_2 = 2v_o = 2I_4 \\ &3(I_3 - I_2) + 2I_4 = 0 \\ &I_4 - I_3 = 3v_o = 3(I_1 - I_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} I_2 - 2I_4 = 0 \\ -3I_2 + 3I_3 + 2I_4 = 0 \\ 3I_2 - I_3 + I_4 = 21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_2 = 7.41 \\ I_3 = 4.94 \\ I_4 = 3.71 \end{cases}$$

مثال ۱: معادل تونن نورتن را از سرهای A , B بیابید.



: e_{oc}

$e_1 = 100$

$e_2 = 20$

$e_4 = e_1 + v_0 = 100 + e_3 - e_2 = 100 + e_3 - 20 \Rightarrow e_4 - e_3 = 80$

$$\frac{e_3 - e_1}{4} + \frac{e_3 - e_2}{4} + \frac{e_3 - e_4}{8} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e_3}{4} - 25 + \frac{e_3}{4} - 5 + \frac{e_3 - e_4}{8} = 0$$

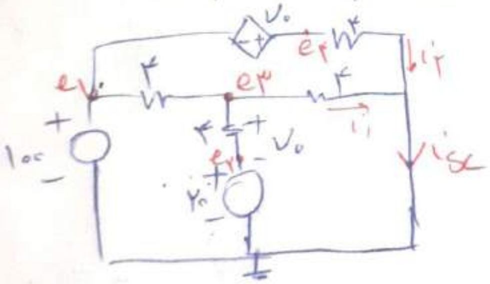
$$\Rightarrow \frac{e_3}{2} + \frac{e_3}{8} - \frac{e_4}{8} = 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -e_3 + e_4 = 80 \\ \frac{5}{8} e_3 - \frac{1}{8} e_4 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_3 = 80 \\ e_4 = 160 \end{cases}$$

$$i = -\frac{80}{8} = -10\ A$$

$$-e_3 + 4i + e_{oc} = 0 \Rightarrow e_{oc} = e_3 - 4i = 80 + 40 = 120\ V$$

: i_{sc}



$e_1 = 100$

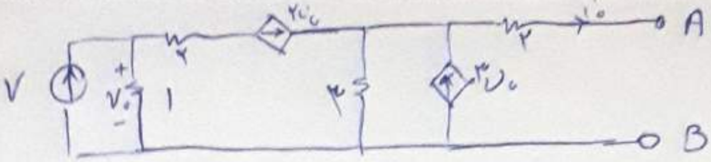
$e_2 = 20$

$e_4 = 100 + e_3 - e_2 = 100 + e_3 - 20 \Rightarrow e_4 - e_3 = 80 \Rightarrow e_4 = 120$

$$\frac{e_3 - 100}{4} + \frac{e_3 - 20}{4} + \frac{e_3}{4} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} e_3 = 30 \Rightarrow e_3 = 40$$

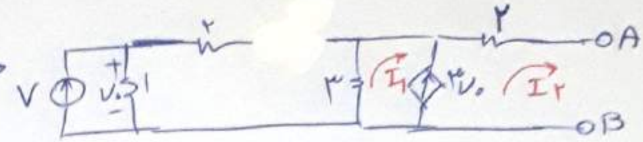
$$i_{sc} = i_1 + i_2 = \frac{120}{4} + \frac{40}{4} = 30 + 10 = 40\ A$$

مثال ۵۲



: e_{oc}

$i_0 = 0 \Rightarrow$

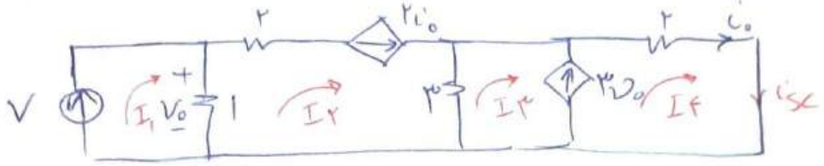


$v_0 = 7V$

$$\begin{cases} I_2 = 0 \\ I_2 - I_1 = 3v_0 \Rightarrow I_1 = -3v_0 = -21 \end{cases}$$

$$3I_1 + 2(I_2) + e_{oc} = 0 \Rightarrow e_{oc} = -3I_1 = -3(-21) = 63$$

: i_{sc}



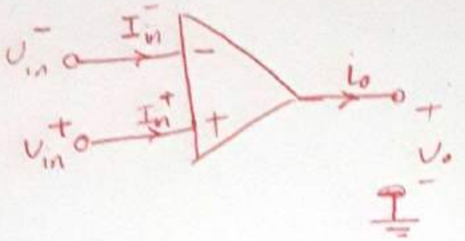
$$\left.\begin{aligned} & I_1 = 7 \\ & I_2 = 2v_0 = 2I_4 \\ & 3(I_3 - I_2) + 2I_4 = 0 \\ & I_4 - I_3 = 3v_0 = 3(I_1 - I_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} I_2 - 2I_4 = 0 \\ -3I_2 + 3I_3 + 2I_4 = 0 \\ 3I_2 - I_3 + I_4 = 21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_2 = 7.41 \\ I_3 = 4.94 \\ I_4 = 3.71 \end{cases}$$

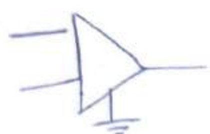
جلسه دهم

آپ امپ

- تعریف آپ امپ ایده‌آل:



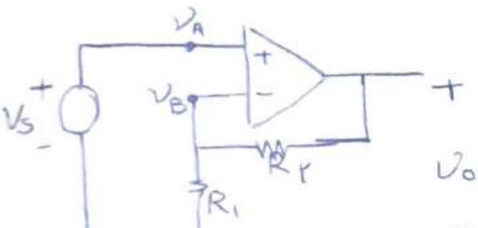
$$\begin{cases} I_{in}^+ = I_{in}^- = 0 \\ v_d = v_{in}^+ - v_{in}^- = 0 \end{cases}$$



- اگر KCL را به نماد یک آپ امپ ایده‌آل اعمال نماییم ظاهراً تناقضی وجود دارد زیرا $I_{in}^+ = I_{in}^- = 0$ بوده ولی $_o$ صفر نیست. علت این تناقض ظاهری عدم درنظرگرفتن گره زمین در رابطه آپ امپ است.

- در مدل آپ امپ ایده‌آل $v_d = v_{in}^+ - v_{in}^- = 0$ درنظرگرفته می‌شود از این رو می‌توان گفت سرهای ورودی آپ امپ اتصال کوتاه مجازی هستند یعنی هیچ اتصالی بین آنها وجود ندارد ولی ولتاژ آنها مثل هم است.

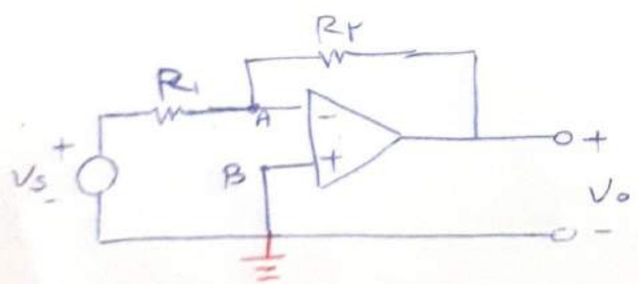
- تقویت‌کننده غیرمعکوس کننده:



$$\left.\begin{array}{l} KVL: v_A = v_S \\ \text{opamp رابطه}: v_B = v_A \end{array}\right\} \Rightarrow v_B = v_S$$

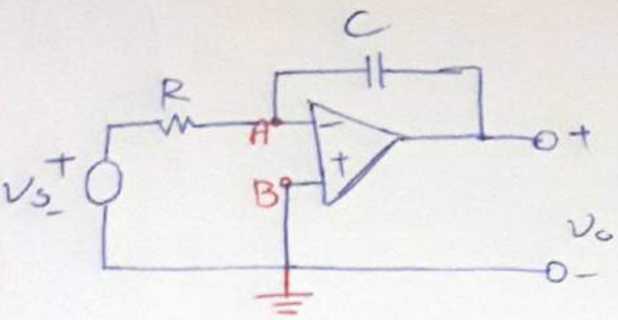
$$KCL\ B: \frac{v_S}{R_1} + \frac{v_S - v_o}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{v_o}{v_S} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \rightarrow$$ تقویت‌کننده غیرمعکوس‌کننده

- تقویت‌کننده معکوس کننده:



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v_B = 0 \\ \text{opamp رابطه} \Rightarrow v_A = v_B \end{array}\right\} \Rightarrow v_A = 0 \\ KVL\ A: \frac{v_A - v_S}{R_1} + \frac{v_A - v_o}{R_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v_o}{v_S} = -\frac{R_2}{R} \rightarrow$$ تقویت‌کننده معکوس کننده

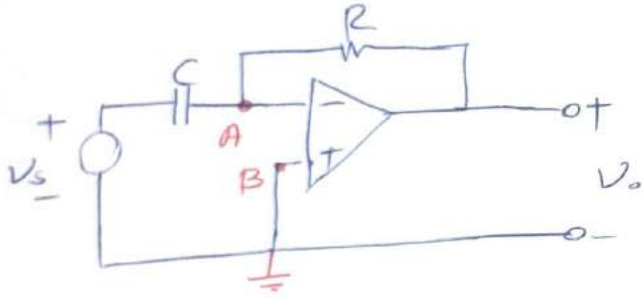
- انتگرال گیر :



$$\left.\begin{array}{l} v_B = 0 \\ v_A = v_B \end{array}\right\} \Rightarrow v_o = 0$$

$$\text{KCL A: } \frac{v_A - v_s}{R} + C\frac{d}{dt}(v_A - v_o) = 0 \Rightarrow v_o = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} v_s(t)\,dt$$

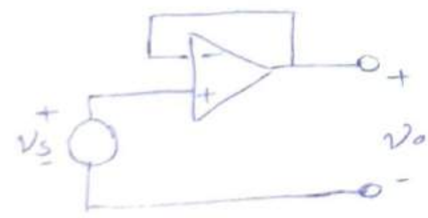
- مشتق گیر :



$$\left.\begin{array}{l} v_B = 0 \\ v_A = v_B \end{array}\right\} \Rightarrow v_A = 0$$

$$\text{KCL A: } \frac{C\,d(-v_s)}{dt} + \frac{v_A - v_o}{R} = 0 \Rightarrow v_o = -RC\frac{dv_s}{dt}$$

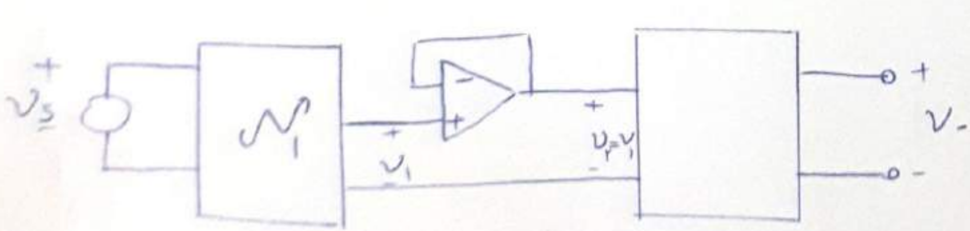
- تعقیب کننده ولتاژ :



$v_o = v_s$

مزایا :

* هر بار دلخواهی که در v_o قرار بگیرد نمی‌تواند این ولتاژ را تغییر دهد ← مدار ایزوله به منظور جلوگیری از اثر بارگذاری

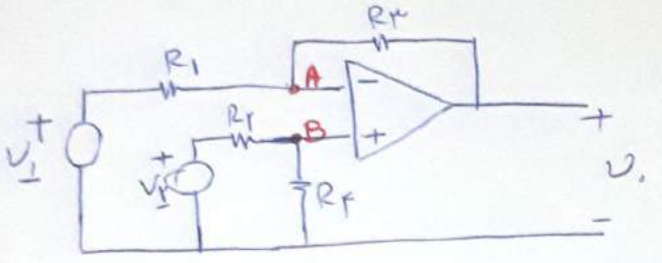


کوئیز اول

جلسه یازدهم:

- مثال آپ امپ
- مثال گره و مش

مثال ۱:



$$KCL\ B:\ \frac{v_B - v_2}{R_2} + \frac{v_B}{R_4} = 0 \Longrightarrow v_B = \frac{R_4}{R_2 + R_4} v_2$$

$$KCL\ A:\ \frac{v_A - v_1}{R_1} + \frac{v_A - v_o}{R_3} = 0$$

$$v_A = v_B$$

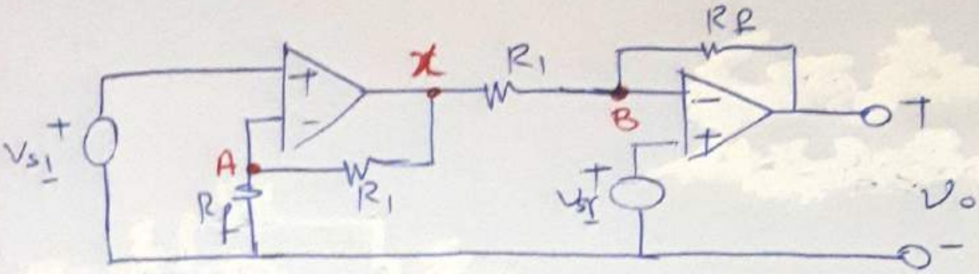
$$\Longrightarrow v_o = \frac{R_4 (R_1 + R_3)}{R_1 (R_2 + R_4)} v_2 - \frac{R_3}{R_1} v_1$$

* در حالت خاص $R_1 = R_2$ و $R_3 = R_4$ داریم:

$$v_o = \frac{R_3}{R_1} (v_2 - v_1)$$

مدار فوق را تقویت‌کننده تفاضلی گویند زیرا اختلاف پتانسیل $v_2 - v_1$ را با ضریب $\frac{R_3}{R_1}$ تقویت نموده است.

مثال ۲:



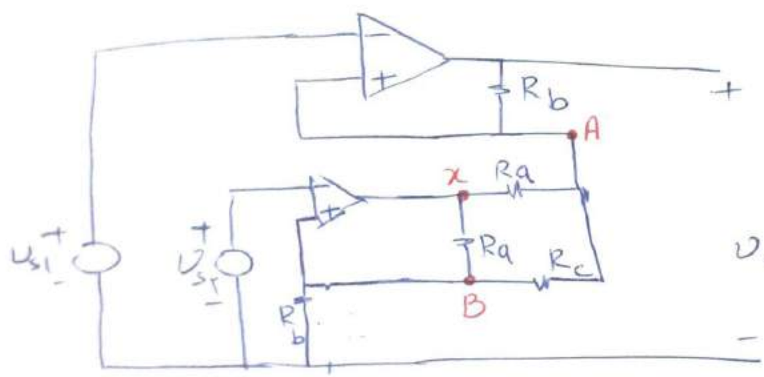
opamp رابطه $\Rightarrow v_A = v_{s1} \Rightarrow$ KCL, A: $\dfrac{v_{s1}-v_x}{R_1} + \dfrac{v_{s1}}{R_f} = 0 \Rightarrow$

op-amp رابطه $\Rightarrow v_B = v_{s2} \Rightarrow$ KCL, B: $\dfrac{v_{s2}-v_x}{R_1} + \dfrac{v_{s2}-v_o}{R_f} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_f}\right) \\ v_{s2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_f}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_o = \frac{R_1+R_f}{R_1}\left(v_2 - v_1\right)$$

مثال ۳:



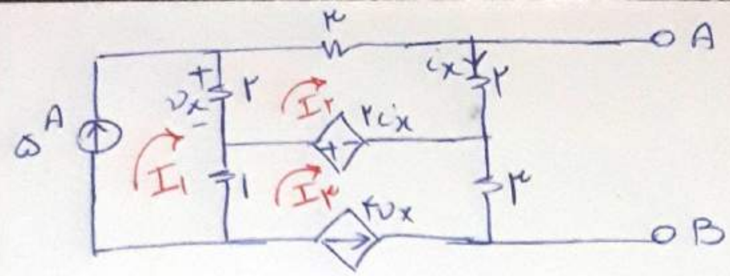
op-amp رابطه $\Rightarrow v_A = v_{s1} \Rightarrow$ KCL A: $\dfrac{v_{s1}-v_o}{R_b} + \dfrac{v_{s1}-v_x}{R_a} + \dfrac{v_{s1}-v_{s2}}{R_c} = 0$

op-amp رابطه $\Rightarrow v_B = v_{s2} \Rightarrow$ KCL B: $\dfrac{v_{s2}}{R_b} + \dfrac{v_{s2}-v_x}{R_a} + \dfrac{v_{s2}-v_{s1}}{R_c} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_a} & \frac{1}{R_b} \\ \frac{1}{R_a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1}\left(\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}\right) - v_{s2}\frac{1}{R_c} \\ -v_{s1}\frac{1}{R_c} + v_{s2}\left(\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_c}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_o = \frac{2R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_aR_c}\left(v_1 - v_2\right)$$

مثال ۵:

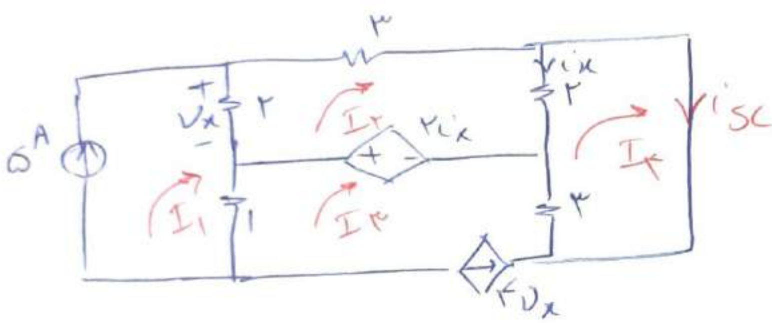


: e_{oc}

$$\left.\begin{aligned} & I_1 = 5 \\ & I_3 = -4v_x = -4(2(5 - I_2)) = -40 + 8I_2 \\ & 2(I_2 - 5) + 3I_2 + 2I_2 - 2I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 2A \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_3 = -24^A$$

$$-3I_3 - 2I_2 + e_{oc} = 0 \Rightarrow e_{oc} = 3I_3 + 2I_2 = -68^V$$

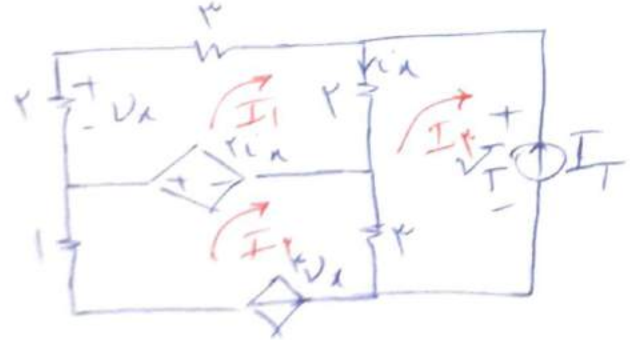
: i_{sc}



$$\left.\begin{aligned} & I_1 = 5 \\ & I_3 = -4v_x = -40 + 8I_2 \\ & KVL2:\ 2(I_2 - 5) + 3I_2 + 2(I_2 - I_4) - 2(I_2 - I_4) = 0 \Rightarrow I_2 = 2^A \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_3 = -24^A$$

$$KVL4:\ 3(I_4 + 24) + 2(I_4 - 2) = 0 \Rightarrow I_4 = i_{sc} = -\frac{68}{5}$$

: R_{th}



$$\left.\begin{aligned} & I_3 = -I_T \\ & I_2 = -4v_x = -4(-2I_1) = 8I_1 \\ & 5I_1 + 2(I_1 - I_3) - 2(I_1 - I_3) = 0 \Rightarrow I_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_2 = 0$$

$$V_T = 2I_T + 3I_T = 5I_T \Rightarrow R_{th} = 5$$

جلسه دوازدهم:

- مدارهای مرتبه اول - پاسخ ورودی صفر:

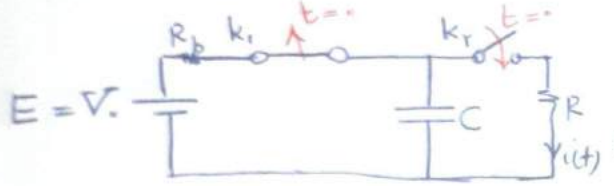
- تاکنون به معادلاتی رسیدیم که تنها عملیات جبری داشتند و معادلات دیفرانسیل در آنها ظاهر نمی‌گشت.

- در این فصل مدارهایی را بررسی می‌کنیم که با معادله دیفرانسیل مرتبه اول توصیف می‌شوند ← مدارهای مرتبه اول

- مدار مشترک خطی ← هریک از اجزای آن یک عنصر خطی یا یک منبع مستقل باشد.

- مدار مشترک تغییرپذیر با زمان ← هریک از اجزای آن یک عنصر تغییرپذیر با زمان یا منبع مستقل باشد.

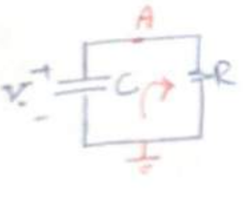
- مدار RC



* در لحظه $t=0$ کلید k_1 باز و کلید k_2 بسته می‌شود

* توصیف فیزیکی: بار $Q=CV_0$ در خازن ذخیره شده است جریان $i(t)$ را ایجاد می‌کند. با برقراری این جریان بار ذخیره شده در خازن کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد و همزمان جریان $i(t)$ نیز کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد. در این فرآیند انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن به صورت گرما در مقاومت تلف می‌شود.

* توصیف مداری



۱) روش اول

$$\text{KCL } A \quad C\frac{dv_A(t)}{dt}+\frac{v_A(t)}{R}=0 \qquad v_A(0)=V_0 \ , \ t\geq 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_A(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_A(t)=0 \qquad v_A(0)=V_0 \ , \ t\geq 0$$

رابطه فوق یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت است و جواب آن به صورت زیر است

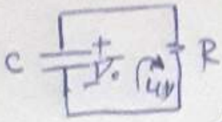
$$v_A(t)=Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

می‌توان درستی رابطه فوق را با قرار دادن آن در معادله دیفرانسیل تعیین نمود

ثابت K نیز از شرایط اولیه تعیین می‌گردد

$$\left.\begin{array}{l} v_A(0)=V_0 \\ v_A(0)=K \end{array}\right\} \Rightarrow K=V_0 \Rightarrow v_A(t)=V_0e^{-\frac{1}{RC}t} \ , \quad t\geq 0$$

*** روش مش :**



$$-V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' + R\,i(t) = 0 \qquad t \geq 0$$

$$\frac{1}{C}\, i(t) + R\frac{di(t)}{dt} = 0$$

حال باید شرایط اولیه $i(t)$ را تعیین کنیم:

$t=0$

$$i(0) = \frac{V_0}{R}$$

بنابراین معادله زیر را داریم:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\, i(t) = 0 \qquad i(0) = \frac{V_0}{R} \qquad t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} i(t) = K e^{-\frac{1}{RC}t} \\ \left.\begin{array}{l} i(0) = \frac{V_0}{R} \\ i(0) = K \end{array}\right\} \Rightarrow K = \frac{V_0}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

منحنی نمایی: با دو عدد مشخص می‌شود

$$f(t) = f(0)e^{-\frac{t}{T}} \longleftarrow \left\{\begin{array}{l} \text{۱) عرض منحنی در زمان مشخص مثلاً } t=0 \\ \text{۲) ثابت زمانی منحنی } T \end{array}\right.$$

✓ در زمان $t = T$ منحنی نمایی به ۳۷٪ مقدار اولیه خود می‌رسد. $\quad f(T) = f(0)e^{-1} = 0.368\, f(0)$

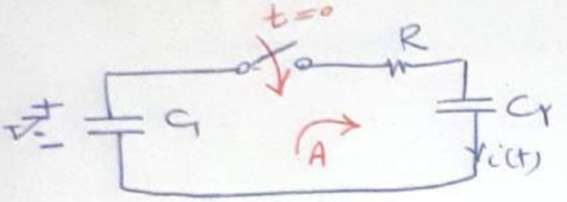
✓ در زمان $t = 4T$ منحنی نمایی به ۲٪ مقدار اولیه خود می‌رسد. $\quad f(4T) = f(0)e^{-4} = 0.0184\, f(0)$

✓ بعد جمله $s_0 = -\frac{1}{T} = -\frac{1}{RC}$ معکوس زمان یعنی فرکانس بوده و برحسب رادیان بر ثانیه اندازه‌گیری می‌شود و آن را فرکانس طبیعی مدار می‌گویند.

* در تجزیه مدار ما تقریباً همواره به رفتار یک متغیر خاص شبکه که پاسخ نامیده می‌شود توجه داریم. متغیرهای شبکه ولتاژ و یا جریان شاخه‌ها و یا ترکیبی از آنها است. همچنین ممکن است این متغیرها بار خازن و یا شار سلف باشند. پاسخ شبکه عموماً معلول منابع مستقل و یا شرطهای اولیه و یا هر دو است. در بالا شرایطی را بررسی کردیم که ورودی وجود نداشت و پاسخ تنها در اثر حالت اولیه خازن به وجود آمد. به این دلیل این پاسخ را پاسخ ورودی صفر می‌نامند.

* پاسخ ورودی صفر: به پاسخ شبکه‌ای اطلاق می‌شود که هیچ گونه ورودی نداشته باشد.

* پاسخ ورودی صفر یک مدار RC یک منحنی نمایی است که با فرکانس $s_0 = -\frac{1}{RC}$ و ولتاژ اولیه V_0 کاملاً مشخص می‌شود.



مثال. C_1 ← ولتاژ اولیه V_0

C_2 ← بدون ولتاژ اولیه

k در لحظه $t=0$ بسته می‌شود.

$$KVL\ A: \quad -V_0 + \frac{1}{C_1}\int_0^t i(t')dt' + Ri(t) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(t')dt' = 0 \qquad t \geq 0$$

$$t=0 \Longrightarrow i(0) = \frac{V_0}{R}$$

مشتق‌گیری

$$R\frac{di(t)}{dt} + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)i(t) = 0 \qquad i(0)=\frac{V_0}{R} \quad t \geq 0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0 \qquad i(0)=\frac{V_0}{R} \quad t \geq 0$$

$$\longrightarrow i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

* رفتار مدار وقتی $R \to 0$: مقدار اولیه جریان بزرگتر و ثابت زمانی مدار کوچکتر می‌شود

$$\int_0^t i(t')dt' = \int_0^t \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t'}{RC}}dt' = V_0C\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

روشن است وقتی $t \to \infty$ آنگاه $e^{-\frac{t}{RC}}$ صفر می‌شود و در نتیجه مقدار انتگرال به سوی مقدار ثابت V_0C میل می‌کند ← وقتی $R \to 0$ یک جریان ضربه با شدت V_0C از مدار بالا می‌گذرد.

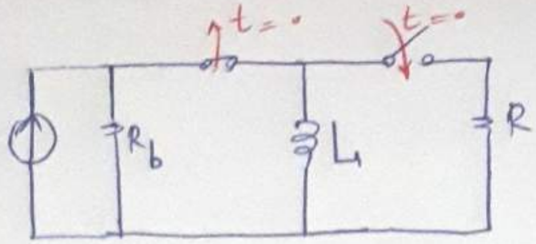
* توان تلف شده در مقاومت R

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{V_0^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$$

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^t p(t')dt' = \int_0^t \frac{V_0^2}{R}e^{-\frac{2t'}{RC}}dt' = \frac{CV_0^2}{2}\left(1-e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$$

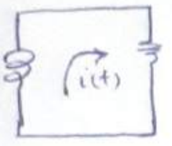
اگر $R \to 0$ آنگاه باز هم انرژی تلف شده برابر $\frac{CV_0^2}{2}$ خواهیم داشت

— مدار RL :



* توصیف فیزیکی : پس از تغییر فیزیکی کلید ها جریان اولیه سلف داخل مقاومت جاری می شود و به تدریج انرژی ذخیره شده در سلف در حرارت تلف می شود و در نهایت جریان صفر می گردد.

* توصیف مداری :



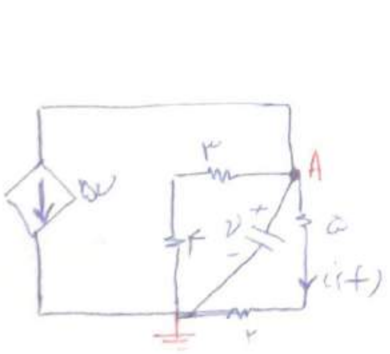
$$KVL: \quad L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \qquad i(0) = I_0 \qquad t \geq 0$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت است و پاسخ آن به صورت زیر خواهد بود :

$$\left.\begin{array}{l} i(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} \\ \left.\begin{array}{l} i(0) = K \\ i(0) = I_0 \end{array}\right\} \Rightarrow K = I_0 \end{array}\right\} \Rightarrow i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

— برای مدارهای مرتبه اول خطی تغییر ناپذیر با زمان پاسخ ورودی صفر تعریف می شود تابعی خطی از حالت اولیه است.

— مثال :



$C = 4\,mF$

$v_c(0^-) = 3\,V$

$i(t) = ? \quad t > 0$

$$KCL\ A \rightarrow \quad 5v + \frac{v}{7} + \frac{v}{7} + 4\times10^{-3}\frac{dv}{dt} = 0$$

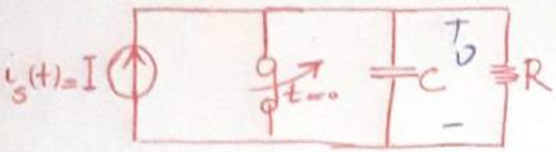
$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + 1321.4\,v = 0 \Rightarrow v(t) = Ke^{-1321.4t}$$

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = Ke^{-1321t} \\ \left.\begin{array}{l} v(0) = K \\ v(0) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow K = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow v(t) = 3e^{-1321t}$$

$$i = \frac{v}{7} = \frac{3}{7}e^{-1321t}$$

جلسه سیزدهم

مدارهای مرتبه اول - پاسخ حالت صفر.



در لحظه $t=0$ کلید باز می‌شود و منبع جریان به مدار RC وصل می‌شود.
ولتاژ اولیه خازن را صفر در نظر می‌گیریم

توصیف فیزیکی :

در لحظه $t=0^+$ ، چون ولتاژ دو سر خازن نمی‌تواند جهش کند (چون منبع جریان بینهایت در مدار نداریم) ولتاژ دو سر خازن صفر باقی می‌ماند. در نتیجه ولتاژ و جریان مقاومت نیز صفر خواهد بود. در نتیجه ولتاژ دو سر خازن زیاد می‌شود. با گذشت زمان v دو سر خازن زیاد و جریان مقاومت یعنی $\frac{v}{R}$ نیز افزایش می‌یابد. مدت زمان طولانی پس از باز شدن کلید خازن کاملاً پر شده و ولتاژ آن ثابت و جریان آن صفر می‌گردد در این زمان خازن مانند مدار باز عمل می‌کند و داریم : $v = RI$

توصیف مداری

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = I \qquad t \geq 0 \quad , \quad v(0) = 0$$

معادله دیفرانسیل فوق یک معادله دیفرانسیل خطی و ناهمگن است و پاسخ به صورت زیر خواهد بود :

$$v = v_h + v_p \qquad v_h$$

v_p جواب خاص معادله دیفرانسیل ناهمگن

$$v_h = K_1 e^{s_0 t} \qquad s_0 = -\frac{1}{RC}$$

$$v_p = RI$$

بنابراین داریم :

$$v(t) = K_1 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} + RI \qquad t \geq 0$$

K_1 با استفاده از شرایط اولیه و به طریق زیر تعیین می‌گردد :

$$v(0) = K_1 + RI = 0 \Rightarrow K_1 = -RI$$

بنابراین عبارت نهایی به صورت زیر خواهد بود.

$$v(t) = RI\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \qquad t \geq 0$$

- پاسخ از روی شرایط اولیه در $t=0$, $t=\infty$

مدار مرتبه اول

منابع با خروجی ثابت

معادله دیفرانسیل مقابل را داریم :

$$\frac{dy}{dt}+ay=b$$

$$\begin{cases} a>0 \\ b \quad \text{دلخواه} \end{cases}$$

جواب معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر است :

$$y(t)=ke^{-at}+b_0$$

فرض کنیم مقدار اولیه y را با $y(0)$ و مقدار نهایی آن را با $y(\infty)$ نشان دهیم در این صورت داریم :

$$\begin{aligned} y(0) &= b_0+k \\ y(\infty) &= b_0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} k=y(0)-y(\infty) \\ b_0=y(\infty) \end{cases}$$

و بنابراین داریم :

$$y(t)=[y(0)-y(\infty)]e^{-at}+y(\infty)$$

بنابراین با داشتن مقادیر اولیه و نهایی هر متغیر شبکه به همراه فرکانس طبیعی یا ثابت زمانی مدار می‌توان مقدار آن متغیر را تعیین نمود

- تبدیل هر مدار مرتبه اول به مدار RC یا RL موازی.

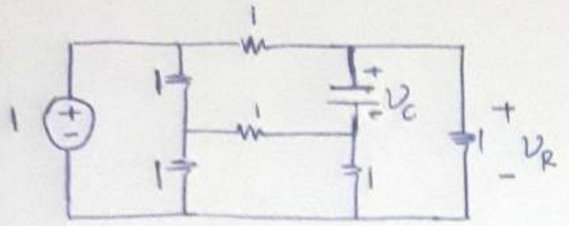
مدار مرتبه اولی داریم ←
- مقاومت خطی تغییر ناپذیر با زمان
- منابع وابسته
- منابع مستقل ثابت
- تک خازن

از دو سر خازن (سلف) می‌توانیم مدار معادل نرتن را جایگزین کنیم ← مدار RC (RL) موازی می‌رسیم
ثابت زمانی مدار نیز $T=RC$ $(T=L/R)$ خواهد بود

مثال : $C = 2F$

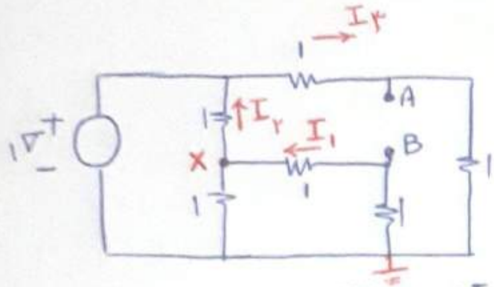
$v_c(0) = 0$

$v_c(t)$ ، $v_R(t)$ را تعیین کنید.



ابتدا مدار معادل تونن را از دوسر خازن تعیین می‌کنیم

e_{oc} .



$$KCL, X: \; V_x + \frac{V_x}{2} + \frac{V_x - 1}{1} = 0 \Rightarrow 2.5 V_x = 1 \Rightarrow V_x = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0.4$$

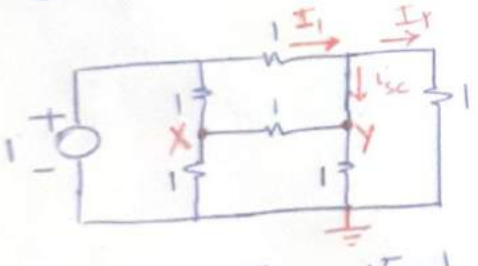
$$I_1 = -\frac{V_x}{2} = -0.2$$

$$I_2 = \frac{V_x - 1}{1} = -0.6$$

$$I_3 = \frac{1}{2}$$

$$-0.2 + (-0.6) + 0.5 + e_{oc} = 0 \Rightarrow e_{oc} = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

: i_{sc}



$$KCL\, X: \; \frac{V_x}{1} + \frac{V_x - 1}{1} + \frac{V_x - V_y}{1} = 0$$
$$KCL\, Y: \; \frac{V_y}{1} + \frac{V_y - V_x}{1} + \frac{V_y - 1}{1} + \frac{V_y}{1} = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3V_x - V_y = 1 \\ -V_x + 4V_y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_y = \frac{4}{11} \\ V_x = \frac{5}{11} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{1 - V_y}{1} = \frac{7}{11}$$

$$I_2 = \frac{V_y}{1} = \frac{4}{11}$$

$$i_{sc} = I_1 - I_2 = \frac{7}{11} - \frac{4}{11} = \frac{3}{11}$$

$$R_{th} = \frac{e_{oc}}{i_{sc}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{11}} = \frac{11}{10}$$

$$\tau = RC = \frac{11}{5}$$

$$v_C(t) \longrightarrow \begin{cases} v_C(0) = 0 \\ v_C(\infty) = e_{oc} = 0/3 \end{cases} \Rightarrow v_C(t) = (v_C(0) - v_C(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + v_C(\infty)$$

$$= (0 - \tfrac{3}{10})e^{-\frac{5}{11}t} + \tfrac{3}{10}$$

$$= \tfrac{3}{10}(1 - e^{-\frac{5}{11}t})$$

برای محاسبه $v_R(t)$ باید مقادیر اولیه و نهایی آن را حساب کنیم

در $t=0$ خازن مانند شاخه اتصال کوتاه عمل می‌کند و داریم:

در $t=\infty$ خازن مانند مدار باز عمل می‌کند و داریم:

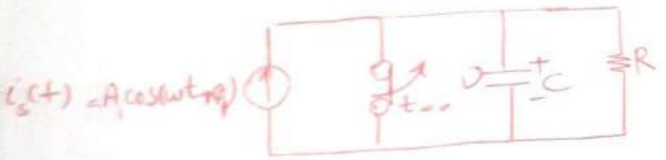
$$v_R(0) = \frac{4}{11}$$

$$v_R(\infty) = \frac{5}{10}$$

$$v_R(t) = (v_R(0) - v_R(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} + v_R(\infty) = (\tfrac{4}{11} - \tfrac{5}{10})e^{-\frac{5}{11}t} + \tfrac{5}{10}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{22}e^{-\frac{5}{11}t}$$

- ورودی سینوسی



$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad t \geq 0 \qquad v(0) = 0$$

$$v_h = K_1 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$v_p = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

برای تعیین A_2، φ_2، v_p را در معادله دیفرانسیل می‌گذاریم:

$$-CA_2\sin(\omega t + \varphi_2) + \frac{1}{R}A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad t \geq 0$$

در عبارت فوق سینوس و کسینوس جمع زوایا را بسط می‌دهیم و ضرایب $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ را برابر قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\omega C)^2}} \qquad \varphi_2 = \varphi_1 - \underbrace{\tan^{-1}\omega RC}_{\text{زاویه‌ای در بازه } 0\text{-}90^\circ}$$

جواب کامل به صورت زیر خواهد بود :

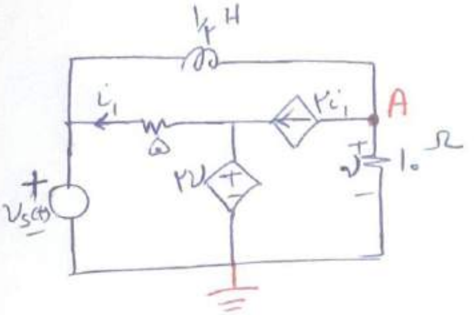
$$v(t) = K_1 e^{-\frac{1}{RC}t} + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \qquad t \geq 0$$

$$v(0) = K_1 + A_2 \cos(\varphi_2) = 0 \Rightarrow K_1 = -A_2 \cos\varphi_2$$

$$\Rightarrow v(t) = -A_2 \cos\varphi_2 \, e^{-\frac{1}{RC}t} + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \qquad t \geq 0$$

- در حالت کلی اگر همه شرط‌های اولیه در مدار صفر باشند، گوییم مدار در حالت صفر است.

- پاسخ حالت صفر : پاسخ مدار به یک ورودی است که در زمان دلخواه t_0 به مدار وارد می‌شود به شرط آنکه مدار درست پیش از این ورودی در حالت صفر باشد.



- مثال ۱ : در مدار مقابل ولتاژ خروجی v را برای ورودی پله واحد $v_s(t) = u(t)$ به دست آورید.

$i_L(0) = 0$

KCL در A : $2i_1 + \frac{v}{10} + 2\int_0^t (v-1)\,dt' = 0 \qquad t \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{2(2v-1)}{5} + \frac{v}{10} + 2\int_0^t (v-1)\,dt' = 0 \qquad t \geq 0$$

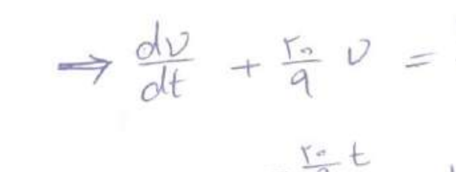
$$\Rightarrow v\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{10}\right) + 2\int_0^t (v-1)\,dt' = \frac{2}{5} \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{20}{9}v = \frac{20}{9} \qquad t \geq 0$$

$$v(t) = K_1 e^{-\frac{20}{9}t} + K_2$$

جایگذاری در معادله $\Rightarrow K_2 = 1$

حال باید $v(0)$ را تعیین کنیم.



$$v(0) = -20i_1 = -20\left(\frac{2v(0)-1}{5}\right) = -4(2v(0)-1)$$

$$\Rightarrow 9v(0) = 4 \Rightarrow v(0) = 4/9 \Rightarrow K_1 = v(0) - 1 = 4/9 - 1 = -5/9$$

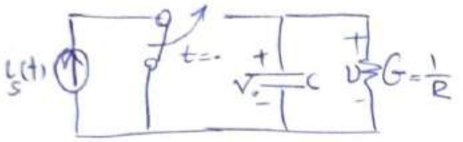
$$v(t) = 1 - 5/9\, e^{-20/9\, t}$$

جلسه چهاردهم:

پاسخ کامل - حالت گذرا و دائمی

- پاسخ کامل ← پاسخ یک مدار به تحریک ورودی و شرط‌های اولیه روی هم پاسخ کامل نام دارد.

- برای مدار ساده خطی تغییرناپذیر با زمان RC، پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر آن مدار.



$$C\frac{dv}{dt}+Gv=i_s(t)\quad t\geq 0$$
$$v(0)=V_0$$

$$v_i \rightarrow \text{ورودی صفر} \Rightarrow C\frac{dv_i}{dt}+Gv_i=0 \qquad v_i(0)=V_0$$
$$v_0 \rightarrow \text{حالت صفر} \Rightarrow C\frac{dv_0}{dt}+Gv_0=i_s(t) \qquad v_0(0)=0$$

$$\text{مجموع} \Rightarrow \qquad C\frac{d}{dt}(v_0+v_i)+G(v_0+v_i)=i_s(t) \qquad v_i(0)+v_0(0)=V_0$$

شکل موج $v_0(0)+v_i(0)$ هم معادله دیفرانسیل و هم شرایط اولیه را ارضا می‌کند و چون جواب معادله دیفرانسیل با شرط‌های اولیه یکتاست، جواب کامل بصورت مقابل خواهد بود $v(t)=v_0(t)+v_i(t) \quad t\geq 0$

مثال: اگر منبع جریان ثابت $i_s=I$ به یک مدار RC در لحظه $t=0$ وارد شود داریم:

$$v_i=V_0e^{-\frac{1}{RC}t} \quad t\geq 0$$
$$v_0(t)=RI(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) \quad t\geq 0$$
$$\Rightarrow v(t)=V_0e^{-\frac{1}{RC}t}+RI(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) \quad t\geq 0$$

- حالت گذرا و دائمی :

پاسخ کامل قسمت قبل = $v(t) = (V_0 - RI)\,e^{-\frac{1}{RC}t} + RI \quad t \geq 0$

جمله اول ← تابع نمایی میرا است ← حالت گذرا

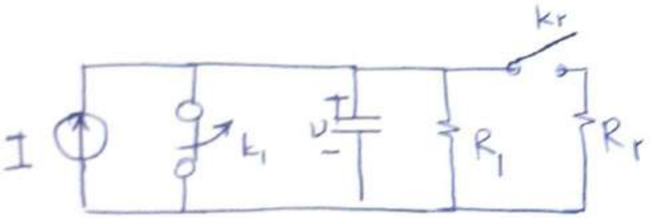
جمله دوم ← نامیرا است ← حالت دائمی

حالت گذرا ← معلول حالت موجود در مدار
ورودی ناگهانی به مدار

حالت دائمی ← معلول تحریک ورودی است و دارای شکل موجی است که با شکل موج ورودی ارتباط زیادی دارد

- مدارهای با دو ثابت زمانی :

مثال: خازن و مقاومت‌ها خطی و تغییرناپذیر با زمان
خازن بدون بار اولیه



$t<0$ ← k_1 بسته و k_2 باز

$t=0$ ← k_1 باز

$t=T_1=R_1C$ ← k_2 بسته

شکل موج ولتاژ دو سر خازن برای $t \geq 0$.

$$[0,T_1] \rightarrow v(t) = R_1 I\left(1-e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

$$v(T_1) = R_1 I\left(1-e^{-1}\right)$$

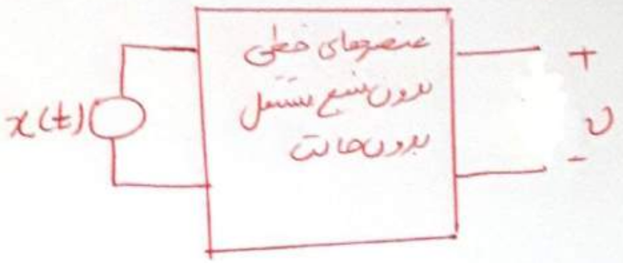
مقدار فوق به عنوان حالت اولیه جهت کار مدار در ... دوم است و داریم :

$$t' = t - T_1$$

$$v(t') = R_1 I(1-e^{-1})\, e^{-\frac{t'}{T_2}} + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} I\left(1-e^{-\frac{t'}{T_2}}\right) \quad t \geq T_1$$

$$\Rightarrow v(t) = R_1 I(1-e^{-1})\, e^{-\frac{t-T_1}{T_2}} + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} I\left(1-e^{-\frac{t-T_1}{T_2}}\right) \quad t \geq T_1$$

- خطی بودن پاسخ حالت صفر:



جمع‌پذیری

$x_1(t) \longrightarrow v_1(t)$
$x_2(t) \longrightarrow v_2(t)$
$\Rightarrow x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow v_1(t)+v_2(t)$

همگنی

$x_1(t) \longrightarrow v_1(t) \Rightarrow \alpha x_1(t) \longrightarrow \alpha v_1(t)$

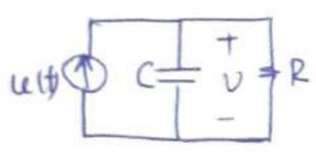
* پاسخ کامل تابع خطی تحریک ورودی نیست مگر اینکه مدار از حالت صفر شروع نماید.

پاسخ پله:

- تاکنون ما برای وصل کردن یک منبع مستقل به مدار در یک زمان معین مانند $t=0$ از کلید استفاده نمودیم. می‌توان با استفاده از تابع پله نیز این کار را انجام داد. مثلاً منبع جریانی که در لحظه $t=0$ از مقدار 0 به مقدار I می‌جهد را می‌توان با $i(t)=Iu(t)$ نمایش داد.

پاسخ پله $s(t)$: پاسخ حالت صفر مدار به ورودی پله واحد $u(t)$ پاسخ پله نامیده می‌شود، با $s(t)$ نمایش داده می‌شود.

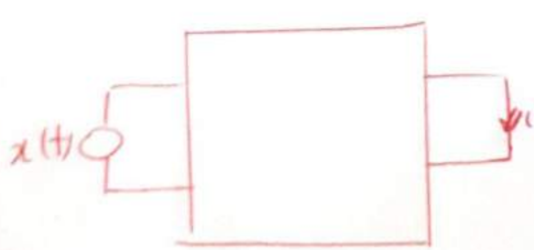
مثال:



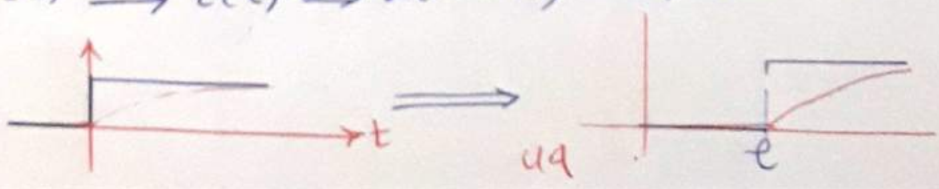
$$s(t) = R(1-e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$

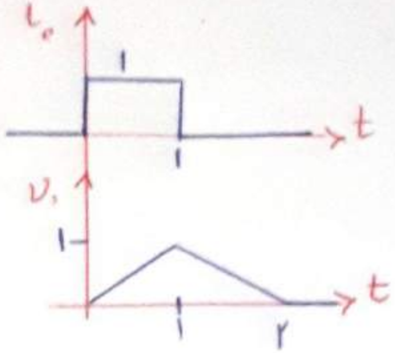
- خاصیت تغییرناپذیری با زمان:

برای یک مدار دلخواه خطی و تغییرناپذیر با زمان که با یک منبع به صورت مقابل تحریک می‌شود داریم:

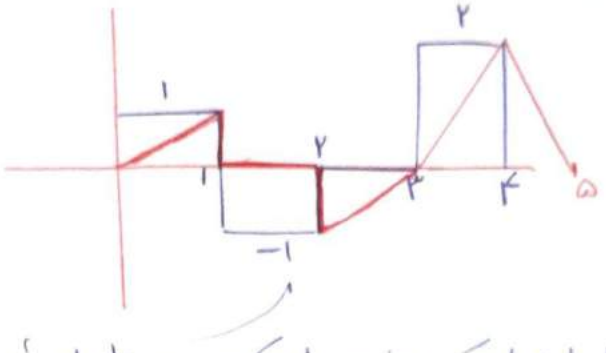


$x(t) \longrightarrow i(t) \Rightarrow x(t-t_0) \longrightarrow i(t-t_0)$



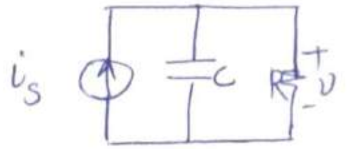


مثال: مدار تغییرناپذیر دلخواهی را در نظر بگیرید. پاسخ حالت صفر آن به ورودی i_0 مطابق شکل مقابل است. پاسخ را به ورودی i_1 تعیین نمایید.



پاسخ ضربه: پاسخ حالت صفر یک مدار تغییرناپذیر با زمان را به یک ضربه واحد که در $t=0$ وارد شده است، پاسخ ضربه می‌گویند و با h نشان می‌دهند.

مثال. می‌خواهیم پاسخ ضربه مدار مقابل را به دست آوریم:



روش اول ← معادله دیفرانسیل می‌نویسیم:

$$C\frac{dv}{dt} + Gv = \delta(t)$$

$$v(0^-) = 0$$

به علت وجود ضربه در سمت راست معادله دیفرانسیل لازم است بین 0^- و 0^+ تمایز قائل شویم.

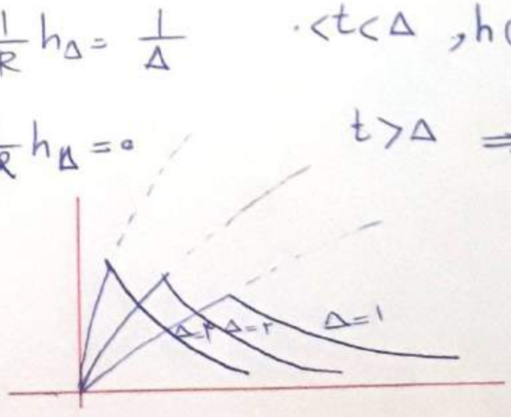
تعریف $\delta(t)$ به صورت مقابل را استفاده می‌کنیم:

$$P_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & t>\Delta \end{cases}$$

چون معادله دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$C\frac{dh_\Delta}{dt} + \frac{1}{R}h_\Delta = \frac{1}{\Delta} \qquad 0<t<\Delta,\ h(0)=0 \Rightarrow h_\Delta(t) = \frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$C\frac{dh_\Delta}{dt} + \frac{1}{R}h_\Delta = 0 \qquad t>\Delta \Rightarrow h_\Delta(\Delta)\, e^{-\frac{t-\Delta}{RC}},\ h_\Delta(\Delta) = \frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)$$



$$\left.\begin{array}{l} h_\Delta(\Delta)=\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right) \\ e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow h_\Delta(\Delta)=\frac{R}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{RC}-\frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta}{RC}\right)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{C}\left(1-\frac{1}{2!}\frac{\Delta}{RC}+\cdots\right)$$

بنابراین در حالت حدی براساس رابطه فوق $\lim_{\Delta\to 0} h_\Delta(\Delta)=\frac{1}{C}$ خواهد بود.

از رابطه $0<t<\Delta$ نیز داریم:

$$h_\Delta(t)=\frac{1}{C}\frac{t}{\Delta}+\cdots \qquad 0<t<\Delta$$

شیب منحنی $\frac{1}{C\Delta}$ است و با کاهش Δ این شیب بیشتر و بیشتر می‌گردد و در حالت حدی در لحظه صفر، h_Δ از صفر به $\frac{1}{C}$ می‌جهد و برای $t>0$ داریم:

$$h_\Delta(t)=\frac{1}{C}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$h(t)=\lim_{\Delta\to 0} h_\Delta(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله:

$$P_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}u(t)-\frac{1}{\Delta}u(t-\Delta)$$

$$h_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}s(t)-\frac{1}{\Delta}s(t-\Delta)$$

$$\lim_{\Delta\to 0} h_\Delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{s(t)-s(t-\Delta)}{\Delta}=s'(t)$$

* پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مشتق زمانی پاسخ پله آن است

$$h(t)=\frac{d}{dt}s(t) \quad \equiv \quad s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\theta)d\theta$$

روش دوم: استفاده از رابطه پاسخ پله و پاسخ ضربه

$$s(t)=R\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)u(t)$$

$$h(t)=\delta(t)R\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)+\frac{1}{C}e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$$

$$=\frac{1}{C}e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$$

روش سوم:

$$C\frac{dv}{dt} + Gv = \delta \qquad v(0^-) = 0$$

برای $t>0$ داریم:

$$C\frac{dv}{dt} + Gv = 0 \qquad v(0^+) = ?$$

$$v(t) = v(0^+)\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$$

رابطه فوق را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم.

$$C\left(v(0^+) e^{-\frac{t}{RC}} \delta(t) - \frac{1}{RC} v(0^+) e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \right) + G v(0^+) e^{-\frac{t}{RC}} u(t) = \delta(t)$$

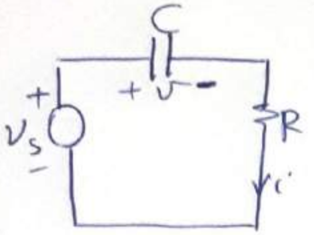
$$\Rightarrow C v(0^+) e^{-\frac{t}{RC}} \delta(t) = \delta(t) \Rightarrow \quad v(0^+) = \frac{1}{C}$$

روش چهارم: از خود معادله دیفرانسیل در بازه 0^- تا 0^+ انتگرال می‌گیریم.

$$C(v(0^+) - 0) + 0 = 1 \Rightarrow C v(0^+) = 1 \Rightarrow v(0^+) = \frac{1}{C}$$

جلسه پانزدهم :

مثال ۱: در مدار مقابل پاسخ پله و ضربه ولتاژ v و جریان i را به دست آورید



نوشتن معادله دیفرانسیل:

$$RC\frac{dv}{dt} + v = v_s \qquad v(0^-) = 0$$

پاسخ پله: در مشتق v، پله وجود دارد پس خود v پیوسته است و داریم:

$$v(0^-) = v(0^+) = 0$$

$$RC\frac{dv}{dt} + v = u(t) \qquad v(0^+) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} v = K_1 e^{-\frac{1}{RC}t} + 1 \\ \left.\begin{array}{l} v(0^+) = K_1 + 1 \\ v(0^+) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow K_1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = C\left(+\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + 0\right) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

پاسخ ضربه:

$$RC\frac{dv}{dt} + v = \delta(t) \qquad v(0^-) = 0$$

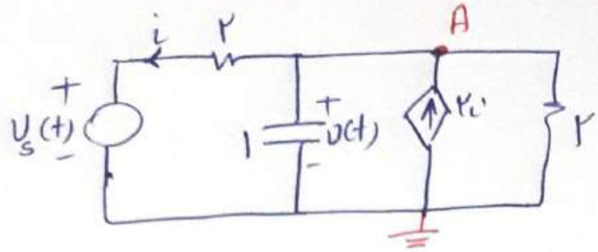
$$\int_{0^-}^{0^+} \longrightarrow RC\left(v(0^+) - v(0^-)\right) + 0 = 1 \Rightarrow v(0^+) = \frac{1}{RC}$$

$$RC\frac{dv}{dt} + v = 0 \qquad v(0^+) = \frac{1}{RC}$$

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = K e^{-\frac{1}{RC}t} \\ v(0^+) = \frac{1}{RC} \end{array}\right\} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2 C} u(t) e^{-\frac{t}{RC}}$$

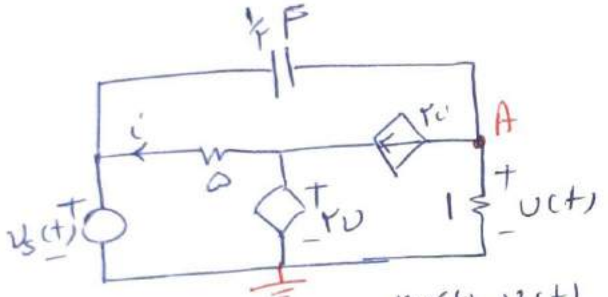
مثال ۲: در مدار شکل مقابل پاسخ پله و ضربه را محاسبه کنید.



$$\frac{v(t)}{2} - 2i + \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)-v_s(t)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v_s(t)}{2} \Rightarrow \begin{cases} s(t) = -\frac{1}{2}r(t) + K \xrightarrow[K=0]{v(0^+)=0} -\frac{1}{2}r(t) \\ h(t) = -\frac{1}{2}u(t) \end{cases}$$

مثال ۳: پاسخ پله و ضربه را به دست آورید.



$$\text{KCL A}: v(t) + 2\,\frac{2v(t)-v_s(t)}{5} + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\big(v(t)-v_s(t)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v(t) + \frac{9}{5}v(t) = \frac{1}{2}\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{2}{5}v_s(t)$$

پاسخ پله: $v(0^-) = 0$

معادله: $\frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + \frac{9}{5}v = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{2}{5}u(t)$

در $v(t)$ پله وجود دارد پس $v(0^+) \neq v(0^-)$، داریم:

$$\int_{0^-}^{0^+} \longrightarrow \frac{1}{2}\big(v(0^+) - v(0^-)\big) + 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow v(0^+) = 1$$

$v(0^+) = 1$

$$t>0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + \frac{9}{5}v = \frac{2}{5}$$

جواب خصوصی: $\frac{9}{5}K_2 = \frac{2}{5} \Rightarrow K_2 = \frac{2}{5}\times\frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

جواب همگن: $K_1 e^{-\frac{18}{5}t}$

جواب کلی: $v = K_1 e^{-\frac{18}{5}t} + \frac{2}{9}$

$$\left.\begin{matrix} v(0^+) = K_1 + \frac{2}{9} \\ v(0^+) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow K_1 = \frac{7}{9} \Rightarrow v(t) = \left(\frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t} + \frac{2}{9}\right)u(t)$$

پاسخ ضربه :

$$\forall t: \quad \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + \frac{9}{5}v = \frac{1}{2}\delta'(t) + \frac{2}{5}\delta(t) \qquad v(0^-) = 0$$

در $v(t)$ ضربه وجود دارد و در نتیجه $\int_{0^-}^{0^+} v(t)dt = K$ با این فرض از معادله فوق انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{0^-}^{0^+}: \quad \frac{1}{2}\left(v(0^+) - v(0^-)\right) + \frac{9}{5}K = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v(0^+) + \frac{9}{5}K = \frac{2}{5}$$

از معادله فوق انتگرال نامعین می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{t}: \quad \frac{1}{2}v + \frac{9}{5}\int_{-\infty}^{t} v = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{2}{5}u(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{-\infty}^{t}: \quad \frac{1}{2}K + 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow K = 1$$

$$\frac{1}{2}v(0^+) + \frac{9}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{2}v(0^+) = -\frac{7}{5} \Rightarrow v(0^+) = -\frac{14}{5}$$

$$t > 0: \quad \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + \frac{9}{5}v = 0 \qquad v(0^+) = -\frac{14}{5}$$

$$v(t) = K e^{-\frac{18}{5}t}$$

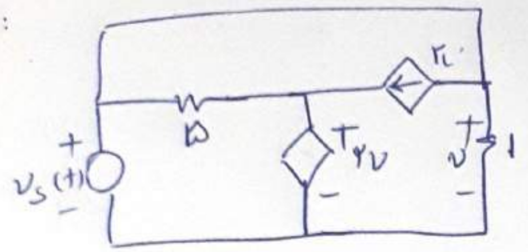
$$\left.\begin{array}{l} v(0^+) = -\frac{14}{5} \\ v(0^+) = K \end{array}\right| \Rightarrow K = -\frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{14}{5}e^{-\frac{18}{5}t}$$

$$\forall t: \quad \delta(t) - \frac{14}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t) = h(t) = s'(t)$$

← به دست آوردن حالت 0^+ از روی خود مدار (پاسخ پله)

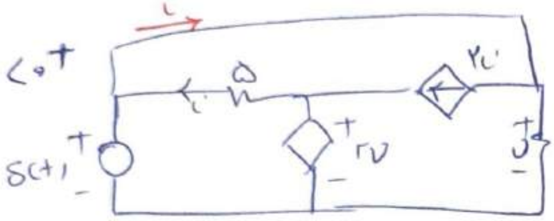
$t = 0^+$:



$\Rightarrow v(0^+) = V_s(0^+) = 1$

پاسخ ضربه:

$0^- < t < 0^+$



ابتدا حالت خازن‌ها و سلف‌ها را به دست می‌آوریم.

$$i = \delta(t) + 2\,\frac{2\delta(t) - \delta(t)}{5} = \frac{7}{5}\delta(t)$$

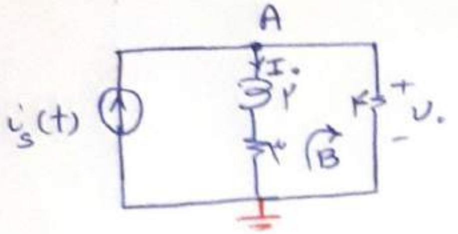
$$i = C\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{0^-}^{0^+} : \quad \int_{0^-}^{0^+} \frac{7}{5}\delta(t)\,dt = C\left(v(0^+) - v(0^-)\right)$$

$$\Rightarrow V_C(0^+) = \frac{14}{5}$$

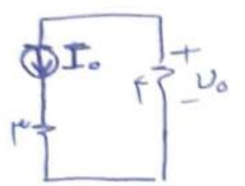
$$v(0^+) = -V_C(0^+) = -\frac{14}{5}$$

جلسه شانزدهم :

مثال : در مدار شکل مقابل جریان اولیه سلف I_0 است. برای ورودی پله واحد پاسخ ولتاژ v_0 را حساب کنید.



$t = 0^-$



$\Rightarrow v_0(0^-) = -4I_0$

$\forall t$: KCL A: $-i_s(t) + i_L + \frac{v_0}{4} = 0 \Rightarrow i_L = i_s(t) - \frac{v_0}{4}$

KVL B: $-3i_L + v_L + v_0 = 0$

$$\Rightarrow -3\left(i_s(t) - \frac{v_0}{4}\right) - 2\frac{d}{dt}\left(i_s(t) - \frac{v_0}{4}\right) + v_0 = 0$$

$$\Rightarrow v_0' + \frac{7}{2}v_0 = 6i_s + 4i_s' \qquad v_0(0^-) = -4I_0$$

حال شرایط را در صفر مثبت به دست می‌آوریم

ورودی پله واحد. $v_0' + \frac{7}{2}v_0 = 6u(t) + 4\delta(t) \quad v(0^-) = -4I_0$

در سمت راست ضربه داریم پس در خود v_0 پله داریم و اصولاً $v_0(0^+) \neq v_0(0^-)$.

$$\int_{0^-}^{0^+} \Rightarrow v_0(0^+) + 4I_0 = 4 \Rightarrow v_0(0^+) = 4(1 - I_0)$$

پس معادله جدید به صورت زیر خواهد بود:

$t > 0 \quad v_0' + \frac{7}{2}v_0 = 6 \qquad v(0^+) = 4(1 - I_0)$

$t \geq 0^+$

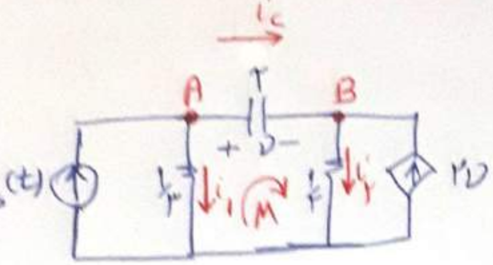
$$\left.\begin{array}{l} v_{0,p} = \frac{12}{7} \\ v_{0,h} = Ke^{-\frac{7}{2}t} \end{array}\right\} \Rightarrow v_0(t) = \left(Ke^{-\frac{7}{2}t} + \frac{12}{7}\right)u(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_0(0^+) = 4(1 - I_0) \\ v_0(0^+) = K + \frac{12}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow K = 4(1 - I_0) - \frac{12}{7} = \frac{16}{7} - 4I_0$$

$$v_0(t) = \left[\left(\frac{16}{7} - 4I_0\right)e^{-\frac{7}{2}t} + \frac{12}{7}\right]u(t)$$

چون در پاسخ ضربه نداشتیم پاسخ معادل برای $t \geq 0$ نیز برقرار است.

مثال: در مدار مقابل پاسخ ضربه و پله را محاسبه کنید.



$$KCL\ A \rightarrow i_1 = i_s - i_c$$

$$KCL\ B \rightarrow i_2 = i_c + 2v$$

$$KVL\ M \rightarrow -\frac{1}{3}(i_s - i_c) + v + \frac{1}{2}(i_c + 2v) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} i_c + 2v = \frac{1}{3} i_s \Rightarrow \frac{5}{6} \cdot 2v' + 2v = \frac{1}{3} i_s$$

$$\Rightarrow v' + \frac{6}{5} v = \frac{1}{5} i_s$$

پاسخ پله:

$$v' + \frac{6}{5} v = \frac{1}{5} u(t) \qquad v(0^-) = 0$$

در مشتق v، پله داریم پس خود v پیوسته است و داریم: $v(0^+) = v(0^-)$

$$t \geq 0^+ \quad v' + \frac{6}{5} v = \frac{1}{5} \qquad v(0^+) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} v_p = 1/6 \\ v_h = K e^{-\frac{6}{5}t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v(t) = K e^{-\frac{6}{5}t} + \frac{1}{6} \\ v(0^+) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow K = -1/6$$

چون در $u(t)$ ضربه نداریم پاسخ برای $t \geq 0$ نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$v(t) = \frac{1}{6}\left(1 - e^{-\frac{6}{5}t}\right) u(t)$$

پاسخ ضربه:

$$v' + \frac{6}{5} v = \frac{1}{5} \delta(t) \qquad v(0^-) = 0$$

در مشتق v، ضربه داریم پس در خود v پله داریم و باید $v(0^+)$ را محاسبه کنیم.

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow v(0^+) - v(0^-) + 0 = 1/5 \Rightarrow v(0^+) = \frac{1}{5}$$

$$t \geq 0^+ \quad v' + \frac{6}{5} v = 0 \qquad v(0^+) = \frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = Ke^{-\frac{4}{5}t} \\ v(0^+) = 1/5 \end{array}\right\} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{5}e^{-\frac{4}{5}t}$$

چون در $v(t)$ ضربه نداریم پس پاسخ برای $t \geq 0$ نیز به صورت زیر خواهد بود

$$v(t) = \frac{1}{5}e^{-\frac{4}{5}t}u(t)$$

روال کلی حل مسائل مرتبه اول .

۱- حالت پاسخ را برای 0^- ($x(0^-)$) تعیین نمایید ← حالت مدار را باید برحسب $i_L(0^-)$ و یا $v_C(0^-)$ بنویسید و این مقادیر توسط مسأله به شما داده می‌شوند.

۲- معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده متغیر x را از روی مدار و با استفاده از KVL و KCL به دست آورید ← این معادله دیفرانسیل مدار را برای $t > 0^-$ توصیف می‌کند

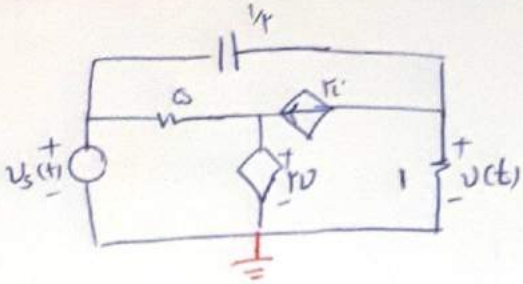
۳- حال از روی معادله دیفرانسیل $x(0^+)$ را به دست آورید

۴- معادله دیفرانسیل را برای $t \geq 0^+$ ، $t > 0$ بازنویسی نمایید (در این شرایط ضربه و مشتقات آن صفر می‌شوند و تابع $u(t) = 1$ می‌گردد)

۵- معادله دیفرانسیل حاصل را حل نموده و پاسخ را برای $t \geq 0^+$ به دست می‌آوریم

۶- حال اگر در $x(t)$ ضربه و یا مشتقات آن وجود داشت آنها را با ضرایبی که از مرحله ۳ می‌دانیم به پاسخ اضافه می‌نماییم و $x(t)$ را برای $t \geq 0$ به دست می‌آوریم .

مثال: در مدار شکل مقابل $v_c(0^-)=0$ است. خروجی مدار را به ازای $v_s(t)=4(\delta(t)-\delta(t-2))$ به دست آورید.



قبلاً به دست آوردیم که معادله دیفرانسیل به صورت زیر است و $v(0^-)=0$.

$t\geq 0$

$$v'(t)+\frac{18}{5}v(t)=v_s'+\frac{4}{5}v_s \qquad v(0^-)=0$$

$0\leq t\leq 2^-$

ابتدا پاسخ را در بازه $0\leq t<2$ بررسی می‌نماییم.

$0\leq t<2$

$$v'(t)+\frac{18}{5}v(t)=4\delta'(t)+\frac{16}{5}\delta(t) \qquad v(0^-)=0$$

در $v(t)$ ضربه وجود دارد و در نتیجه برای محاسبه شرایط 0^+ به طریق زیر عمل می‌کنیم.

$$\int_{0^-}^{0^+} \quad v(0^+)-v(0^-)+\frac{18}{5}K=0+\frac{16}{5} \Rightarrow v(0^+)+\frac{18}{5}K=\frac{16}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \rightarrow v(t)+\frac{18}{5}\int v=4\delta(t)+\frac{16}{5}u(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow K+0=4 \Rightarrow K=4$$

$$\Rightarrow v(0^+)=\frac{16}{5}-\frac{18\cdot 4}{5}=-\frac{56}{5}$$

$0<t<2 \qquad v'(t)+\frac{18}{5}v(t)=0 \qquad v(0^+)=-\frac{56}{5}$

$$\Rightarrow v(t)=-\frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t)$$

چون در $v(t)$ ضربه با سطح زیر منحنی $K=1$ داریم پس جواب برای بازه $0\leq t<2$ به صورت زیر خواهد بود.

$$v_1(t)=-\frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t)+4\delta(t)$$

حال برای ادامه مسیر تغییر $t' = t-2$ را می‌دهیم. پس در ادامه داریم:

$$v(t=2) = v(t'=0^-) = v(t=2) = -\frac{54}{5} e^{-\frac{36}{5}}$$

معادله دیفرانسیل

$$0 < t' \equiv 2 < t$$

$$v'(t') + \frac{18}{5} v(t') = -\left(4\delta'(t') + \frac{14}{5}\delta(t')\right) \qquad v(0^-) = -\frac{54}{5} e^{-\frac{36}{5}}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow v(0^+) - v(0^-) + \frac{18}{5} K = -\frac{14}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \rightarrow v(t') + \frac{18}{5}\int v(t') = -4\delta(t') - \frac{44}{5} u(t')$$

$$\int^{0^+} \longrightarrow K + 0 = -4 \; , \; K = -4$$

$$\Rightarrow v(0^+) = -\frac{54}{5} e^{-\frac{36}{5}} - \frac{14}{5} + \frac{72}{5}.$$

$$= \frac{54}{5}\left(1 - e^{-\frac{36}{5}}\right)$$

$0 < t'$

$$v'(t') + \frac{18}{5} v(t') = 0 \qquad v(t'=0^+) = \frac{54}{5}\left(1 - e^{-\frac{36}{5}}\right)$$

$$v'(t') = \frac{54}{5}\left(1 - e^{-\frac{36}{5}}\right) e^{-\frac{18}{5} t}$$

$0 \leq t'$

$$v'(t') = \frac{54}{5}\left(1 - e^{-\frac{36}{5}}\right) e^{-\frac{18}{5} t'} u(t') - 4\delta(t')$$

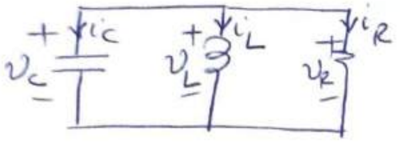
$$\Rightarrow v(t) = -\frac{54}{5} e^{-\frac{18}{5} t} u(t) + 4\delta(t) + \frac{54}{5}\left(1 - e^{-\frac{36}{5}}\right) e^{-\frac{18}{5}(t-2)} u(t-2) - 4\delta(t-2)$$

جلسه هفدهم:

مدارهای مرتبه دوم - پاسخ ورودی صفر

پاسخ حالت صفر

- مدار RLC خطی تغییرناپذیر با زمان، پاسخ ورودی صفر:



$i_L(0) = I_0$

$v_C(0) = V_0$

$$KVL \rightarrow v_C = v_L = v_R$$

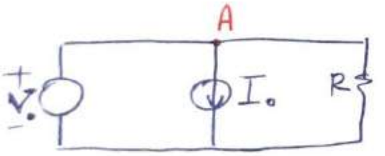
$$KCL \rightarrow i_L + i_C + i_R = 0$$

فرض کنیم بخواهیم ولتاژ خازن را به دست آوریم.

$$C\frac{dv_C}{dt} + G v_C + I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t')dt' = 0$$

چون معادله درجه دوم است علاوه بر $v_C(0)$ باید $v_C'(0)$ را نیز داشته باشیم. برای این کار مدار را در لحظه $t=0^-$ بازنویسی می‌کنیم.

$t=0^-$



$$i_R = \frac{V_R}{R} = G V_R = G V_0$$

$$KCL\ A \rightarrow i_C = -(i_L + i_R) = -(I_0 + G V_0)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt}\Big|_{t=0} \Rightarrow v'(0^-) = \frac{1}{C} i_C(0^-) = -\frac{1}{C}(I_0 + G V_0)$$

فرض کنید بخواهیم جریان سلف را به دست آوریم:

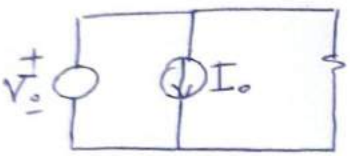
$$KCL \rightarrow i_L + i_C + i_R = 0 \Rightarrow i_L + C\frac{dv_L}{dt} + G v_L = 0$$

$$\Rightarrow i_L + LC\frac{d^2}{dt^2} i_L + GL\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

$$i_L(0^-) = I_0$$

در بالا نیز $i_L'(0^-)$ را نیاز داریم. برای این کار نیز مدار را در $t=0^-$ بررسی می‌کنیم.



$$v_L(0^-) = V_0$$

$$i_L'(0^-) = \frac{1}{L}v_L(0^-) = \frac{V_0}{L}$$

حال فرض کنید می‌خواهیم پاسخ $i_L(t)$ را به دست آوریم. تعاریف زیر را فرض می‌کنیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha = \frac{G}{2C}$$

$$LC \qquad + GL\,i'(t) + i(t) = 0$$

$$\Rightarrow i''(t) + \frac{G}{C}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

$$\Rightarrow i''(t) + 2\alpha i'(t) + \omega_0^2 i(t) = 0$$

$$i(0^-) = I_0$$

$$i'(0^-) = \frac{V_0}{L}$$

معادله مشخصه: $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} = -\alpha + \alpha_d \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} = -\alpha - \alpha_d \end{cases}$

شکل پاسخ ورودی صفر مدار به مقادیر α و ω_0 بستگی دارد. بر این اساس چهار حالت زیر را می‌توان تصور نمود:

۱- میرای شدید

۲- میرای بحرانی

۳- میرای ضعیف

۴- نامیرا

۱- میرای شدید ← $\alpha > \omega_0$: s_1 و s_2 هردو حقیقی و منفی هستند.

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

ثابت‌های k_1 و k_2 از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

۲- میرای بحرانی ← $\alpha = \omega_0$:

$$i_L(t) = (k_1 + k_2 t)e^{st} = (k_1 + k_2 t)e^{-\alpha t}$$

۳- میرای ضعیف ← $\alpha < \omega_0$: s_1 و s_2 مختلط و مزدوجند.

$$i_L(t) = k e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta) \quad , \quad \omega_d = \omega_0^2 - \alpha^2$$

k و θ ثوابتی هستند که از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

۴- بی اتلاف ← $\alpha = 0$: s_1 و s_2 موهومی خالص و مزدوجند

$$i_L(t) = k\cos(\omega_0 t + \theta)$$

k و θ از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند

← مثال: میرای ضعیف:

$$\left.\begin{aligned} i_L(0^+) &= k\cos\theta \\ i_L(0^+) &= I_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k\cos\theta = I_0$$

$$\left.\begin{aligned} i'_L(0^+) &= k(-\alpha\cos\theta + \omega_d\sin\theta) \\ i'_L(0^+) &= \frac{V_0}{L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\alpha k\cos\theta - \omega_d k\sin\theta = \frac{V_0}{L}$$

$$\Rightarrow -\alpha I_0 - \omega_d k\sin\theta = \frac{V_0}{L} \Rightarrow k\sin\theta = -\frac{\alpha I_0}{\omega_d} - \frac{V_0}{L\omega_d}$$

$$i_L(t) = k e^{-\alpha t}\left[\cos \quad \cos\theta - \sin\omega_d t\,\sin\theta\right]$$

$$= (k\cos\theta)e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + (-k\sin\theta)e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

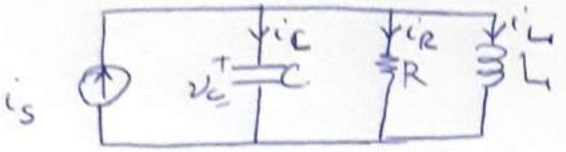
* در تمامی حالات به غیر از میرای بحرانی می‌توان پاسخ را به صورت مقابل نوشت: $i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

که در حالتی که s_1 و s_2 جزء مختلط نیز دارند

$s_2 = \bar{s}_1 \quad , k_2 = \bar{k}_1$

$i_L(t) = 2|k_1| e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \measuredangle k_1)$ ۸۵

مدار RLC خطی تغییرناپذیر با زمان - پاسخ حالت صفر:



می‌خواهیم جریان $i_L(t)$ را محاسبه نماییم.

$$i_C + i_L + i_R = i_S \Rightarrow C\frac{dv_L}{dt} + i_L + Gv_L = i_S$$

$$\Rightarrow CL\, i_L'' + GL\, i_L' + i_L = i_S$$

$$i_L(0^-) = 0$$
$$i_L'(0^-) = 0$$

پاسخ معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن به صورت زیر است:

$$i_L = i_h + i_p$$

نحوه به دست آوردن i_h را بحث نمودیم.

i_p را نیز بسته به ورودی اعمالی قرار می‌دهیم ←
- ورودی پله ← i_p را ثابت قرار می‌دهیم.
- ورودی سینوسی ← i_p را سینوسی قرار می‌دهیم.

پاسخ پله:

$$LC\, i_L'' + LG\, i_L' + i_L = u(t)$$

$$i_L(0^-) = 0$$
$$i_L'(0^-) = 0$$

در i_L'' پله داریم ← در i_L' پله نداریم ← $i_L'(0^+) = i_L'(0^-)$

در i_L' پله نداریم ← در i_L پله نداریم ← $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

$$t>0: \quad LC\,i_L'' + LG\,i_L' + i_L = 1$$

$$i_L(0^+) = 0$$

$$i_L'(0^+) = 0$$

$$i_p(t) = 1$$

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1 \longrightarrow$$ اگر فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند.

$$i_L(t) = (k_1 + k_2 t) e^{st} + 1 \longrightarrow$$ اگر فرکانس‌های طبیعی متمایز نباشند.

فرض می‌کنیم حالت اول رخ دهد و فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند.

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} i_L(0) = k_1 + k_2 + 1 = 0 \\ i_L'(0) = k_1 s_1 + k_2 s_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{s_2}{s_1 - s_2} \\ k_2 = \dfrac{-s_1}{s_1 - s_2} \end{array}\right.$$

چون در $i_L(t)$ ضربه نداریم پاسخ برای $t \geq 0$ به صورت زیر خواهد بود:

$$i_L(t) = \left[\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right) + 1\right] u(t)$$

فرض کنیم فرکانس‌های طبیعی در حالت میرای ضعیف هستند:

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = \omega_0 e^{j(\frac{\pi}{2} + \varphi)} \qquad \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2}$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d = \omega_0 e^{-j(\frac{\pi}{2} + \varphi)} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{\alpha}{\omega_d}$$

$$\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}\right) = \frac{\omega_0}{2j\omega_d}\left(e^{-j(\frac{\pi}{2}+\varphi)} e^{(-\alpha + j\omega_d)t} - e^{j(\frac{\pi}{2}+\varphi)} e^{(-\alpha - j\omega_d)t}\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{2j\omega_d} e^{-\alpha t}\left(e^{j(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \varphi)} - e^{-j(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \varphi)}\right)$$

$$= \frac{\omega_0}{2j\omega_d} e^{-\alpha t}\, 2j \sin(\omega_d t - \tfrac{\pi}{2} - \varphi) = -\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \varphi)$$

- پاسخ پله برای حالت میرای ضعیف به صورت زیر خواهد بود:

$$i_L(t) = \left[-\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t-\varphi)+1\right]u(t)$$

← تعبیر فیزیکی: - ابتدای برقراری مدار ← خازن ولتاژش را حفظ می‌کند ← جریان مقاومت صفر است.

← سلف جریانش را حفظ می‌کند ← جریان سلف صفر است.

در لحظه ابتدا تمام جریان از خازن می‌گذرد.

- در ادامه:

$$i_R\uparrow \leftarrow v_R\uparrow \leftarrow v_C\uparrow \leftarrow i_C>0$$

$$i_L\uparrow \leftarrow v_L\uparrow$$

- در انتها ← مدار به حالت دائمی می‌رسد و $v_L = v_C = v_R = 0$ می‌گردد

و این یعنی تمام جریان از سلف می‌گذرد.

پاسخ ضربه:

$$LC\, i_L'' + LG\, i_L' + i_L = \delta(t)$$

$i_L(0^-)=0$

$i_L'(0^-)=0$

i_L'' در صفر ضربه دارد ← i_L' در صفر پله دارد ← $i_L'(0^+) \neq i_L'(0^-)$

i_L' در صفر پله دارد ← i_L در صفر پله ندارد ← $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow LC\left(i_L'(0^+)-i_L'(0^-)\right) + LG\left(i(0^+)-i(0^-)\right) + 0 = 1$$

$$\Rightarrow i_L'(0^+) = \frac{1}{LC}$$

$t>0$

$$LC\, i_L'' + LG\, i_L' + i_L = 0$$

$i_L(0^+) = 0$

$i_L'(0^+) = \frac{1}{LC}$

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$$i_L(0^+) = k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = -k_2$$

$$i_L'(0^+) = k_1 s_1 + k_2 s_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow k_1(s_1 - s_2) = \omega_0^2 \Rightarrow k_1 = \frac{\omega_0^2}{2j\omega_d}$$

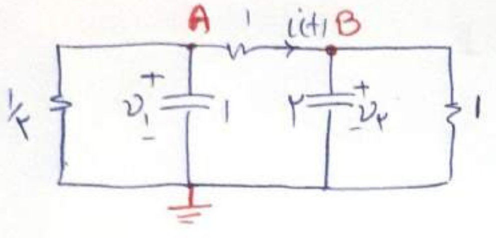
$$i_L(t) = \frac{\omega_0^2}{2j\omega_d} e^{-\alpha t}\, 2j \sin\omega_d t = \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin\omega_d t$$

چون ضربه و مشتقات آن در $i_L(t)$ وجود ندارد پس داریم:

$$i_L(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin\omega_d t \; u(t)$$

جلسه هجدهم

- مثال‌هایی از مدارهای مرتبه دوم :



مثال ۱ - در مدار شکل مقابل می‌دانیم که $v_{c_1}(0)=1$ و $v_{c_2}(0)=2$ است معادله دیفرانسیل برحسب $i(t)$ را به دست آورده و پاسخ ورودی صفر را تعیین نمایید.

$$KCL\ A \rightarrow 2v_1 + v_1' + i = 0 \Rightarrow (2+D)v_1 = -i \Rightarrow v_1 = -\frac{i}{2+D}$$

$$KCL\ B \rightarrow v_2 + 2v_2' - i = 0 \Rightarrow (1+2D)v_2 = i \Rightarrow v_2 = \frac{i}{1+2D}$$

$$i = v_1 - v_2 = -\frac{i}{2+D} - \frac{i}{1+2D} = \frac{(-3D-3)i}{2D^2+5D+2}$$

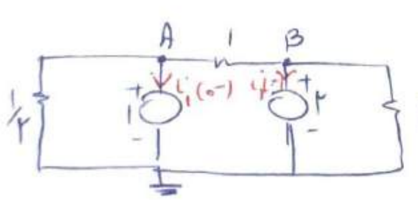
$$\Rightarrow (2D^2+8D+5)i = 0$$

$$\Rightarrow 2i'' + 8i' + 5i = 0$$

$$i(t) = v_1 - v_2 \Rightarrow i(0^-) = v_1(0^-) - v_2(0^-) = 1-2 = -1$$

$$\Rightarrow i'(0^-) = v_1'(0^-) - v_2'(0^-) = \frac{i_1(0^-)}{C_1} - \frac{i_2(0^-)}{C_2}$$

$t = 0^-$



$$KCL\ A \rightarrow 2 + i_1(0^-) - 1 = 0 \Rightarrow i_1(0^-) = -1$$

$$KCL\ B \rightarrow 1 + i_2(0^-) + 2 = 0 \Rightarrow i_2(0^-) = -3$$

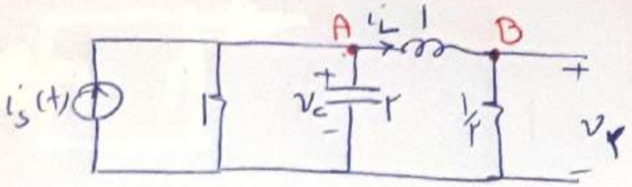
$$\Rightarrow i'(0^-) = -1 + \frac{3}{2} = 1/2$$

$$\begin{cases} 2i'' + 8i' + 5i = 0 \\ i(0^-) = -1 = i(0^+) \\ i'(0^-) = 1/2 = i'(0^+) \end{cases}$$

معادله مشخصه $\Rightarrow 2s^2 + 8s + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = -0.77 \\ s = -3.22 \end{cases} \Rightarrow i(t) = k_1 e^{-0.77t} + k_2 e^{-3.22t}$

$$\begin{cases} i(0^+) = k_1 + k_2 = -1 \\ i'(0^+) = -0.77k_1 - 3.22k_2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1.11 \\ k_2 = 0.11 \end{cases} \Rightarrow i(t) = -1.11e^{-0.77t} + 0.11e^{-3.22t}$$

مثال ۲ - در مدار شکل مقابل $v_C(0)=1$ ، $i_L(0)=1$ پاسخ $v_2(t)$ به ورودی پله واحد را محاسبه کنید.



$$KCL\ A \rightarrow -i_s + v_c + 2v_c' + \int_{-\infty}^{t}(v_c - v_2)dt' = 0$$

$$KCL\ B \rightarrow \int_{-\infty}^{t}(v_2 - v_c)dt' + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 - v_c + 2v_2' = 0 \Rightarrow v_c = v_2 + 2v_2'$$

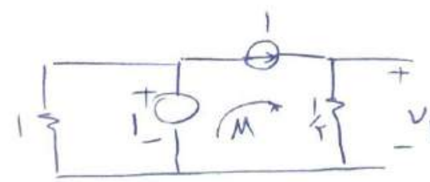
$$\Rightarrow v_2 + 2v_2' + 2(v_2' + 2v_2'') + \int_{-\infty}^{t} 2v_2' = i_s$$

$$\Rightarrow 4v_2'' + 4v_2' + 3v_2 = i_s$$

$$v_2 = \frac{1}{2} i_L \Rightarrow v_2(0^-) = \frac{1}{2} i_L(0^-) = 1/2$$

$$v_2'(0^-) = 1/2\, i_L'(0^-) = \frac{1}{2} v_L(0^-)$$

$t = 0^-$:



$$KVL\ M: -1 + v_L(0^-) + 1/2 = 0 \Rightarrow v_L(0^-) = 1/2$$

$$v_2'(0^-) = 1/4$$

$$\begin{cases} 4v_2'' + 4v_2' + 3v_2 = i_s \\ v_2(0^-) = 1/2 \\ v_2'(0^-) = 1/4 \end{cases}$$

$$4s^2 + 4s + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1/2 + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ s_2 = -1/2 - j\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) + C \quad , \quad C = 1/3$$

$$v(0^+) = 1/2 \Rightarrow A + \frac{1}{3} = 1/2 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$v'(0^+) = 1/4 \Rightarrow -\alpha A + \omega_d B = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow v(t) = \left(e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + 1/3\right)u(t)$$

$$4v_2'' + 4v_2' + 3v_2 = \delta(t)$$

$$v_2(0^-) = \frac{1}{2}$$

$$v_2'(0^-) = 1/4$$

v_2' در صفر پله دارد ← $v_2'(0^-) \neq v_2'(0^+)$

v_2 در صفر پله و مشتق آن را ندارد ← $v_2(0^+) = v_2(0^-)$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow 4\left(v_2'(0^+) - v_2'(0^-)\right) + 0 + 0 = 1 \Rightarrow 4v_2'(0^+) = 1 + 4v_2'(0^-) = 1 + 1 = 2$$

$\boxed{t \geq 0^+:}$

$$4v_2'' + 4v_2' + 3v_2 = 0$$

$$v_2(0^+) = 1/2$$

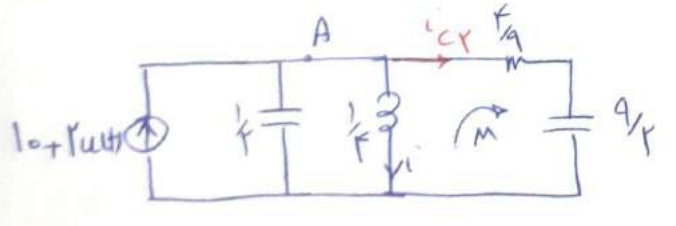
$$v_2'(0^+) = 1/2$$

$$v_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$

$$v_2(0^+) = A = \frac{1}{2}$$

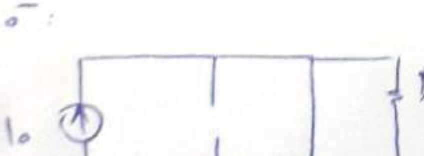
$$v_2'(0^+) = -\frac{1}{2}(A) + \frac{\sqrt{2}}{2}B = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۳ - در مدار مقابل $i(t)$ را به دست آورید.



مدار در $t=0^-$ به حالت دائمی رسیده است.

$t = 0^-$:



$$\Rightarrow \begin{cases} i(0^-) = 10 \\ i'(0^-) = 0 \\ i''(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$\text{KVL A}: -\frac{1}{4}i' + \frac{4}{9}i_{C2} + \frac{2}{9}\int i_{C2}\,dt' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}i'' + \frac{4}{9}i_{C2}' + \frac{2}{9}i_{C2} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{4}D^2 i + \frac{4}{9}Di_{C2} + \frac{2}{9}i_{C2} = 0 \Rightarrow i_{C2} = \frac{\frac{9}{8}D^2}{2D+1}i$$

$$\text{KCL A} \Rightarrow -i_s + \frac{1}{2}v_L' + i + i_{C2} = 0 \Rightarrow -i_s + \frac{1}{8}i'' + i + i_{C2} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{8}D^2 i + i + \frac{9}{8}\frac{D^2}{2D+1}i = i_s$$

$$\Rightarrow (D^3 + 5D^2 + 8D + 4)\, i = (8D + 4)\, i_s$$

$$\Rightarrow i''' + 5i'' + 8i' + 4i = 8i_s' + 4i_s = 16\,\delta(t) + 8u(t) + 40$$

i''' در صفر ضربه دارد ← i'' در صفر پله دارد ← i' در صفر پیوسته است.

$$i(0^+) = i(0^-) = 10$$
$$i'(0^+) = i'(0^-) = 0$$

$$i''(0^+) - i''(0^-) + 0 + 0 + 0 = 16 \Rightarrow i''(0^+) = 16$$

$$\begin{cases} i''' + 5i'' + 8i' + 4i = 48 \\ i(0^+) = 10 \\ i'(0^+) = 0 \\ i''(0^+) = 16 \end{cases}$$

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \\ s_3 = -2 \end{cases}$$

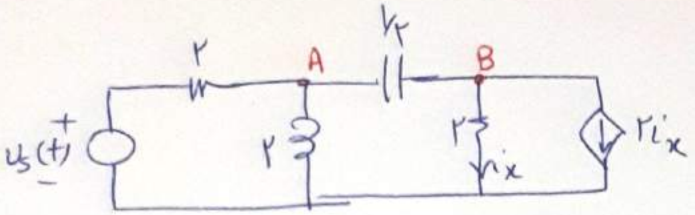
$$i(t) = k_1 e^{-t} + (k_2 + k_3 t)\, e^{-2t} + k_4$$

$$4k_4 = 48 \Rightarrow k_4 = 12$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 - 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 4k_2 - 4k_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = +16 \\ k_2 = -16 \\ k_3 = -16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow i(t) = 16\, e^{-t} + 16(1+t)\, e^{-2t} + 12$$

مثال: پاسخ پله و پاسخ ضربه i را برای مدار روبرو به دست آورید.



KCL B: $\frac{1}{2}D(v_B - v_A) + \frac{v_B}{2} + v_B = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Dv_B + \frac{3}{2}v_B = \frac{1}{2}Dv_A \Rightarrow (D+3)v_B = Dv_A \Rightarrow v_B = \frac{D}{D+3}v_A$$

KCL A: $\frac{1}{2}(v_A - v_s) + \frac{1}{2}\int v_A + \frac{1}{2}D(v_A - v_B) = 0$

$$\Rightarrow v_A - v_s + \int v_A + D(v_A - v_B) = 0$$

$$\Rightarrow Dv_A + v_A + D^2\left(v_A - \frac{D}{D+3}v_A\right) = Dv_s$$

$$\Rightarrow \left(D + 1 + D^2 - \frac{D^3}{D+3}\right)v_A = Dv_s$$

$$\Rightarrow (D^2 + 3D + D + 3 + \cancel{D^3} + 3D^2 - \cancel{D^3})v_A = D(D+3)v_s$$

$$\Rightarrow (4D^2 + 4D + 3)v_A = (D^2 + 3D)v_s \Rightarrow v_A = \frac{D^2+3D}{4D^2+4D+3}v_s$$

$$i = \frac{1}{2}(v_s - v_A) = -\frac{1}{2}\left(\frac{D^2+3D-4D^2-4D-3}{4D^2+4D+3}\right)v_s$$

$$\Rightarrow 8i'' + 8i' + 6i = +3v_s'' + v_s' + 3v_s$$

$$\Rightarrow 8i'' + 8i' + 6i = 3v_s'' + v_s' + 3v_s \qquad i(0^-) = i'(0^-) = 0$$

پاسخ پله:

$$8i'' + 8i' + 6i = 3\delta' + \delta + 3u(t)$$

i'' در صفر مشتق ضربه دارد ← i' در صفر ضربه دارد ← i در صفر پله دارد ⇐ $\left\{\begin{matrix} i(0^-) \neq i(0^+) \\ i'(0^-) \neq i'(0^+) \end{matrix}\right.$

$$\int \rightarrow 8i' + 8i + 6\int i = 3\delta(t) + u(t) + 3\int u(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow 8(i(0^+) - i(0^-)) + 0 + 0 = 3 \Rightarrow 8i(0^+) = 3 \Rightarrow i(0^+) = 3/8$$

معادله $\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow 8(i'(0^+) - i'(0^-)) + 8(i(0^+) - i(0^-)) + 0 = 1$

$$\Rightarrow 8i'(0^+) = 1 - 3 = -2 \Rightarrow i'(0^+) = -1/4$$

$t \geq 0^+$

$$8i'' + 8i' + 6i = 3$$

$$i(0^+) = \frac{3}{8}$$

$$i'(0^+) = -\frac{1}{4}$$

$$8s^2 + 8s + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} = s \\ s_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} = \bar{s} \end{cases}$$

$$i(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$A = -\frac{1}{8}$$

$$B = -\frac{5\sqrt{2}}{16}$$

پاسخ ضربه:

$$8i'' + 8i' + 6i = 3\delta'' + \delta' + 3\delta(t)$$

$$i(0^-) = 0$$

$$i'(0^-) = 0$$

در خود i ضربه داریم. فرض کنیم این ضربه برابر $k\delta(t)$ باشد.

$$\iint \longrightarrow 8i + 8\int i + 6\iint i = 3\delta(t) + u(t) + 3\int u(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \longrightarrow 8k = 3 \Rightarrow k = 3/8$$

$$\int \longrightarrow 8i' + 8i + 6\int i = 3\delta' + \delta + 3u(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \longrightarrow 8(i(0^+) - i(0^-)) + 3 + 0 = 0 + 1 \Rightarrow 8i'(0^+) = -2 \Rightarrow i'(0^+) = -1/4$$

جلسه نوزدهم

– معادله دیفرانسیل مقابل را حل نمایید

$$y'' + 3y' + 2y = 2\delta''(t) + \delta(t) + u(t)$$

$y(0^-) = 1$

$y'(0^-) = -1$

$y(t) \leftarrow$ ضربه دارد $\leftarrow$ $y(t) = k\delta(t) + f(t)$, $\int_{0^-}^{0^+} f(t) = 0$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow \left[y'(0^+) - y'(0^-)\right] + 3\left[y(0^+) - y(0^-)\right] + 2k = 0 + 1 + 0$$

$$\Rightarrow y'(0^+) + 3y(0^+) + 2k = 1 - 1 + 3 = 3$$

$$\int_{-\infty}^{t} \Rightarrow y' + 3y + 2\int y = 2\delta' + u(t) + r(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \Rightarrow \left[y(0^+) - y(0^-)\right] + 3k + 0 = 0 \Rightarrow y(0^+) + 3k = 1$$

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \Rightarrow y + 3\int y + 2\iint y = 2\delta(t) + r(t) + \int r(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \Rightarrow k + 0 + 0 = 2 \Rightarrow k = 2$$

$$y(0^+) = 1 - 3k = 1 - 6 = -5$$

$$y'(0^+) = 3 - 2k - 3y(0^+) = 3 - 4 + 15 = 14$$

$t > 0$:

$$y'' + 3y' + 2y = 1$$

$y(0^+) = -5$

$y'(0^+) = 14$

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow (s+1)(s+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = -1 \\ s = -2 \end{cases}$$

$$y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0^+) &= k_1 + k_2 + \tfrac{1}{2} = -5 \\ y'(0^+) &= -k_1 - 2k_2 = 14 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -k_2 + \tfrac{1}{2} = 9 \Rightarrow k_2 = -9 + \tfrac{1}{2} = -8.5$$

۹۷ $k_1 = -2k_2 - 14 = 17 - 14 = 3$

$$y(t) = \left(3e^{-t} - 7.5e^{-2t} + \tfrac{1}{2}\right)u(t) + 2\delta(t)$$

مثال:

$$v'' + 3v' + 2v = \delta'''(t) + \tfrac{1}{2}\delta'(t) \quad , \quad v(0^-) = v'(0^-) = 0$$

v ← در صفر $\delta(t)$, $\delta'(t)$ را احتمالاً دارد ← $v = k_1\delta(t) + k_2\delta'(t) + f(t)$

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)\,dt = 0$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow \left[v'(0^+) - v'(0^-)\right] + 3\left[v(0^+) - v(0^-)\right] + k_1 = 0$$

$$\Rightarrow v'(0^+) + 3v(0^+) + k_1 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{t} \rightarrow v' + 3v + 2\int v = \delta''(t) + \tfrac{1}{2}\delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow v(0^+) - v(0^-) + 3k_1 + 2k_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v(0^+) + 3k_1 + 2k_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \rightarrow v + 3\int v + 2\iint v = \delta'(t) + \tfrac{1}{2}u(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow k_1 + 3k_2 + 0 = 0 \Rightarrow k_1 + 3k_2 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \rightarrow \int v + 3\iint v + 2\iiint v = \delta(t) + \tfrac{1}{2}r(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow k_2 + 0 + 0 = 1 \Rightarrow k_2 = 1$$

$$k_1 = -3k_2 = -3$$

$$v(0^+) = \tfrac{1}{2} - 3k_1 - 2k_2 = \tfrac{1}{2} + 9 - 2 = 7.5 = \tfrac{15}{2}$$

$$v'(0^+) = -k_1 - 3v(0^+) = 3 - \tfrac{45}{2} = 3 - 22.5 = -19.5$$

$t \geq 0^+ \ (t > 0)$

$$v'' + 3v' + 2v = 0$$

$$v(0^+) = \tfrac{15}{2} = 7.5$$

$$v'(0^+) = -19.5$$

$$v(t) = k_3 e^{-t} + k_4 e^{-2t}$$

$$v(0^+) = k_3 + k_4 = \frac{15}{2} \Rightarrow -k_4 = -12 \Rightarrow k_4 = 12$$

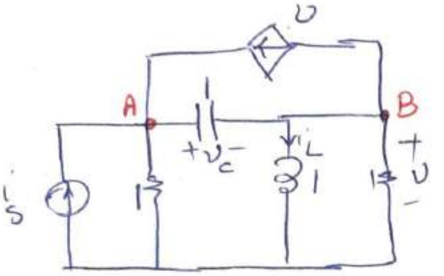
$$v'(0^+) = -k_3 - 2k_4 = -\frac{39}{2} \qquad k_3 = \frac{15}{2} - \frac{24}{2} = \frac{-9}{2}$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{9}{2} e^{-t} + 12 e^{-2t}$$

$t \geq 0$:

$$v(t) = \left(-\frac{9}{2} e^{-t} + 12 e^{-2t}\right) u(t) + \delta'(t) - 3\delta(t)$$

مثال: پاسخ پله و پاسخ ضربه v را به دست آورید.



$$KCL\ A \rightarrow -i_s + v_A + (v'_A - v') - v = 0$$

$$KCL\ B \rightarrow v + \int v\,dt + (v' - v'_A) + v = 0$$

جمع دو معادله $\rightarrow v_A = i_s - v - \int v\,dt'$

$$\Rightarrow 2v'' + 3v' + v = i_s''$$

$$v(0^-) = v'(0^-) = 0$$

پاسخ پله:

$$\begin{cases} 2v'' + 3v' + v = \delta'(t) \\ v(0^-) = v'(0^-) = 0 \end{cases}$$

در $v(t)$ ضربه داریم $\leftarrow v'(0^+) \neq v'(0^-)$

در $v(t)$ پله داریم $\leftarrow v(0^+) \neq v(0^-)$

$$\int_{0^-}^{0^+}: 2(v'(0^+) + v'(0^-)) + 3(v(0^+) - v(0^-)) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow 2v'(0^+) + 3v(0^+) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{t}: 2v' + 3v + \int v = \delta(t)$$

یا $\int_{0^-}^{0^+}: 2(v(0^+) - v(0^-)) + 0 + 0 = 1 \Rightarrow v(0^+) = \frac{1}{2}$

$$v'(0^+) = -\frac{3}{2} v(0^+) = -\frac{3}{4}$$

$$v(t) = Ae^{-t} + Be^{-\frac{1}{2}t}$$

$$v(0^+) = A + B = \frac{1}{2}$$

$$v'(0^+) = -A - \frac{1}{2}B = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}B = -\frac{1}{4} \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} - B = 1$$

$$v(t) = e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$$

$v(t)$ ضربه و مشتق آن را ندارد

$$v(t) = \left(e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$$

پاسخ ضربه:

$$\begin{cases} 2v'' + 3v' + v = \delta''(t) \\ v(0^-) = v'(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$v(t) = k\delta(t) + f(t) \quad , \int_{0^-}^{0^+} f(t) = 0$$ $\leftarrow$ $v(t)$ ضربه دارد

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow 2\left(v'(0^+) - v'(0^-)\right) + 3\left(v(0^+) - v(0^-)\right) + k = 0$$

$$\Rightarrow 2v'(0^+) + 3v(0^+) + k = 0$$

$$\int_{-\infty}^{t} \rightarrow 2v' + 3v + \int v = \delta'(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow 2\left(v(0^+) - v(0^-)\right) + 3k = 0$$

$$\rightarrow 2v(0^+) + 3k = 0$$

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \Rightarrow 2v + 3\int v + \iint v = \delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} v(0^+) = -\frac{3}{2}k = -\frac{3}{4} \\ v'(0^+) = \frac{1}{2}\left(-k - 3v(0^+)\right) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

$$۲v'' + ۳v' + v = ۰$$

$$v(۰^+) = -\frac{۳}{۴}$$

$$v'(۰^+) = \frac{۷}{۸}$$

$$v(t) = Ae^{-t} + Be^{-\frac{۱}{۲}t}$$

$$v(۰^+) = A + B = -\frac{۳}{۴}$$

$$v'(۰^+) = -A - \frac{۱}{۲}B = \frac{۷}{۸}$$

$$\frac{۱}{۲}B = \frac{۱}{۸} \Rightarrow B = \frac{۱}{۴} \Rightarrow A = -\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴} = -۱$$

$$v(t) = \left(-e^{-t} + \frac{۱}{۴}e^{-\frac{۱}{۲}t}\right)u(t) + \frac{۱}{۲}\delta(t)$$

جلسه بیستم :

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل :

معادله دیفرانسیل مقابل را در نظر بگیرید :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = f(t) \qquad t > 0^+$$

$$f(t) = 5 = 5e^{0t} \Rightarrow \begin{cases} K = 5 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = 4e^{-3t} \Rightarrow \begin{cases} K = 4 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\cos(t - \pi/6) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{jt} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}} \\ \beta = j \end{cases}$$

$$f(t) = -2\sin \pi t = \mathrm{Im}\left\{ -2 e^{j\pi t} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K = -2 \\ \beta = j\pi \end{cases}$$

$$f(t) = e^{-3t}\cos 2t = \mathrm{Re}\left\{ e^{(-3+2j)t} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \beta = -3 + 2j \end{cases}$$

حالت اول β جواب معادله مشخصه نیست ← جواب خصوصی را $Ae^{\beta t}$ فرض می‌کنیم و در معادله قرار می‌دهیم.

$$a_n A \beta^n e^{\beta t} + \cdots + a_0 A e^{\beta t} = K e^{\beta t}$$

$$\Rightarrow A\left(a_n \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_0\right) = K \Rightarrow A = \frac{K}{a_n \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_0}$$

حالت دوم: β ریشه معادله مشخصه با تکرار l است ← جواب خصوصی را $At^l e^{\beta t}$ فرض می‌کنیم و آن را در معادله قرار می‌دهیم تا A به دست آید.

$t>0^-$

مثال:

$$y''+8y'+17y=u(t)+e^{-t}u(t)+e^{-t}\sin 2t\,u(t)$$

$$\begin{cases} y''+8y'+17y=1+e^{-t}+e^{-t}\sin 2t & t\geq 0^+ \\ y(0^+) \\ y'(0^+) \end{cases} \Rightarrow s_1,s_2=-4\pm j$$

جواب خصوصی به ۱:

$$A=\frac{K}{17}=\frac{1}{17}\Rightarrow y_{p,1}=\frac{1}{17}$$

$$A=\frac{1}{1+8(-1)+17}=\frac{1}{10}\Rightarrow y_{p,2}=\frac{1}{10}e^{-t}$$

$$A=\frac{1}{(-1+2j)^2+8(-1+2j)+17}\Rightarrow y_{p,3}=\mathrm{Im}\{0.0745e^{-j1.1071}e^{(-1+2j)t}\}$$

$$=\mathrm{Im}\{0.0745\,e^{-t}\,e^{j(2t-1.1071)}\}$$

$$=0.0745e^{-t}\sin(2t-1.1071)$$

مثال:

$$y'''+5y''+4y'=e^{-t}u(t)+\tfrac{1}{2}e^{-3t}u(t)+\cos t\,u(t)\quad t>0^-$$

$$y'''+5y''+4y'=e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-3t}+\cos t$$

$$s^3+5s^2+4s=0\Rightarrow\begin{cases}s_1=0\\ s_2=-4\\ s_3=-1\end{cases}$$

$$e^{-t}\Rightarrow\begin{cases}K=1\\ \beta=-1\end{cases}\Rightarrow$$ β ریشه مرتبه اول معادله مشخصه است. $$\Rightarrow y_{p1}=Ate^{-t}$$

با قرار دادن جواب خصوصی فوق در معادله دیفرانسیل داریم: $A=-\frac{1}{3}\Rightarrow y_{p1}=-\frac{1}{3}te^{-t}$

$$\tfrac{1}{2}e^{-3t}\Rightarrow\begin{cases}K=\frac{1}{2}\\ \beta=-3\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1/2}{(-3)^3+5(-3)^2+4(-3)}=\frac{1/2}{-27+45-12}=\frac{1}{12}$$

$$\rightarrow y_{p2}=\frac{1}{12}e^{-3t}$$

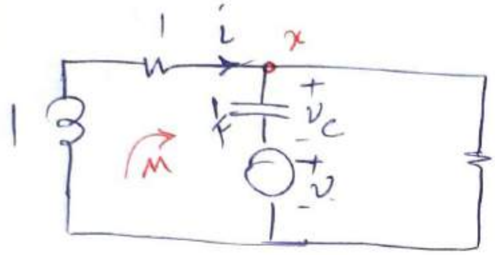
$$\cos t = Re\{e^{jt}\} \Rightarrow \begin{cases} K=1 \\ \beta = j \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{(j)^3 + 5(j)^2 + 4j} = 0/1715\, e^{-j2/6012}$$

$$y_{p_2} = Re\{0/175\, e^{-j2/6012}\, e^{jt}\} = 0/175 \cos(t - 2/6012)$$

$$= -0/1751 \cos(t + 0/5404)$$

مثال: پاسخ کامل i را به دست آورید.



$v_s = A\cos(\omega t + \varphi)\, u(t)$

$i_L(0^-) = I_0$

$v_C(0^-) = V_0$

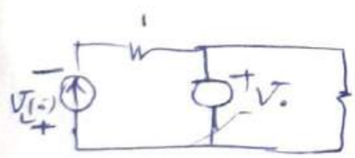
$$KCL\ x:\ -i + \tfrac{1}{2}(v_x - v_s)' + \frac{v_x}{2} = 0 \Rightarrow v_x = \frac{2}{D+1} i + \frac{D}{D+1} v_s$$

$$KVL\ M:\ i' + i + v_x = 0 \Rightarrow Di + i + \frac{2}{D+1} i + \frac{D}{D+1} v_s = 0$$

$$\Rightarrow (D^2 + D) i + 2i + (D+1) i = -D v_s$$

$$\Rightarrow i'' + 2i' + 3i = -v_s'$$

$$i(t) = i_L(t) \Rightarrow \begin{cases} i(0^-) = i_L(0^-) = I_0 \\ i'(0^-) = \dfrac{v_L(0^-)}{L} = -(V_0 + I_0) \end{cases}$$



$$\Rightarrow +V_L(0^-) + I_0 + V_0 = 0 \Rightarrow V_L(0^-) = -(V_0 + I_0)$$

$$\begin{cases} i'' + 2i' + 3i = A\omega \sin(\omega t + \varphi)\, u(t) - A\cos\varphi\, \delta(t) \\ i(0^-) = I_0 \\ i'(0^-) = -(I_0 + V_0) \end{cases}$$

i'' در صفر ضربه دارد ← i' در صفر پله دارد ← $i'(0^-) \neq i'(0^+)$

i در صفر پله ندارد ← $i(0^-) = i(0^+)$

$$i'(0^+) - i'(0^-) + 0 + 0 = 0 - A\cos\varphi \Rightarrow i'(0^+) = -(I_0 + V_0) - A\cos\varphi$$

$t \geq 0^+ \quad (t>0)$

$$i'' + 2i' + 3i = A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i(0^+) = I_0$$

$$i'(0^+) = -(I_0 + V_0) - A\cos\varphi$$

$$s^2 + 2s + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 + \sqrt{2}j = -\alpha + j\omega_d \\ s_2 = -1 - \sqrt{2}j \end{cases}$$

$$i_h(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos\sqrt{2}\,t + A_2 \sin\sqrt{2}\,t\right)$$

$$i_p(t) = \mathrm{Im}\left\{ \frac{A\omega e^{j\varphi}}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 3} e^{j\omega t} \right\}$$

$$f(t) = \mathrm{Im}\left\{A\omega\, e^{j(\omega t + \varphi)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{A\omega e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow \begin{cases} K = A\omega e^{j\varphi} \\ \beta = j\omega \end{cases}$$

$$i_p(t) = \mathrm{Im}\left\{ \frac{e^{j\pi/2}}{(j)^2 + 2j + 3} e^{jt} \right\} \Leftarrow \begin{matrix} A = 1 \\ \omega = 1 \\ \varphi = \pi/2 \end{matrix}$$

فرض کنی

$$= \mathrm{Im}\left\{ 0/3534\, e^{j\pi/4} e^{jt} \right\}$$

$$= 0/3534 \sin(t - \pi/4)$$

خود تابع تحریک $\sin(t + \pi/2)$ درسیم داریم.

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos\sqrt{2}\,t + A_2 \sin\sqrt{2}\,t\right) + 0/3534 \sin(t - \pi/4)$$

$$i(t)\Big|_{\alpha t \gg 0} = 0/3534 \sin(t - \pi/4)$$

حالتها از بین رفته‌اند.

خروجی همان ورودی است که فازش عوض شده و دامنه آن نیز تغییر نموده است.

جلسه بیست و یکم

مروری بر اعداد مختلط :

نمایش مستطیلی :

$$z = x + jy \quad , \quad j = \sqrt{-1} \Rightarrow \begin{cases} Re\{z\} = x & \text{جزء حقیقی} \\ Im\{z\} = y & \text{جزء موهومی} \end{cases}$$

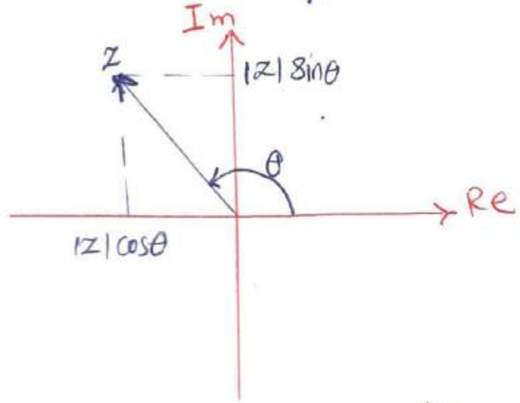
نمایش قطبی :

$$z = |z| e^{j\theta} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{اندازه یا دامنه} \\ \theta = \tan^{-1} y/x & \text{فاز} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = |z| \cos\theta \\ y = |z| \sin\theta \end{cases}$$

* θ محدود به بازه $[0, 2\pi)$ است.

* هرگاه $\tan\theta$ معلوم باشد زاویه θ به طور یکتا در بازه $[0, 2\pi)$ معلوم نمی‌گردد و باید برای یکتا مشخص نمودن آن علامت‌های x و y را نیز در نظر گرفت.



- $z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$

$z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \times \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{j\theta_1}}{|z_2| e^{j\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- مزدوج مختلط:

$$z = x + jy \Rightarrow \bar{z} = x - jy$$
$$z = |z| e^{j\theta} \Rightarrow \bar{z} = |z| e^{-j\theta}$$

* خواص

$$z + \bar{z} = 2x \Rightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2}$$
$$z - \bar{z} = 2y \Rightarrow y = \frac{z-\bar{z}}{2}$$
$$z\bar{z} = |z| e^{j\theta} |z| e^{-j\theta} = |z|^2$$

- فازورها و معادلات دیفرانسیل معمولی:

یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω را به صورت هر تابعی از t در بازه $(-\infty, \infty)$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$A_m \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \begin{cases} A_m : & \text{دامنه} \\ \omega : & \text{فرکانس زاویه‌ای} \\ \varphi : & \text{فاز} \end{cases}$$

- قضیه اصلی: مجموع جبری هر تعداد از سینوسی‌ها با فرکانس زاویه‌ای یکسان ω و هر تعداد مشتق‌های آنها از هر مرتبه، خود یک سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای ω می‌باشد.

$$f(t) = 2\cos(2t + 60^\circ) - 4\sin 2t + \frac{d}{dt} 2\sin 2t$$

$$= 2\cos 2t \cos 60^\circ - 2\sin 2t \sin 60^\circ - 4\sin 2t + 4\cos 2t$$

$$= \cos 2t - \sqrt{3}\sin 2t - 4\sin 2t + 4\cos 2t$$

$$= 5\cos 2t - (4+\sqrt{3})\sin 2t$$

$$= 5\left(\cos 2t - \frac{4+\sqrt{3}}{5}\sin 2t\right) \qquad \tan\gamma = \frac{4+\sqrt{3}}{5}$$

$$= \frac{5}{\cos\gamma}\left(\cos 2t \cos\gamma - \sin\gamma \sin 2t\right)$$

$$= 5\sqrt{1+\left(\frac{4+\sqrt{3}}{5}\right)^2}\ \cos\left(2t + \tan^{-1}\left(\frac{4+\sqrt{3}}{5}\right)\right)$$

$$= 7{,}6 \cos(2t + 48{,}8^\circ)$$

- یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω، دامنه A_m، فاز φ به طور کامل مشخص می‌شود

- می‌توان یک سینوسی $x(t)$ را با عدد مختلط $A = A_m e^{j\varphi}$ نمایش داد. در اینصورت:

$$x(t) \equiv A, \omega$$

$$x(t) = Re\{A e^{j\omega t}\} = Re\{A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}\} = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- تعریف فازور ← عدد مختلط A که سینوسی $A_m \cos(\omega t + \varphi)$ را نشان می‌دهد فازور نمایش دهنده سینوسی می‌نامیم.

- مثال:

$$v(t) = 110\sqrt{2}\cos(2\pi 60 t + \pi/3) \Rightarrow \quad = 110\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$v(t) = Re\{\bar{V} e^{j2\pi 60 t}\} = 110\sqrt{2}\cos(2\pi 60 t + \pi/3)$$

- تبصره۱: نمایش فازوری یک سینوسی تنها مقادیر دامنه و فاز آن را مشخص می‌سازد و اطلاعی از فرکانس نمی‌دهد بنابراین هنگام محاسبات فازورها باید فرکانس آنها را در نظر داشت.

- تبصره۲: هرگاه یک سینوسی را به جای تابع کسینوس با تابع سینوس مشخص کنیم، داریم:

$$y(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

در اینصورت نمایش فازور $A = A_m e^{j\varphi}$ به قوت خود باقی می‌ماند ولی خود سینوسی را باید از رابطه مقابل تعیین نماییم:

$$y(t) = Im\{A e^{j\omega t}\}$$

- کاربرد عمده نمایش فازوری ← محاسبه جواب خاص معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی ثابت در حالتی که تابع تحریک یک سینوسی است.

$$a^{(n)} + a^{(n-1)} + \dots + a = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

به موجب قضیه اصلی ← اگر به جای u یک سینوسی با فرکانس ω قرار دهیم کل سمت چپ معادل یک سینوسی با همان فرکانس خواهد شد

در سمت راست نیز سینوسی داریم.

بنابراین تنها مسأله به دست آوردن دامنه و فاز سینوسی است که جواب معادله دیفرانسیل فوق است ← برای این کار از فازورها استفاده می‌کنیم و این روش را روش فازوری می‌نامیم.

لم ۱: $Re(\cdot)$ جمع پذیر و همگن است.

$$\left.\begin{aligned} &Re\{z_1(t)+z_2(t)\} = Re\{z_1(t)\} + Re\{z_2(t)\} \\ &Re\{\alpha z_1(t)\} = \alpha Re\{z_1(t)\} \quad \alpha\in\mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Re\{\alpha_1 z_1(t)+\alpha_2 z_2(t)\} = \alpha_1 Re\{z_1(t)\} + \alpha_2 Re\{z_2(t)\}$$

لم ۲: فرض کنید A عددی مختلط باشد که نمایش نقطی آن به صورت $A = A_m e^{j\varphi}$ است.
در اینصورت:

$$\frac{d}{dt} Re\{Ae^{j\omega t}\} = Re\left\{\frac{d}{dt} Ae^{j\omega t}\right\} = Re\{j\omega A e^{j\omega t}\}$$

لم ۳:

$$Re\{Ae^{j\omega t}\} = R\{Be^{j\omega t}\} \ \forall t \iff A = B \qquad \forall, B\in C$$

- حل معادله دیفرانسیل:

$$a x^{(n)} + a_0 x^{(n-1)} + \dots + a x = A_m\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{cases} X = X_m e^{j\psi} \\ A = A_m e^{j\varphi} \end{cases}$$

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} Re\{Xe^{j\omega t}\} + \dots + a_n Re\{Xe^{j\omega t}\} = Re\{Ae^{j\omega t}\}$$

$$\xRightarrow{\text{لم ۱}} \frac{d^n}{dt^n} Re\{a_0 X e^{j\omega t}\} + \dots + Re\{a_n \ e^{j\omega t}\} = Re\{Ae^{j\omega t}\}$$

$$\xRightarrow{\text{لم ۲ مکرر}} Re\{a_0(j\omega)^n X e^{j\omega t}\} + \dots + Re\{a_n X e^{j\omega t}\} = Re\{Ae^{j\omega t}\}$$

$$\xRightarrow{\text{لم ۱}} Re\left\{\left(a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n\right) X e^{j\omega t}\right\} = Re\{Ae^{j\omega t}\}$$

$$\xRightarrow{\text{لم ۳}} \left[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n\right] X = A$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_m = \dfrac{A_m}{\left[(a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots)^2 + (a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots)^2\right]^{1/2}} \\ \psi = \phi - \tan^{-1} \dfrac{a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots}{a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots} \end{cases}$$

- توجه: اگر $a_0(j\omega)^n + \dots + a_n = 0$ گردد یعنی $j\omega$ ریشه معادله مشخصه است،
پاسخ خصوصی به صورت $tA\cos(\omega t+\varphi)$ خواهد بود.

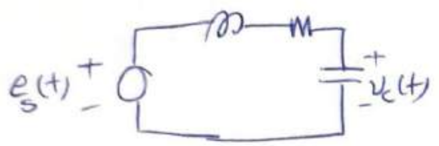
- مطابق نکته گفته شده را می‌توان به راحتی برای معادله دیفرانسیل زیر بسط داد :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 w^{(m)} + \dots + b_m w \quad , w(t) = Re\{Ae^{j\omega t}\}$$

در این شرایط $B = |B|e^{j\psi}$ و $y(t) = Re\{Be^{j\omega t}\}$ داریم :

$$[(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0]B = [b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m]A$$

مثال :



$$, e_s(t) = Re\{Ee^{j\omega t}\} = |E|\cos(\omega t + \varphi)$$

معادله دیفرانسیل مدار فوق به صورت زیر است :

$$LC\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e_s(t)$$

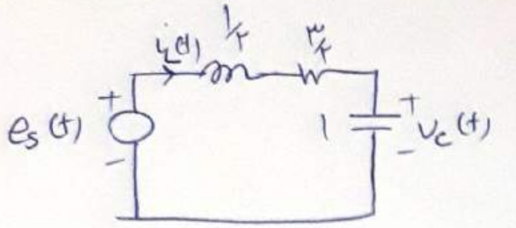
تک جواب خاص معادله به صورت زیر است . $v_c(t) = Re\{V_c e^{j\omega t}\} = |V_c|\cos(\omega t + \psi)$

رابطه میان V_c و E نیز از روی معادله دیفرانسیل به صورت زیر تعیین می‌شود :

$$[LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1]V_c = E \Rightarrow V_c = \frac{E}{(1-\omega^2 LC) + j\omega RC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |V_c| = \dfrac{|E|}{[(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2]^{1/2}} \\ \psi = \varphi - \tan^{-1}\dfrac{\omega RC}{1-\omega^2 LC} \end{cases}$$

مثال - در مدار شکل مقابل پاسخ کامل را به دست آورید.



$v_c(0^-)=1$

$i_L(0^-)=2$

$e_s(t)=\cos 2t\, u(t)$

$$t\geq 0^-:\ LC\frac{d^2v_c}{dt^2}+RC\frac{dv_c}{dt}+v_c=e_s(t)$$

$$\Rightarrow t\geq 0^-:\ \frac{1}{2}v_c''+\frac{3}{2}v_c'+v_c=\cos 2t\, u(t)$$

$$v_c(0^-)=1$$

$$v_c'(0^-)=\frac{i_c(0^-)}{c}=\frac{i_L(0^-)}{c}=\frac{2}{1}=2$$

در v_c'' پله داریم ← در v_c' پله نداریم ← $v_c'(0^-)=v_c'(0^+)$

در v_c پله نداریم ← $v_c(0^-)=v_c(0^+)$

$$\Rightarrow t\geq 0^+:\ \frac{1}{2}v_c''+\frac{3}{2}v_c'+v_c=\cos 2t$$

$$v_c(0^+)=1$$

$$v_c'(0^+)=2$$

$$v_{ch}=k_1e^{-t}+k_2e^{-2t}$$

$$v_{cp}=\mathrm{Re}\{Ve^{j2t}\}=|V|\cos(2t+\varphi)$$

V ← فازور ولتاژ

$$e_s(t)=\mathrm{Re}\{Ee^{j2t}\}\Rightarrow E=1e^{j0}$$

$$\left(\frac{1}{2}(j\omega)^2+\frac{3}{2}(j\omega)+1\right)V=E\Rightarrow V=\frac{E}{-1+3j}=0.316\,e^{-j108.4^\circ}$$

$$\Rightarrow v_{cp}(t)=0.316\cos(2t-108.4)$$

$$\begin{cases} v_c(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-2t}+0.316\cos(2t-108.4)\\ \text{شرایط اولیه}\Rightarrow \begin{cases}k_1=3.4\\ k_2=-2.5\end{cases}\end{cases}$$

$$v_c(t)=\left[3.4e^{-t}-2.5e^{-2t}+0.316\cos(2t-108.4)\right]u(t)\qquad t\geq 0$$

پاسخ کامل دو مؤلفه دارد. حالت گذرا که همان v_{ch} است و حالت دائمی که v_{cp} است.

پاسخ حالت دائمی سینوسی:

مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را که با یک منبع سینوسی تحریک می‌شود در نظر می‌گیریم. فرض کنید یکی از متغیرهای خاص شبکه مثل y مورد توجه باشد در اینصورت پاسخ به فرم کلی زیر خواهد بود:

$$y(t) = k_1 e^{s_1 t} + \dots + k_n s^{s_n t} + A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

برای سهولت فرض کردایم ریشه‌های معادله مشخصه ساده بوده‌اند و دامنه A_m و فاز φ نیز به راحتی از روش فازوری محاسبه شده است.

اگر تمام ریشه‌های معادله مشخصه در نیم صفحه باز چپ صفحه مختلط باشند، در این صورت وقتی $t \to \infty$ جملات $k_1 e^{s_1 t}$، ...، $k_n e^{s_n t}$ به صفر میل می‌کنند و یا به عبارت دیگر وقتی $t \to \infty$، پاسخ به طور دلخواه به سینوسی $A_m \cos(\omega t + \varphi)$ نزدیک می‌شود. بنابراین:

صرف نظر از حالت اولیه و مشروط بر این که تمام فرکانس‌های طبیعی در نیم صفحه باز چپ باشند، وقتی $t \to \infty$، پاسخ سینوسی خواهد شد. این پاسخ را پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌نامند.

پاسخ حالت دائمی سینوسی را می‌توان به سهولت از روی روش فازوری محاسبه نمود.

- پایدار مجانبی ← وقتی تمام فرکانس‌های طبیعی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در نیم صفحه چپ باز باشد آن را پایدار مجانبی گوییم.

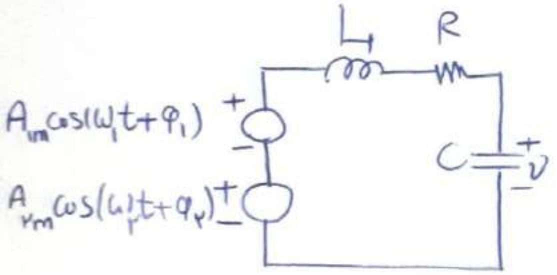
- ناپایدار ← اگر یک یا چند فرکانس طبیعی یک مدار خطی در نیم صفحه باز راست واقع باشند گوییم مدار ناپایدار است.

- وقتی $t \to \infty$، هر پاسخ ورودی صفر یک مدار پایدار مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. در این حالت اگر تنها تحریک ورودی سینوسی باشد، هر متغیر مدار به سمت حالت دائمی سینوسی می‌رود. ← مدارهای پایدار مجانبی حالت دائمی سینوسی دارند.

جلسه بیست و دوم :

جمع آثار در حالت دائمی :

- مدار پایدار مجانبی داریم
- توسط دو منبع با فرکانس‌های مختلف تحریک می‌شود



$$A_{1m}\cos(\omega_1 t+\varphi_1) \Longleftrightarrow A_{1m}e^{j\varphi_1}$$
$$A_{2m}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \Longleftrightarrow A_{2m}e^{j\varphi_2}$$

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_{2m}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

جواب معادله فوق به صورت v_p+v_h است که v_h جواب معادله همگن است و چون مدار پایدار مجانبی است در $t\to\infty$ صفر می‌گردد.

v_{p1} جواب خاص محاسبه شده به روش فازوری وقتی که سینوسی $A_{1m}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ به تنهایی مدار را تحریک می‌کند

v_{p2} " " " " $A_{2m}\cos(\omega_2 t+\varphi_1)$ " "

در این صورت داریم :

$$LC\frac{d^2v_{p1}}{dt^2}+RC\frac{dv_{p1}}{dt}+v_{p1}=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$LC\frac{d^2v_{p2}}{dt^2}+RC\frac{dv_{p2}}{dt}+v_{p2}=A_{2m}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

با جمع کردن دو معادله فوق خواهیم داشت :

$$LC\frac{d^2}{dt^2}(v_{p1}+v_{p2})+RC\frac{d}{dt}(v_{p1}+v_{p2})+(v_{p1}+v_{p2})=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_{2m}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

بنابراین $v_{p1}+v_{p2}$ یک جواب خاص معادله فوق است و با تحلیل فازور داریم

$$v_p(t)=V_{1m}\cos(\omega_1 t+\varphi_1+\theta_1)+V_{2m}\cos(\omega_2 t+\varphi_2+\theta_2)$$

$$V_{1m}e^{j(\theta_1+\varphi_1)}\triangleq\frac{A_{1m}e^{j\varphi_1}}{1-\omega_1^2LC+j\omega_1RC}\qquad V_{2m}e^{j(\theta_2+\varphi_2)}\triangleq\frac{A_{2m}e^{j\varphi_1}}{1-\omega_2^2LC+j\omega_2LC}$$

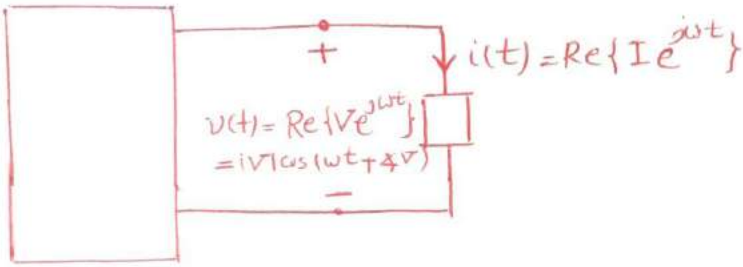
- توجه کنید که در مخرج دو عبارت فوق به ترتیب فرکانس های ω_1 و ω_2 را به کار بردیم.

- شرایط اولیه هرچه باشد وقتی $t\to\infty$ ولتاژ v به طور دلخواه به مقدار v_p که به صورت فوق است داده می‌شود.

- شکل موج $v_p(\cdot)$ (حالت دائمی) مانند حالت دائمی سینوسی نیست زیرا مجموع دو سینوسی با فرکانس های متفاوت است.

- نتیجه: حالت دائمی حاصل از تحریک یک مدار با دو ورودی سینوسی مساوی مجموع دو حالت دائمی سینوسی است که در صورت اعمال هر یک از دو سینوسی ورودی به طور جداگانه روی مدار به دست می‌آید.

- مفهوم امپدانس و ادمیتانس:



* مقاومت:

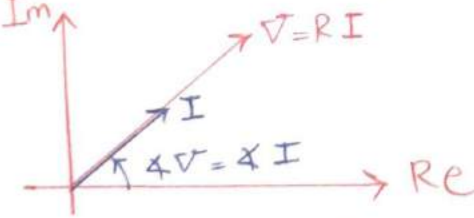
$$\left.\begin{aligned} v(t)&=Re\{Ve^{j\omega t}\}\\ i(t)&=Re\{Ie^{j\omega t}\}\\ v(t)&=R\,i(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow v(t)=R\;Re\{Ie^{j\omega t}\}$$

$$=Re\{RI\,e^{j\omega t}\}=Re\{Ve^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow RI=V$$

← R عدد حقیقی است $\Leftarrow$

$$\angle I=\angle V$$



* خازن

$$\left.\begin{aligned} v(t)&=Re\{Ve^{j\omega t}\}\\ i(t)&=Re\{Ie^{j\omega t}\}\\ i(t)&=C\frac{dv(t)}{dt}\end{aligned}\right\}\Rightarrow i(t)=C\frac{d}{dt}Re\{Ve^{j\omega t}\}$$

$$=C\;Re\{V\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\}$$

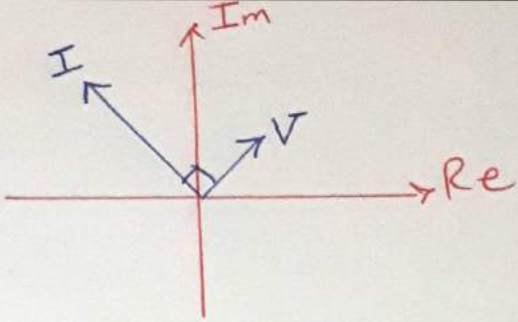
$$=C\;Re\{(j\omega)Ve^{j\omega t}\}$$

$$=Re\{C(j\omega)Ve^{j\omega t}\}=Re\{Ie^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow I=j\omega CV$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{jC\omega} I$$

$$\measuredangle V = \measuredangle I - 90^\circ$$



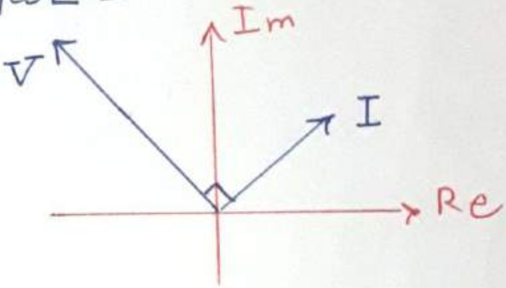
* سلف

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = Re\{V e^{j\omega t}\} \\ i(t) = Re\{I e^{j\omega t}\} \\ v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow v(t) = L\frac{d}{dt} Re\{I e^{j\omega t}\}$$

$$= Re\{L I j\omega e^{j\omega t}\} = Re\{V e^{j\omega t}\}$$

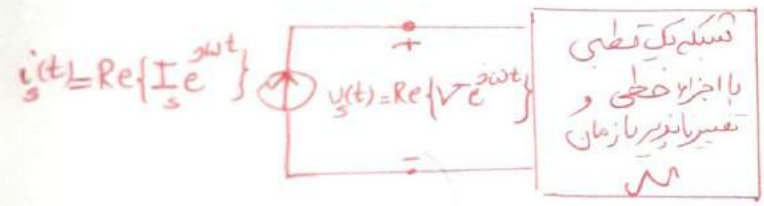
$$\Rightarrow V = j\omega L I$$

$$\measuredangle V = \measuredangle I + 90^\circ$$



- تعریف امپدانس و ادمیتانس

* تعمیم برای شبکه های یک قطبی با اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان:



ورودی یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω است:

$$i_s(t) = Re\{I_s e^{j\omega t}\} = |I_s| \cos(\omega t + \measuredangle I_s)$$

فرض کنید پاسخ ولتاژ حالت دائمی سینوسی به صورت زیر باشد:

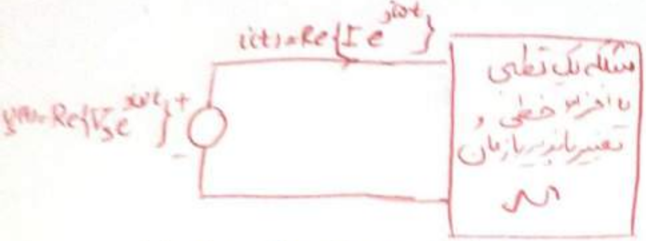
$$v(t) = Re\{V e^{j\omega t}\} = |V| \cos(\omega t + \measuredangle V)$$

امپدانس نقطه تحریک شبکه یک قطبی N در فرکانس زاویه ω (امپدانس) را نسبت فازور ولتاژ خروجی V به فازور جریان ورودی I_s تعریف می‌کنیم یعنی:

$$Z(j\omega) \triangleq \frac{V}{I_s} \Rightarrow \begin{cases} |Z(j\omega)| = \dfrac{|V|}{|I|} \\ \measuredangle Z(j\omega) = \measuredangle V - \measuredangle I \end{cases}$$

$$v(t)=|V|\cos(\omega t+\angle V)=|Z(j\omega)||I_s|\cos(\omega t+\angle I_s+\angle Z)$$

اگر شبکه یک قطبی $\mathcal{N}$ دارای امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ و جریان ورودی آن $|I_s|\cos(\omega t+\angle I_s)$ باشد آنگاه در حالت دائمی سینوسی، ولتاژ آن تحت یک سینوسی با اندازه‌ی $|Z(j\omega)||I_s|$ و فاز آن $\angle Z(j\omega)+\angle I$ خواهد بود.



$$V_s(t)=Re\{V_s e^{j\omega t}\}=|V_s|\cos(\omega t+\angle V_s)$$

فرض کنید جریان $i(t)$ به صورت زیر باشد:

$$i(t)=Re\{Ie^{j\omega t}\}=|I|\cos(\omega t+\angle I)$$

ادمیتانس نقطه تحریک شبکه یک قطبی $\mathcal{N}$ در فرکانس زاویه‌ای ω (ادمیتانس) را با نسبت فازور جریان ورودی I بر فازور ولتاژ ورودی V_s تعریف می‌کنیم.

$$Y(j\omega)\triangleq\frac{I}{V_s}$$

← اگر منبع ولتاژ شکل فوق به گونه‌ای تنظیم شود که V_s برابر V شکل قبل گردد، می‌توان انتظار داشت که I در شکل بالا برابر I_s شکل حالت قبل گردد بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} V&=Z(j\omega)I\\ I&=Y(j\omega)V \end{aligned}\Rightarrow Z(j\omega)=\frac{1}{Y(j\omega)}\Rightarrow\begin{cases}|Z(j\omega)|=\dfrac{1}{|Y(j\omega)|}\\ \angle Z(j\omega)=-\angle Y(j\omega)\end{cases}$$

Y	Z	فرکانس زاویه‌ای ω
$G=\frac{1}{R}$	R	مقاومت R
$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega C}$	ظرفیت C
$\frac{1}{j\omega L}$	$j\omega L$	سلف L

- تجزیه تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای ساده

* معادله مش:

$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0$

$\Rightarrow Re\{\bar{V}_1 e^{j\omega t}\} + Re\{\bar{V}_2 e^{j\omega t}\} + Re\{\bar{V}_3 e^{j\omega t}\} = 0$

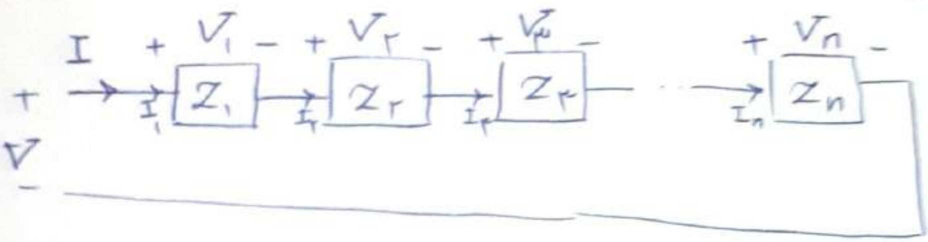
$\Rightarrow Re\{(\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3) e^{j\omega t}\} = 0 \Rightarrow \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$

* معادله گره:

$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 0$

- بهم پیوستن سری - موازی :

* موازی



$$\left.\begin{array}{l} KCL \rightarrow I_1 = I_2 = \dots = I_n = I \\ KVL \rightarrow V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \\ \qquad V_i = Z_i I_i \end{array}\right\} \Rightarrow V = Z_1 I + \dots + Z_n I$$

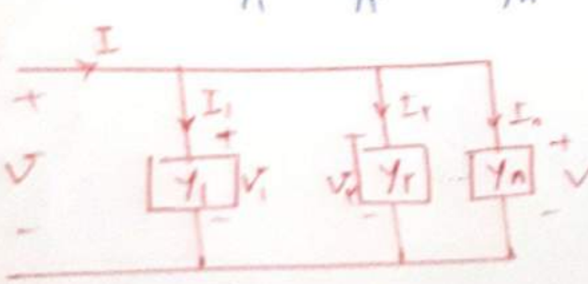
$\Rightarrow V = (Z_1 + \dots + Z_n) I$

$\Rightarrow Z = Z_1 + \dots + Z_n$

$Z = Z_1 + \dots + Z_n \Rightarrow \frac{1}{Y} = \frac{1}{Y_1} + \dots + \frac{1}{Y_n}$

$\Rightarrow Y = \dfrac{1}{\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots + \frac{1}{Y_n}}$

* سری



$$\left.\begin{array}{l} V_1 = V_2 = \dots = V_n = V \\ I = I_1 + \dots + I_n \\ I_i = Y_i V_i \end{array}\right\} \Rightarrow I = (Y_1 + \dots + Y_n) V$$

$\Rightarrow Y = Y_1 + \dots + Y_n = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n} \Rightarrow Z = \dfrac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}}$

جلسه بیست و سوم

تجزیه و تحلیل گره، مش در حالت دائمی سینوسی

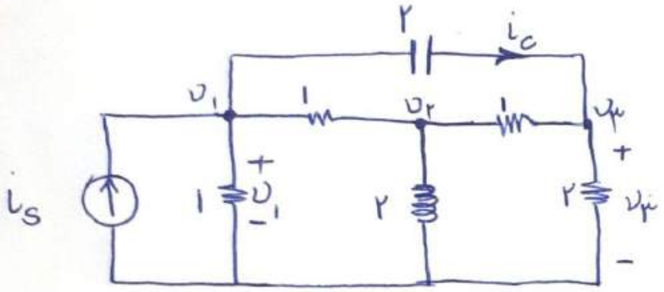
توان در حالت دائمی سینوسی

— نوشتن معادلات ولتاژ و جریان کیرشف برحسب فازورهای ولتاژ و فازورهای جریان

در یک حلقه $\rightarrow V_1 + V_2 + \cdots + V_N = 0$

در یک گره $\rightarrow I_1 + I_2 + \cdots + I_N = 0$

مثال ۱:



$i_s(t) = 10\cos(2t + 30^\circ)$

$v_3(t) = ?$

حل با استفاده از روش گره:

$$i_s(t) = 10\cos(2t+30^\circ) \Rightarrow I_s = 10\, e^{j30^\circ}$$

$v_1 \Leftrightarrow V_1$

$v_2 \Leftrightarrow V_2$

$v_3 \Leftrightarrow V_3$

$$\text{KCL 1}:\quad -I_s + V_1 + (V_1 - V_2) + 4j(V_1 - V_3) = 0$$

$$\text{KCL 2}:\quad \frac{1}{4j}V_2 + (V_2 - V_1) + (V_2 - V_3) = 0$$

$$\text{KCL 3}:\quad \frac{1}{2}V_3 + (V_3 - V_2) + 4j(V_3 - V_1) = 0$$

با حل دستگاه فوق داریم:

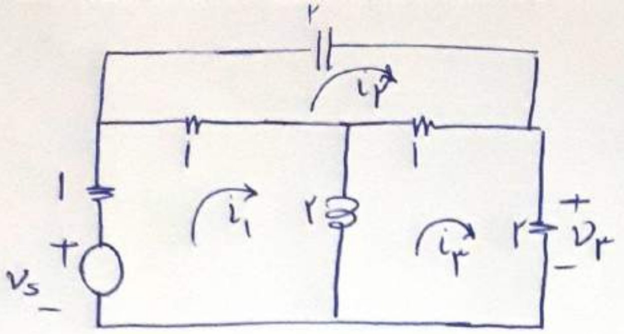
$$V_3 = \frac{2+j8}{6+j11.25} I_s = 6.45\, e^{j44^\circ}$$

$$\Rightarrow v_3(t) = 6.45\cos(2t + 44^\circ)$$

مثال ۲:

$v_s(t) = 10\cos(2t + 30^\circ)$

$v_3(t) = ?$



$i_1(t) \Longleftrightarrow I_1$

$i_2(t) \Longleftrightarrow I_2$

$i_3(t) \Longleftrightarrow I_3$

KVL M1 : $-V_s + I_1 + (I_1 - I_2) + 4j\,(I_1 - I_3) = 0$

KVL 2 : $\frac{1}{4j} I_2 + (I_2 - I_3) + (I_2 - I_1) = 0$

KVL 3 : $2I_3 + 4j\,(I_3 - I_1) + (I_3 - I_2) = 0$

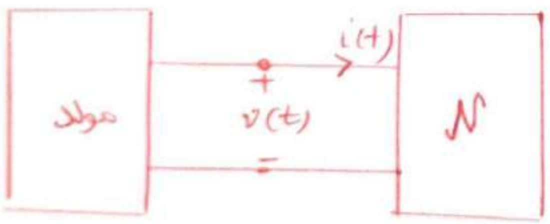
از حل معادلات فوق $I_3 = \frac{2+8j}{12+22.5j} V_s$ به دست می آید.

$$V_3 = 2I_3 = \frac{4+16j}{12+22.5j} V_s = 4.45\, e^{j44^\circ}$$

$$\Rightarrow v_3(t) = 4.45\cos(2t + 44^\circ)$$

توان در حالت دائمی سینوسی:

فرض کنید مدار مقابل در حالت دائمی سینوسی باشد.



$$p(t) = v(t)\, i(t) \rightarrow W(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(t')\, dt'$$

$$p(t) = V_m \cos(\omega t + \measuredangle V)\, I_m \cos(\omega t + \measuredangle I)$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\measuredangle V - \measuredangle I) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \measuredangle V + \measuredangle I)$$

$$P_{av} \triangleq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} p(t')\,dt' \xrightarrow[T]{\text{مساوی با دوره}} \frac{1}{T}\int_0^T p(t')\,dt'$$

$$\Rightarrow P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \angle V + \angle I)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I)$$

* $\angle V - \angle I$ مساوی زاویه امپدانس شبکه یک‌قطبی است در نتیجه می‌توان با تغییر فقط زاویه امپدانس توان متوسط دریافت شده را تغییر داد.

توان مختلط : این توان به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$P \triangleq \frac{1}{2} V \bar{I}$$

$$= \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\angle V - \angle I)} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) + j\frac{1}{2} V_m I_m \;\; (\angle V - \angle I)$$

$$\Rightarrow P_{av} = Re\{P\}$$

- تعریف توان مختلط با استفاده از امپدانس و ادمیتانس :

$$P = \frac{1}{2} V \bar{I} = \frac{1}{2} V \overline{(YV)} = \frac{1}{2} y |V|^2 = \frac{1}{2} V_m^2 \bar{Y}$$

$$\Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2} V_m^2 Re\{\bar{Y}\} = \frac{1}{2} V_m^2 Re\{Y\}$$

$$P = \frac{1}{2} V \bar{I} = \frac{1}{2} Z I \bar{I} = \frac{1}{2} Z I_m^2$$

$$\Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2} I_m^2 Re\{Z\}$$

خاصیت جمع پذیری توان متوسط

شبکه یک قطبی N با یک ورودی که مجموع چندین سینوسی است با فرکانس های مختلف.
فرض کنید شبکه در حالت دائمی است.

$$i(t) = I_{1m}\cos(\omega_1 t + \psi_1) + I_{2m}\cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

$$\Rightarrow v(t) = I_{1m}|Z(j\omega_1)|\cos(\omega_1 t + \psi_1 + \angle Z(j\omega_1)) + I_{2m}|Z(j\omega_2)|\cos(\omega_2 t + \psi_2 + \angle Z(j\omega_2))$$

$$= V_{1m}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + V_{2m}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\begin{aligned}
p(t) = v(t)\,i(t) = {} & \tfrac{1}{2}V_{1m}I_{1m}\cos(\varphi_1 - \psi_1) + \tfrac{1}{2}V_{2m}I_{2m}\cos(\varphi_2 - \psi_2) \\
& + \tfrac{1}{2}V_{1m}I_{1m}\cos(2\omega_1 t + \varphi_1 + \psi_1) \\
& + \tfrac{1}{2}V_{2m}I_{2m}\cos(2\omega_2 t + \varphi_2 + \psi_2) \\
& + \tfrac{1}{2}V_{1m}I_{2m}\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \psi_2) \\
& + \tfrac{1}{2}V_{1m}I_{2m}\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \psi_2) \\
& + \tfrac{1}{2}V_{2m}I_{1m}\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \psi_1 + \varphi_2) \\
& + \tfrac{1}{2}V_{2m}I_{1m}\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \psi_1 - \varphi_2)
\end{aligned}$$

* توان لحظه‌ای مساوی مجموع توان های لحظه‌ای نیست زیرا مجموع فقط از چهار جمله اول سمت راست تشکیل می‌شود.

* توان متوسط مساوی مجموع توان های متوسط در فرکانس های ω_1 و ω_2 است

← در حالت دائمی خاصیت جمع آثار برای توان متوسط به شرط اینکه فرکانس ها متفاوت باشند برقرار است.

- مقدار مؤثر:

مقدار متوسط یک ولتاژ و یا جریان متناوب به صورت مقابل به دست می آید:

$$V_{eff} \triangleq \left[\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt\right]^{1/2}$$

$$I_{eff} \triangleq \left[\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt\right]^{1/2}$$

با استفاده از تعریف فوق توان متوسط تحویل داده شده به یک مقاومت به صورت زیر به دست می آید:

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,i(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T R\,i^2(t)\,dt = R\,I_{eff}^2$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{R}\,v^2(t)\,dt = \frac{1}{R}V_{eff}^2$$

برای یک شکل موج سینوسی داریم:

$$V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

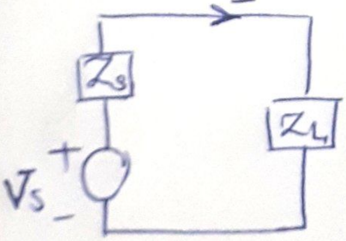
بنابراین توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت برابر است با:

$$P_{av} = R\,I_{eff}^2 = \frac{1}{2}R\,I^2$$

توان تحویلی به یک قطبی N نیز برابر است با:

$$P_{av} = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\measuredangle V - \measuredangle I) = V_{eff} I_{eff} \cos(\measuredangle V - \measuredangle I)$$

- قضیه انتقال توان ماکزیمم:



$$v_s(t) = Re\{V_s e^{j\omega t}\}$$

می خواهیم Z_L را به گونه ای انتخاب کنیم که حداکثر توان متوسط به آن منتقل شود.

$$\left.\begin{array}{l} P_{av} = \frac{1}{2}|I|^2\,Re\{Z_L\} \\ KVL \rightarrow Z_s I + Z_L I = V_s \Rightarrow I = \dfrac{V_s}{Z_L + Z_s} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2}|V_s|^2\,\frac{Re\{Z_L\}}{|Z_s + Z_L|^2}$$

$Z_s \triangleq R_s + jX_s$

$Z_L \triangleq R_L + jX_L$

$$\rightarrow P_{av} = \frac{1}{2}|V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L+R_s)^2+(X_L+X_s)^2}$$

V_s ، R_s ، X_s ← معلوم

R_L ، X_L ← باید به گونه‌ای انتخاب شوند که P_{av} ماکزیمم گردد.

چون X_L می‌توان مثبت یا منفی باشد ← $X_L = -X_s$ انتخاب می‌نماییم تا عبارت $(X_L+X_s)^2$ حداقل گردد.

بنابراین داریم:

$$P_{av} = \frac{1}{2}|V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L+R_s)^2}$$

برای به دست آوردن مقدار بهینه R_L نیز از عبارت فوق نسبت به R_L مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = \frac{1}{2}|V_s|^2 \frac{(R_L+R_s)^2 - 2(R_L+R_s)R_L}{(R_L+R_s)^4} = 0 \Rightarrow R_L = R_s$$

بنابراین داریم:

$$\max P_{av} = \frac{|V_s|^2}{8R_s}$$

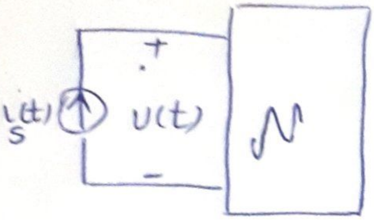
و توان فوق هنگامی به دست می‌آید که داشته باشیم:

$$Z_L = \bar{Z}_s$$

جلسه بیست و چهارم

مثال‌هایی از حالت دائمی سینوسی

مثال ۱: در مدار شکل مقابل معادله دیفرانسیل $v(t)$ و $i_s(t)$ به صورت زیر است.



$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+15\frac{dv}{dt}+50v=\frac{d^2 i_s}{dt^2}+7\frac{di_s}{dt}$$

امپدانس دیده شده در سرهای A و B در فرکانس ω چیست؟

$$v(t)=V_m\cos(\omega t+\varphi)\Leftrightarrow V_m e^{j\varphi}=V \Rightarrow v(t)=Re\{Ve^{j\omega t}\}$$
$$i_s(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)\Leftrightarrow I=I_m e^{j\psi} \Rightarrow i(t)=Re\{Ie^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2V+15(j\omega)V+50V=(j\omega)I_s+7j\omega I_s$$

$$\Rightarrow \frac{V}{I_s}=\frac{-\omega^2+7j\omega}{(50-\omega^2)+j15\omega}$$

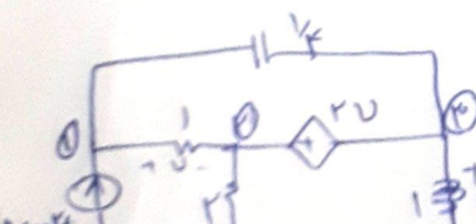
برای ورودی $i_s(t)=10\cos 5t$ یک جواب خصوصی بدست آورید.

$$I_s=10e^{j0}$$

$$V=Z(j\omega)I=Z(j5)I=\frac{-25+j35}{25+j75}\times 10=5.44e^{j53.87^\circ}$$

$$\Rightarrow v(t)=5.44\cos(5t+53.97^\circ)$$

مثال ۲: مدار شکل مقابل در حالت دائمی سینوسی است. ولتاژ خروجی v_0 و امپدانس دیده شده توسط منبع را به دست آورید.

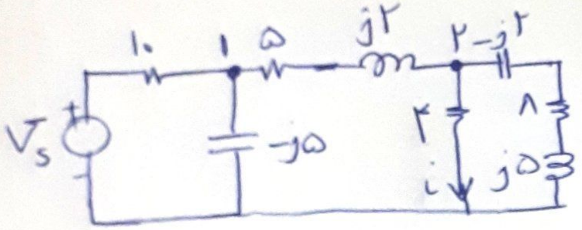


$$KCL\ 1: -5+\frac{V_1-V_2}{1}+j\frac{1}{2}(V_1-V_3)=0$$
$$KCL\ 23: (V_2-V_1)+\frac{V_2}{2}+\frac{V_3}{j2}+j\frac{1}{2}(V_3-V_1)=0$$
$$V_2-V_3=2(V_1-V_2)\Rightarrow 2V_1-3V_2+V_3=0$$
$$\Rightarrow V_3=5.88e^{j78.7^\circ}$$

$$\Rightarrow v_0(t)=5.88\cos(2t+78.7^\circ)$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= 5.77 - j1.15 \\ I &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z(j2) = \frac{5.77 - j1.15}{5} = 1.15 - j0.23$$

مثال ۳: در مدار شکل مقابل فازور منبع ولتاژ V_s را چنان تعیین کنید که فازور جریان i به صورت $I = 3e^{j45°}$ باشد.



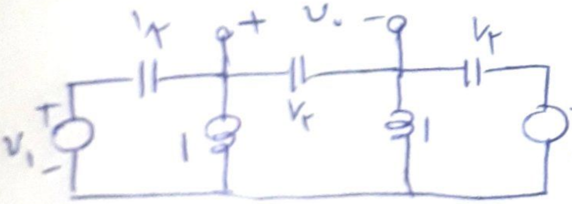
$$KCL\,1:\ \frac{V_1 - V_s}{10} + \frac{V_1}{-j5} + \frac{V_1 - V_2}{5 + j2} = 0$$

$$KCL\,2:\ \frac{V_2 - V_1}{5 + j2} + \frac{V_2}{4} + \frac{V_2}{8 + j3} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} V_2 &= \lambda V_s \\ I &= \frac{V_2}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = \frac{\lambda}{4} V_s \Rightarrow V_s = \frac{4I}{\lambda} = -0.3562 + j9.60$$

$$= 9.60\, e^{j92.1°}$$

مثال ۴: مدار شکل مقابل در حالت دائمی قرار دارد.



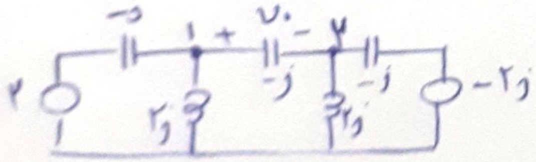
الف) برای $v_1 = 2\cos 2t$ ، $v_2 = 2\sin 2t$ ولتاژ خروجی $v_0(t)$ را تعیین کنید.

ب) برای $v_1(t) = 2\cos t$ و $v_2(t) = \sin 2t$ ولتاژ خروجی $v_0(t)$ را تعیین کنید.

الف) در این حالت مدار مقابل را داریم:

$$v_2 = 2\sin 2t = 2\cos(2t - 90°) \Leftrightarrow V_2 = 2e^{-j90°} = -2j$$

$$v_1 = 2\cos 2t = 2\cos(2t - 0) \Leftrightarrow V_1 = 2$$



$$KCL\,1:\ \frac{V_1 - 2}{-j} + \frac{V_1}{2j} + \frac{V_1 - V_2}{-j} = 0 \Rightarrow 3V_1 - 2V_2 = 4$$

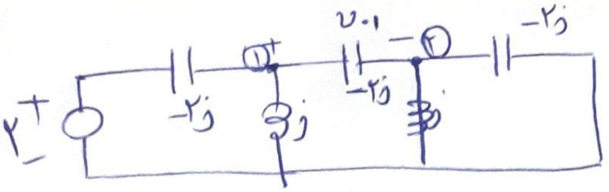
$$KCL\,2:\ \frac{V_2 - V_1}{-j} + \frac{V_2}{2j} + \frac{V_2 + 2j}{-j} = 0 \Rightarrow 2V_1 - 3V_2 = j4$$

$$\Rightarrow 5(V_1 - V_2) = 4(j+1) \Rightarrow V_0 = V_1 - V_2 = \frac{4}{5}(j+1) = \frac{4\sqrt{2}}{5} e^{j45°}$$

$$\Rightarrow v_o(t) = \frac{۴\sqrt{۲}}{۵}\cos(۲t+۴۵^\circ)$$

ب) چون فرکانس دو سینوسی متفاوت است باید از جمع آثار استفاده نماییم.

ابتدا فرض می‌کنیم $v_۱(t)$ حضور دارد:

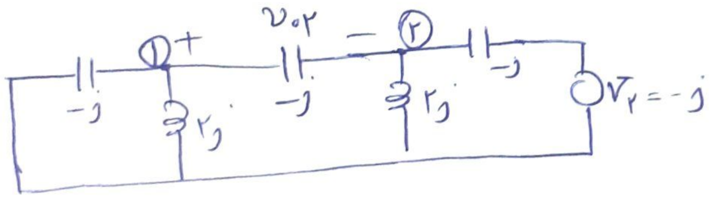


$$\frac{V_۱-۲}{-۲j}+\frac{V_۱}{j}+\frac{V_۱-V_۲}{-۲j}=۰ \Rightarrow \frac{V_۲}{۲j}=\frac{-۱}{j} \Rightarrow V_۲=-۲$$

$$\frac{-۲-V_۱}{-۲j}+\frac{-۲}{j}+\frac{-۲}{-۲j}=۰ \Rightarrow V_۱=۰$$

$$\Rightarrow V_{o۱}=۲ \Rightarrow v_{o۱}(t)=۲\cos(t)$$

حال فرض می‌کنیم $v_۲(t)$ حضور دارد:



$$\text{KCL 1}: \frac{V_۱}{-j}+\frac{V_۱}{۲j}+\frac{V_۱-V_۲}{-j}=۰ \Rightarrow ۳V_۱-۲V_۲=۰$$

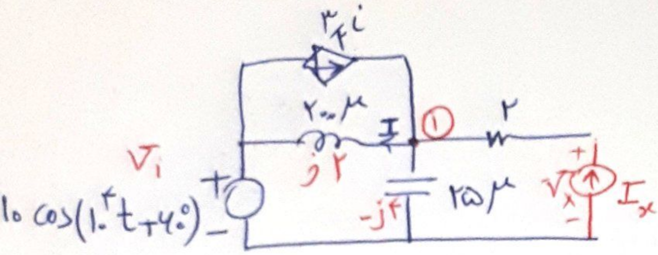
$$\text{KCL 2}: \frac{V_۲+j}{-j}+\frac{V_۲}{۲j}+\frac{V_۲-V_۱}{-j}=۰ \Rightarrow ۲V_۱-۳V_۲=۲j$$

$$\Rightarrow ۵(V_۱-V_۲)=۲j \Rightarrow V_{o۲}=\frac{۲}{۵}e^{j۹۰^\circ}$$

$$\Rightarrow v_{o۲}(t)=\frac{۲}{۵}\cos(۲t+۹۰^\circ)$$

$$v_o(t)=۲\cos t+\frac{۲}{۵}\cos(۲t+۹۰^\circ)$$

مثال ۱: معادل تونن دو سر a, b را به دست آورید.



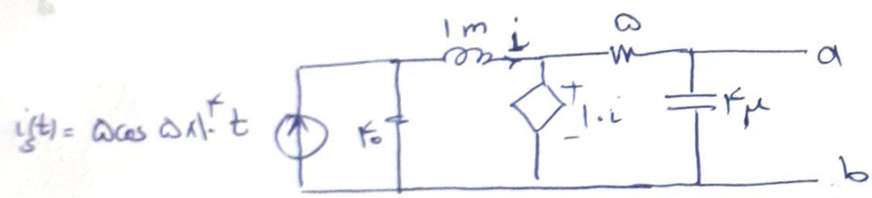
$$V_1 = V_x - 2I_x \quad , \quad V_i = 10\angle 40^\circ = 5 + j5\sqrt{3}$$

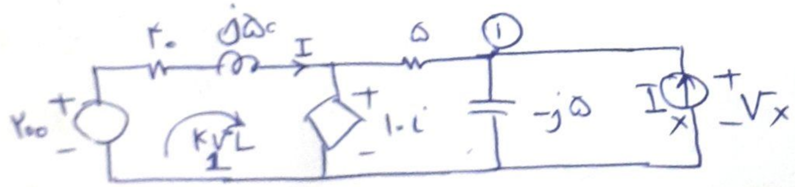
$$I = \frac{V_1 - V_i}{j2} = \frac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2}$$

$$\text{KCL 1:} \quad \frac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2} - \frac{3}{2}\,\frac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2} + \frac{V_x - 2I_x}{-j4} - I_x = 0$$

$$\Rightarrow V_x = (2 - j2)I_x + \frac{1}{2}(5 + j5\sqrt{3})$$

مثال ۲. معادل تونن را از دو سر a, b به دست آورید.

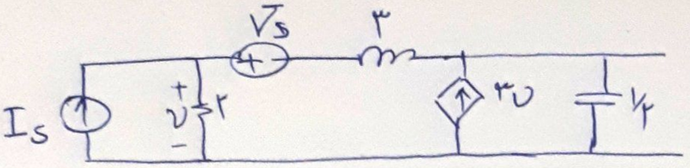


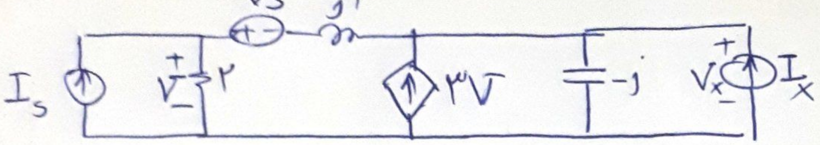


$$-200 + 40I + j50I + 10I = 0 \Rightarrow I = 2 - j2$$

$$\text{KCL در گره ۱:} \quad \frac{V_x - 10(2 - j2)}{5} + \frac{V_x}{-j5} - I_x = 0 \Rightarrow V_x = \left(\frac{5}{2} - j\frac{5}{2}\right)I_x - j20$$

مثال ۳. مدار معادل را از دو سر a, b به دست آورید. $\omega=2$





$$KCL1:\ -I_s + \frac{(V-V_s)-V_x}{j4} + \frac{V}{2} = 0 \Rightarrow V = \frac{1}{1+3j}\left(j4I_s + V_s + V_x\right)$$

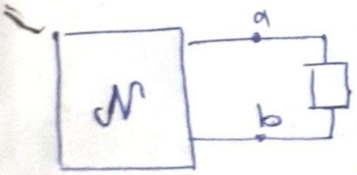
$$KCL2.\ \frac{V_x-(V-V_s)}{j4} - 3V + \frac{V_x}{-j} - I_x = 0 \Rightarrow (1+18j)V = -j4I_x - 9V_x + V_s$$

$$\Rightarrow \frac{1+j18}{1+j3}\left(j4I_x + V_s + V_x\right) = -j4I_x - 9V_x + V_s$$

$$\Rightarrow V_x = -(0/08+j0/65)I_x + (0/4-j3/2)I_s - (0/44+j0/08)V_s$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_{th} \\ E_{oc} \end{cases}$$

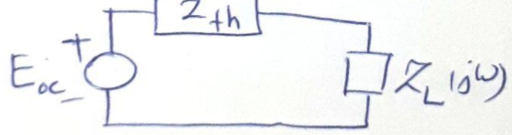
مثال ۴: معادل تونن از دو سر a, b به دست آورید.



Z_L (بار)

$N \leftarrow$ خطی، تغییرناپذیر با زمان، منابع مستقل هم‌فرکانس
حالت دائمی سینوسی

Z_L	∞	$-j8$	$-j4$
$\lvert V_{ab}\rvert$	۱۰۰	۱۴۰	$\frac{400}{3}$



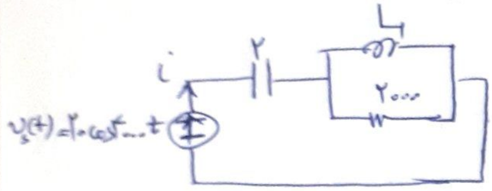
$$V_{ab} = \frac{Z_L}{Z_L + Z_{th}} E_{oc} = \frac{R_L + jX_L}{R_L + R_{th} + j(X_L + X_{th})} E_{oc}$$

$$\Rightarrow |V_{ab}| = \sqrt{\frac{R_L^2 + X_L^2}{(R_L+R_{th})^2 + (X_L+X_{th})^2}}\ |E_{oc}|$$

$$\begin{cases} |V_{ab}| = 100 \\ Z_L = \infty \end{cases} \Rightarrow |E_{oc}| = 100$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}|V_{ab}| = ۱۲۰\\ Z_L = -j۸\end{cases}\\ \begin{cases}|V_{ab}| = \frac{۴۰۰}{۳}\\ Z_L = -j۴\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}R_L^۲ + (X_L - ۸)^۲ = ۲۵\\ R_L^۲ + (X_L - ۴)^۲ = ۹\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R_L = ۳\\ X_L = ۴\end{cases}$$

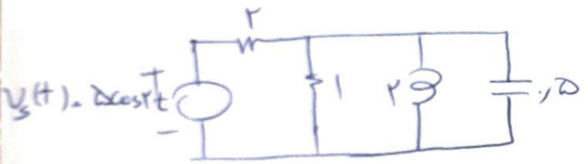
مثال ۵: L را چنان تعیین کنید که v_s و i هم فاز باشند.

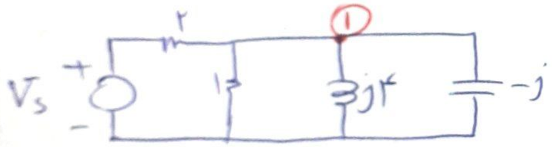


$$= \left[\frac{۱}{-j\,۰/۰۰۰۸} + (j۴۰۰۰L \,||\, ۲۰۰۰)\right] V_s = \frac{۸۰۰۰L^۲}{۱+۴L^۲} + j\,\frac{-۵۰۰L^۲ + ۴۰۰۰L - ۱۲۵}{۱+۴L^۲}$$

$$\Rightarrow -۵۰۰L^۲ + ۴۰۰۰L - ۱۲۵ = ۰ \Rightarrow L = ۷/۹۷\ H$$

مثال ۶: توان متوسط هر عنصر را حساب کنید.
نشان دهید مجموع توان متوسط صفر است.





$$KCL\ 1:\ \frac{V_1 - ۵}{۲} + V_1 + \frac{V_1}{j۴} + \frac{V_1}{-j} = ۰ \Rightarrow V_1 = \frac{۴}{۳} - j\frac{۲}{۳}$$

$$I_1 = \frac{۵ - (\frac{۴}{۳} - j\frac{۲}{۳})}{۲} = \frac{۱۱}{۶} + j\frac{۲}{۶}$$

مقاومت ۲: $\frac{۱}{۲}|I_1|^۲ Re\{۲\} = |I_1|^۲ = \frac{۱۲۵}{۳۶}\ W$

مقاومت ۱: $\frac{۱}{۲}|V_1|^۲ Re\{۱\} = \frac{۱}{۲}|V_1|^۲ = \frac{۲۰}{۱۸}\ W$

سلف: $\frac{۱}{۲}|V_1|^۲ Re\{\frac{۱}{j۴}\} = ۰$

خازن: $\frac{۱}{۲}|V_1|^۲ Re\{-\frac{۱}{j}\} = ۰$

$$S = \frac{۱}{۲} V_s I_1^* = \frac{۵}{۲}\left(\frac{۱۱}{۶} - j\frac{۲}{۶}\right) \Rightarrow P_{av} = \frac{۵۵}{۱۲}$$