به نام خدا

الکترومغناطیس - فصل اول - آنالیز برداری

کمیت‌ها چند دسته‌اند: اسکالر، بردار، تانسور...

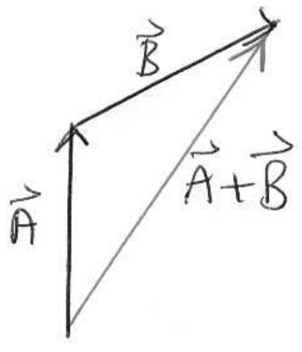
یک کمیت اسکالر اندازه دارد مثل جرم، بار الکتریکی، دما، ...

یک بردار اندازه و جهت دارد مثل جابجایی، نیرو، ...

$\vec{A}$ اندازهٔ بردار $= |\vec{A}|$

منفی بردار $\vec{A}$ را با $(-\vec{A})$ نشان می‌دهند، $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$

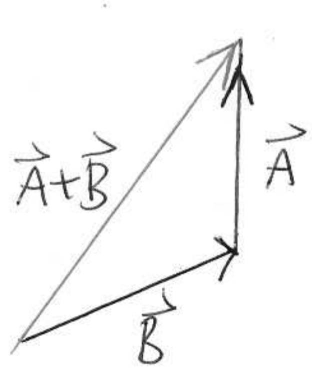
جمع برداری:



جابجایی $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$

شرکت‌پذیری $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

تفریق برداری:



$\vec{A}-\vec{B} = \vec{A}+(-\vec{B})$

ضرب اسکالر:

$$\alpha(\vec{A}+\vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$$

$$\alpha\vec{A} = \alpha(A_x, A_y, A_z) = (\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z)$$

اگر α مثبت باشد، جهت بردار تغییر نمی کند.

ضرب داخلی:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$

ضرب داخلی خاصیت جابجایی و شرکت پذیری دارد.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

* ضرب داخلی دو بردار یک کمیت اسکالر است. اگر دو بردار بر هم عمود باشند، آنگاه ضرب داخلی آنها صفر است.

$$\vec{A}\perp\vec{B} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

* ضرب داخلی یک بردار در خودش مربع اندازه بردار است:

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$$

* از نظر هندسی $\vec{A}\cdot\vec{B}$ برابر حاصل ضرب $\vec{A}$ در تصویر $\vec{B}$ در راستای $\vec{A}$ است.

قانون کسینوس (در صفحه تخت):

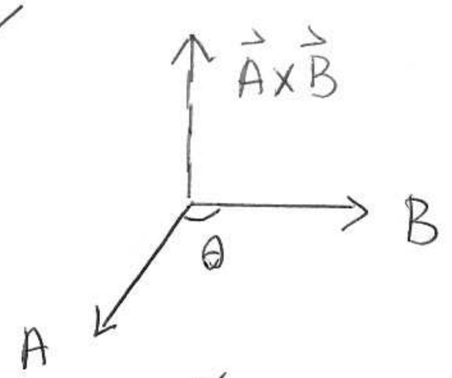
$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{A} \Rightarrow$$

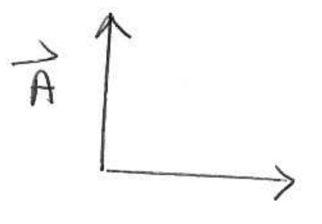
$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

ضرب خارجی:

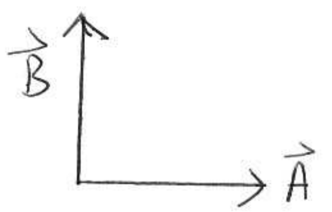


$$|\vec A\times\vec B| = |\vec A|\,|\vec B|\,\sin\theta$$

راستای $\vec A\times\vec B$ در راستای بردار نرمال صفحه‌ای است که از $\vec A$ و $\vec B$ بگذرد. اگر چهار انگشت دست راست از $\vec A$ به $\vec B$ بچرخند، آنگاه انگشت شست راستای ضرب خارجی $\vec A\times\vec B$ را نشان می‌دهد.



در این شکل $\vec A\times\vec B$ رو به درون صفحه است.



در این شکل $\vec A\times\vec B$ رو به بیرون صفحه است.

* ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد:

$$\vec A\times\vec B = -\vec B\times\vec A$$

* ضرب خارجی خاصیت شرکت‌پذیری دارد:

$$\vec A\times(\vec B+\vec C) = \vec A\times\vec B + \vec A\times\vec C$$

* برحسب مولفه‌ها

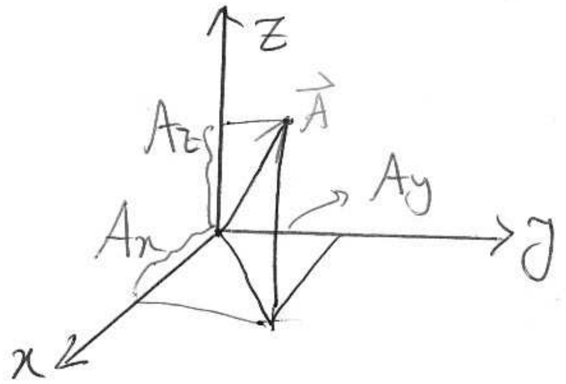
$$\vec A\times\vec B = \begin{vmatrix} \hat x & \hat y & \hat z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat x\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat y\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat z\,(A_xB_y - A_yB_x)$$

مثال: نشان دهید

$$\vec A\times(\vec B\times\vec C) \neq (\vec A\times\vec B)\times\vec C$$

برای یک مثال کافیست $\vec{A}=\hat{y}$ و $\vec{B}=\vec{C}=\hat{x}$ در نظر بگیرید.



مولفه‌های بردار در دستگاه دکارتی:

$$\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)$$

$$A_x=\vec{A}\cdot\hat{x}\,,\quad A_y=\vec{A}\cdot\hat{y}\,,\quad A_z=\vec{A}\cdot\hat{z}$$

در دستگاه دکارتی بردارهای یکه بر هم عمودند:

$$\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{x}\cdot\hat{z}=\hat{y}\cdot\hat{z}=0$$

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{x}+(A_y+B_y)\hat{y}+(A_z+B_z)\hat{z}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

ضرب خارجی بردارهای یکه

$$\hat{x}\times\hat{x}=\hat{y}\times\hat{y}=\hat{z}\times\hat{z}=0$$

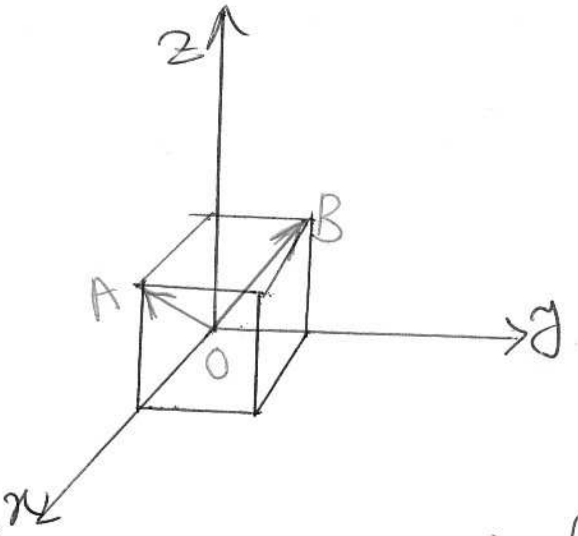
$$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}\,;\quad \hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}\,;\quad \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$$

ضرب داخلی بردارهای یکه

$$\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{x}\cdot\hat{z}=0$$

مثال: زاویه بین قطرها در مکعب واحد



$$\vec{A} = (1,0,1)\,;\quad \vec{B} = (0,1,1)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 1 = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}}$$

ضرب سه‌گانه

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ضرب خارجی سه‌گانه: قانون bac-cab

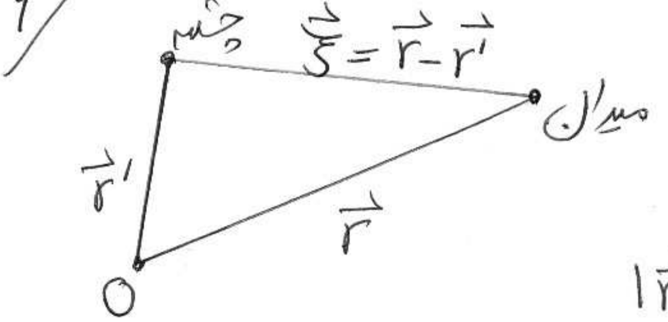
$$\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})}$$

سمت راست $= (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$

$$- (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)(C_x\hat{x} + C_y\hat{y} + C_z\hat{z})$$

سمت چپ $= \left[A_y(\vec{B}\times\vec{C})_z - A_z(\vec{B}\times\vec{C})_y\right]\hat{x} + [\cdots]\hat{y} + [\cdots]\hat{z}$

بردار مکان و جابجایی

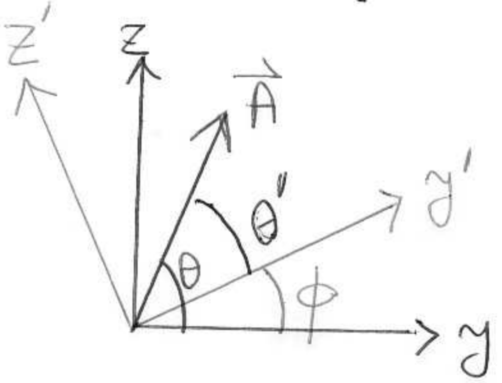


$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\hat{\mathscr{r}} = \frac{\vec{\mathscr{r}}}{|\vec{\mathscr{r}}|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{و} \quad |\vec{\mathscr{r}}| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

دوران بردارها

- آیا هر سه عدد یک بردار است؟
- یک بردار تحت تغییر دستگاه مختصات چگونه تغییر می کند؟



بردار $\vec{A}$ در دستگاه اصلی با محور y زاویه θ و در دستگاه پریم دار زاویه θ' می سازد.

$$\begin{cases} A_y = A\cos\theta \\ A_z = A\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{A'_y} = A\cos\theta' = A\cos(\theta-\phi)$$
$$= A(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)$$
$$= \boxed{A_y\cos\phi + A_z\sin\phi}$$

$$\boxed{A'_z} = A\sin(\theta-\phi) = \boxed{A_z\cos\phi - A_y\sin\phi}$$

$$\begin{bmatrix} A'_y \\ A'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

برای دوران سه بعدی داریم:

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} A_j$$

R_{ij} مولفه‌های ماتریس دوران هستند.

<u>هر سه مولفه‌ای که تحت دوران مثل بردار مکان تبدیل شود، یک بردار است.</u>

<u>مثال</u>: نقطهٔ $A=(x,y,z)$ را در نظر بگیرید. زاویه بردار $\overrightarrow{OA}$ با محورها را حساب کنید.

فرض کنید این بردار با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ بسازد.

$$\cos\alpha = \hat{x} \cdot \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

بطور مشابه برای سایر محورها داریم:

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

<u>مثال</u>: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار واحد باشند که با هم زاویه θ می‌سازند، ثابت کنید

$$\boxed{\sin\frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{2}}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= 2(1-\cos\theta) = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

✓

۸

تمرین: با توجه به تعریف کرده

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

ثابت کنید:

$$[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a}\cdot\vec{b}\ \vec{c}]$$

تمرین: ثابت کنید

$$\vec{a}\times[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] = (\vec{a}\times\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\times\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

تمرین: ثابت کنید

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

بردارها و تانسورها:

$$\vec{A}' = R(\theta)\vec{A}$$

در بخش قبل دیدیم که بردارها چگونه تحت دوران تبدیل می‌شوند،

یا

$$\boxed{A'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} A_j}$$

بردار: سه مولفه که تحت دوران مثل جابجایی تبدیل می‌شوند.

با روشی مشابه می‌توان یک تانسور تعریف کرد. یک تانسور مرتبه دو دو جهت دارد.

$$\boxed{T'_{ij} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} R_{il} R_{jk} T_{lk}}$$

هر مولفه یک تانسور مرتبه n، تعداد n اندیس دارد و این تانسور 3^n مولفه دارد.

یک تانسور مرتبه n با n تا ماتریس دوران R_{ij} تبدیل می‌شود.

چند نماد ریاضی :

Kronecker delta

دلتای کرونکر

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Levi-Civita symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i \to j \to k \\ -1 & k \to j \to i \\ 0 & \text{سایر حالت‌ها} \end{cases}$$

رابطه مهم :

$$\boxed{\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}}$$

حساب دیفرانسیل :

در مشتق معمولی با تابع تک متغیره $f(x)$ سروکار داریم که جهت ندارد.
اندازه مشتق در نقطه x_0 برابر $\left(\frac{df}{dx}\right)\Big|_{x_0}$ که همان شیب خط مماس در این نقطه است.

گرادیان :

هنگامی که تابعی بیش از یک متغیر داشته باشد، باید قانون مشتق گیری بالا را تعمیم دهیم. در این حالت مشتق به جهت بستگی دارد یعنی در دو راستای $\vec{S}_1$ و $\vec{S}_2$، اندازه مشتق تابع متفاوت است. به عبارت دیگر آهنگ تغییر تابع T

به جهتی که مشتق گیری در آن راستا انجام می‌شود بستگی دارد

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

$$= \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\hat{z}\right] \cdot \left[dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right]$$

$$= \boxed{\vec{\nabla} T \cdot d\vec{\xi}}$$

راستای گرادیان جهت بیشینه تغییرات تابع را نشان می‌دهد.

$$\Rightarrow dT = |\vec{\nabla} T|\, |d\vec{\xi}| \cos\theta$$

عملگر دل

$$\boxed{\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}} \Rightarrow \boxed{\nabla \equiv \partial_i\, \hat{e}_i} \Rightarrow \boxed{\nabla \phi = \partial_i \phi\, \hat{e}_i}$$

یا $\boxed{(\nabla\phi)_i = \partial_i \phi}$

در حالتی که گرادیان تابع در نقطه‌ای صفر شود، آن نقطه مفهوم کمینه یا بیشینه دارد.

مثال: گرادیان r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{\nabla} r = \partial_i r\, \hat{e}_i = \partial_x r\, \hat{x} + \partial_y r\, \hat{y} + \partial_z r\, \hat{z}$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)\hat{z} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{r} = \hat{r}$$

مثال: مقایسه مشتق در دو جهت

$$\psi(x,y) = x^2 + y^2$$

راستای 1 ; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x_0}{y_0}$

$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ المان طول

راستای 2 ; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_0}{x_0}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dS} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{d\psi}{dS}\bigg|_1 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dS} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \frac{dy}{dS} \xrightarrow{\frac{dy}{dS} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dS}}$$

$$= \left[2x_0 - 2y_0 \left(\frac{x_0}{y_0}\right)\right] \left(\frac{dx}{dS}\right) = \boxed{0}$$

$$\frac{d\psi}{dS}\bigg|_2 = 2x_0 \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} + 2y_0 \left(\frac{y_0}{\cancel{x_0}}\right) \frac{\cancel{x_0}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$= \frac{2(x_0^2+y_0^2)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = \boxed{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

اندازه مشتق به راستای مشتق گیری بستگی دارد

عملگر $\vec{\nabla}$ را که یک عملگر برداری است، پیش‌تر تعریف کردیم:

$$\vec{\nabla} \equiv \partial_i \hat{e}_i = \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}$$

دیورژانس:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \partial_i V_i}$$

$$= \left(\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}\right) \cdot \left(V_x \hat{x} + V_y \hat{y} + V_z \hat{z}\right)$$

$$= \boxed{\partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z}$$

دیورژانس معیاری برای چشمه یا چاهک یک کمیت در نقطه مورد نظر است. مثلاً یک میدان شعاعی دیورژانس قابل توجه دارد درحالی‌که یک میدان همگن دیورژانس صفر دارد.

چند مثال:

میدان شعاعی $\vec{\Psi} = \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} = 3}$

خط راست $\vec{\Psi} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \Psi = 0}$

میدان لرزه برشی $\vec{\Psi} = z\hat{z} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \Psi = 1}$

دیورژانس یک بردار یک اسکالر است و مثل اسکالر تحت دوران تبدیل می‌شود یعنی تغییر نمی‌کند

$$\partial_i V_i = \partial'_i V'_i$$

چرخش یا کرل:

$$\boxed{(\vec{\nabla}\times\vec{V})_i = \epsilon_{ijk}\,\partial_j V_k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\partial_y V_z - \partial_z V_y\right) + \hat{y}\left(\partial_z V_x - \partial_x V_z\right) + \hat{z}\left(\partial_x V_y - \partial_y V_x\right)$$

کرل یک بردار یک بردار است و اندازه آن معیاری از چرخش میدان حول یک نقطه است.

برای یک میدان همگن یا شعاعی، چرخش صفر است اما در یک گرداب غیر صفر است.

مثال: میدان شعاعی درون سو

$$\vec{V} = -r\,\hat{r} = -\vec{r}$$

$$= -\left(x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = -\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

حل:

$$\vec{V} = x^2 y \,\hat{x} - x y^2 \,\hat{y}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\cancel{\partial_y V_z} - \cancel{\partial_z V_y}\right)\hat{x} + \left(\cancel{\partial_z V_x} - \cancel{\partial_x V_z}\right)\hat{y}$$

$$+ \left(\partial_x V_y - \partial_y V_x\right)\hat{z} = -\left(x^2 + y^2\right)\hat{z}$$

حل:

$$\begin{cases} V_x = -U \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\ V_y = 0 \\ V_z = +U \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \partial_x V_x + \partial_z V_z = -\frac{\pi U}{L}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\right)$$

$$= \boxed{-\frac{\pi U}{L}\cos\left(\frac{\pi}{L}(x-z)\right)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\partial_z V_x - \partial_x V_z\right)\hat{y} = \boxed{\frac{2\pi U}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)}$$

این میدان برداری دیورژانس و کرل غیر صفر دارد و مدلی از حرکت مایع در سلول های همرفتی است.

چند اتحاد برداری:

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}(fg) = f(\vec{\nabla} g) + g(\vec{\nabla} f)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla} f$$

اثبات:

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})_i = \partial_i (fA)_i = f\,\partial_i A_i + A_i(\partial_i f)$$

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = f\,\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla} f\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\vec{\nabla} f - f\,\vec{\nabla} g}{g^2}$$

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \partial_i \partial_i$$

عملگر لاپلاسی

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla T}) = (\hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z) \cdot (\partial_x T \hat{x} + \partial_y T \hat{y} + \partial_z T \hat{z})$$

$$\boxed{= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T}$$

لاپلاسی یک اسکالر، یک اسکالر و لاپلاسی یک بردار، یک بردار است:

$$\nabla^2 \vec{V} = \hat{x}(\nabla^2 V_x) + \hat{y}(\nabla^2 V_y) + \hat{z}(\nabla^2 V_z)$$

چند اتحاد مهم

$$\boxed{\nabla \times (\vec{\nabla T}) = 0}$$

اثبات:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} T)_x = \partial_y(\partial_z T) - \partial_z(\partial_y T) = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0} \longrightarrow$$

تحقیق کنید!

$$\boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}}$$

اثبات:

$$(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{V})_k$$

$$= \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l V_m) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l V_m$$

$$= (\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl})\,\partial_j\,\partial_l\,V_m$$

$$= \partial_i\,\partial_j\,V_j - \partial_j\,\partial_j\,V_i = \partial_i(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \nabla^2 V_i$$

$$= \boxed{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \nabla^2\vec{V}}$$

تمرین: اگر u، v دو تابع اسکالر باشند، ثابت کنید

$$\nabla^2(uv) = \nabla^2 u + \nabla^2 v + 2\,\vec{\nabla} u\cdot\vec{\nabla} v$$

تمرین: اگر $\psi = x^2yz$ و $\phi = xy - z^2$ باشد، ثابت کنید

$\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\psi$ سیم لوله‌ای (Solenoidal) است یعنی

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

تمرین: اگر بردار $\vec{A}$ برابر $\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)$ باشد

الف_ ثابت کنید $\vec{A}$ غیر چرخشی است یعنی $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

ب_ ثابت کنید اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ غیر چرخشی باشند، آن گاه $\vec{A}\times\vec{B}$

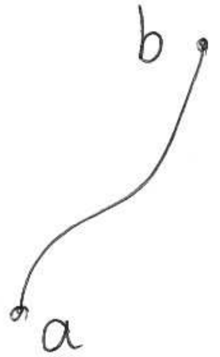
سیم لوله‌ای است یعنی $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$

حساب انتگرال:

انتگرال خطی: اگر مسیر بسته باشد، انتگرال را با $\oint \vec{V}\cdot d\vec{l}$ نشان می‌دهیم.

در هر المان مسیر، حاصل ضرب داخلی $\vec{V}$ در بردار $d\vec{l}$ را حساب می‌کنیم.

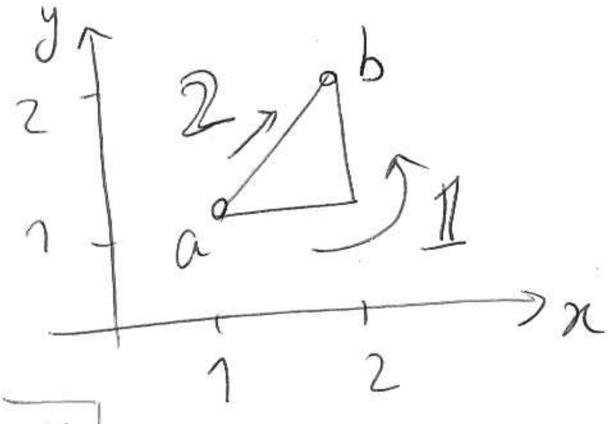
در حالت کلی انتگرال به مسیر طی شده بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بستگی دارد:



در برخی حالت‌ها مقدار انتگرال مستقل از مسیر است.

مثال: مقایسه انتگرال از دو مسیر

$$\vec{V} = y^2\,\hat{x} + 2x(y+1)\,\hat{y}$$



1: افقی: $d\vec{l} = dx\,\hat{x}$

عمودی: $d\vec{l} = dy\,\hat{y}$

$$\int_{1} \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_{[1,1]}^{[2,1]} y^2\,dx + \int_{[2,1]}^{[2,2]} 2x(y+1)\,dy = \boxed{11}$$

$(y=x)$

2: $d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} \Rightarrow \vec{V}\cdot d\vec{l} = x^2\,dx + 2x(x+1)\,dx$

$$\Rightarrow \int_{2} \vec{V}\cdot d\vec{l} = \boxed{10}$$

انتگرال حجمی

$$\int_V \psi \, d\tau \quad , \quad d\tau = dx\,dy\,dz$$

ψ → اسکالر

$$\int_V \vec{F} \, d\tau = \hat{x}\left(\int F_x \, d\tau\right) + \hat{y}\left(\int F_y \, d\tau\right) + \hat{z}\left(\int F_z \, d\tau\right)$$

$\vec{F}$ → بردار

قضیه اساسی حساب انتگرال

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx}\right) dx = f(b) - f(a)$$

یعنی تفاضل تابع f در دو نقطه با جمع روی تعداد زیادی از f' برابر است؛ با انتگرال مشتق تابع بین آن دو نقطه برابر است.

قضیه اساسی گرادیان

$$dT_1 = (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{dl}_1$$

$$dT_2 = (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{dl}_2$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{dl} = T(\vec{b}) - T(\vec{a})$$

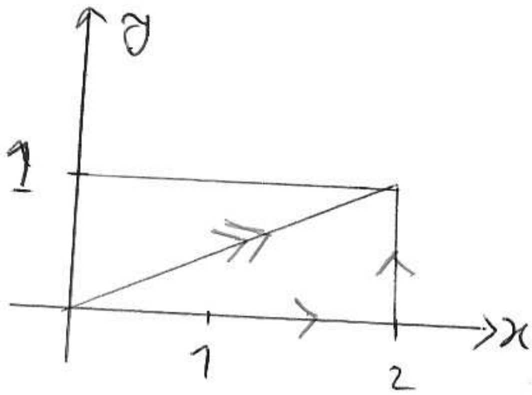
یعنی انتگرال گرادیان تابع روی یک منحنی با مقدار تابع در مرز منحنی داده می‌شود.

$$\boxed{\oint (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{dl} = 0}$$

نکته مهم: انتگرال یک گرادیان به مسیر انتگرال گیری بستگی ندارد:

مثال: محاسبه انتگرال روی دو مسیر مختلف

$$T = x y^2$$



$$\Rightarrow \vec{\nabla} T = y^2 \hat{x} + 2xy \hat{y}$$

مسیر اول: ابتدا در راستای $\hat{x}$ و سپس در راستای $\hat{y}$

① $y = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} T \cdot \vec{dl} = y^2 dx = 0$

② $x = 2 \Rightarrow \vec{\nabla} T \cdot \vec{dl} = 4y\, dy \Rightarrow \boxed{\int_{y=0}^{y=1} \nabla T \cdot dl = 2}$

مسیر دوم: در امتداد خط $y = \frac{1}{2} x$

$$dy = \frac{1}{2} dx \Rightarrow \vec{\nabla} T \cdot \vec{dl} = y^2 dx + 2xy\, dy = \frac{3}{4} x^2 dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{[0,0]}^{[2,1]} \vec{\nabla} T \cdot \vec{dl} = 2}$$

قضیه انتگرال

$$\boxed{T(\vec{b}) - T(\vec{a}) = 2 - 0 = 2}$$

قضیه اساسی دیورژانس

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\, d\tau = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$$

انتگرال دیورژانس یک میدان برداری روی حجم معلوم فقط به سطحی که آن را محصور کرده است، بستگی دارد.

مثال: محاسبه انتگرال میدان برداری $\vec{A}$ روی مکعب واحد

$$\vec{A} = y^2\,\hat{x} + (2xy + z^2)\,\hat{y} + (2yz)\,\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 2(x+y)$$

$$\int (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\, d\tau = 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} + y\right) dy\, dz = 2\int dz = 2$$

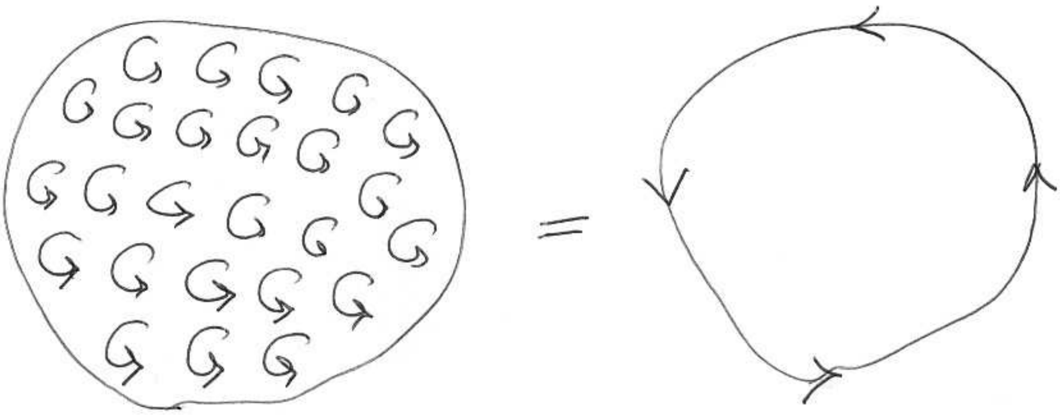
قضیه استوکس یا قضیه اساسی کرل

$$\text{Circulation} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

انتگرال کرل یک میدان برداری فقط به مقادیر مرزی بستگی دارد.

مثال : قانون آمپر

کرل چرخش یک میدان است مثل یک گردباد یا گرداب. شار چرخش میدان روی سطح برابر گردش کل است که می توان از روی مرزها بدست آورد.



انتگرال جزء به جزء

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\,\frac{dg}{dx} + g\,\frac{df}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{d}{dx}(fg)\,dx = fg\Big|_a^b = \int_a^b f\left(\frac{dg}{dx}\right)dx + \int_a^b g\left(\frac{df}{dx}\right)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f\left(\frac{dg}{dx}\right)dx = fg\Big|_a^b - \int g\left(\frac{df}{dx}\right)dx}$$

مثال:

$$\int_0^\infty \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^{-x}}_{g'}\,dx = ? \qquad e^{-x} = \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\right)$$

$$= -x e^{-x}\Big|_0^\infty - \int g f' \, dx = -x e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

مثال:

$$\nabla\cdot(f\vec{A}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{\nabla} f\cdot\vec{A}$$

$$\int_V \nabla\cdot(f\vec{A})\,d\tau = \boxed{\int f(\nabla\cdot A)\,d\tau + \int \vec{A}\cdot\vec{\nabla} f\,d\tau} \quad \mathrm{I}$$

از قضیه دیورژانس می‌دانیم:

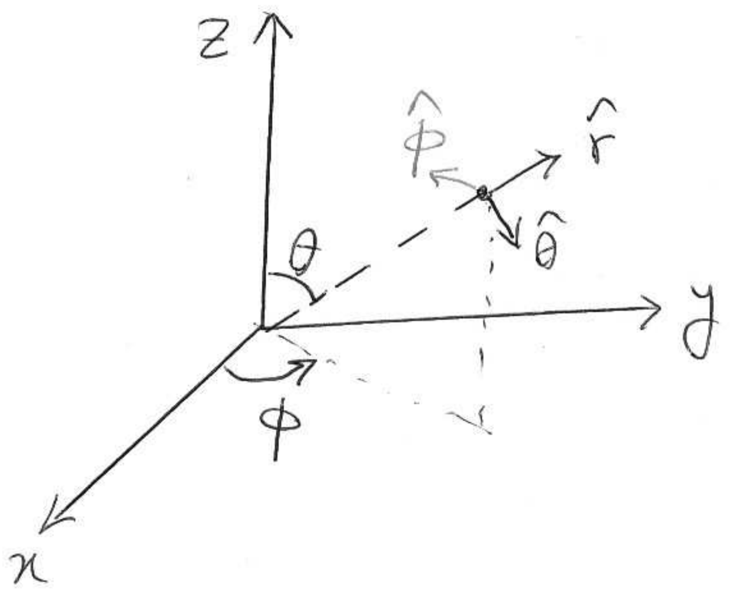
$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\,d\tau = \oint_S \vec{B}\cdot\vec{da} \Rightarrow$$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})\,d\tau = \boxed{\oint (f\vec{A})\cdot\vec{da}} \quad \mathrm{II}$$

$$(\mathrm{I}), (\mathrm{II}) \Longrightarrow \boxed{\int_V f(\vec{\nabla}\cdot A)\,d\tau = -\int_V (\vec{A}\cdot\vec{\nabla} f)\,d\tau + \oint_S f\vec{A}\cdot da}$$

دستگاه مختصات کروی

در دستگاه کروی با بردارهای یکه $\hat{r}$، $\hat{\theta}$، $\hat{\phi}$ سروکار داریم. دقت کنید که برخلاف $\hat{x}$، $\hat{y}$، $\hat{z}$، بردارهای واحد جدید تابع مکان هستند یعنی هر سه آنها تابع θ، ϕ هستند.



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

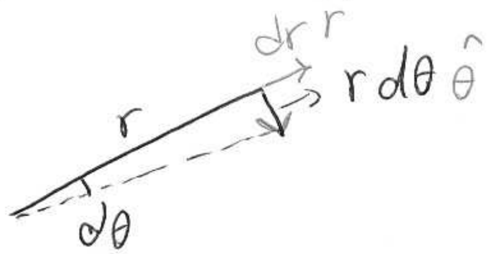
$$\begin{cases} \hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{cases}$$

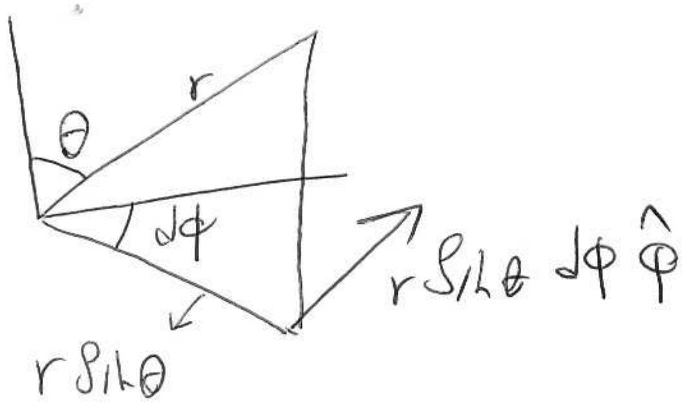
بردارهای واحد برهم عمودند.

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = \hat{r}\cdot\hat{\phi} = \hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = 0$$

$$\begin{cases} * \;\; \dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta} \;,\quad \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{r} \;,\quad \dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial\theta} = 0 \\ * \;\; \dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta\,\hat{\phi} \;,\quad \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi} = \cos\theta\,\hat{\phi} \;,\quad \dfrac{\partial\hat{\phi}}{\partial\phi} = -\left[\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}\right] \end{cases}$$

المان طول در دستگاه کروی





$$\boxed{\vec{dl} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}}$$

المان سطح :

$$\boxed{da:\ r\,dr\,d\theta\,,\ r\sin\theta\,dr\,d\phi\,,\ r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi}$$

المان حجم :

$$\boxed{d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

$$r\in[0,\infty)\ ;\quad \theta\in[0,\pi]\ ;\quad \phi\in[0,2\pi]$$

گرادیان در دستگاه کروی

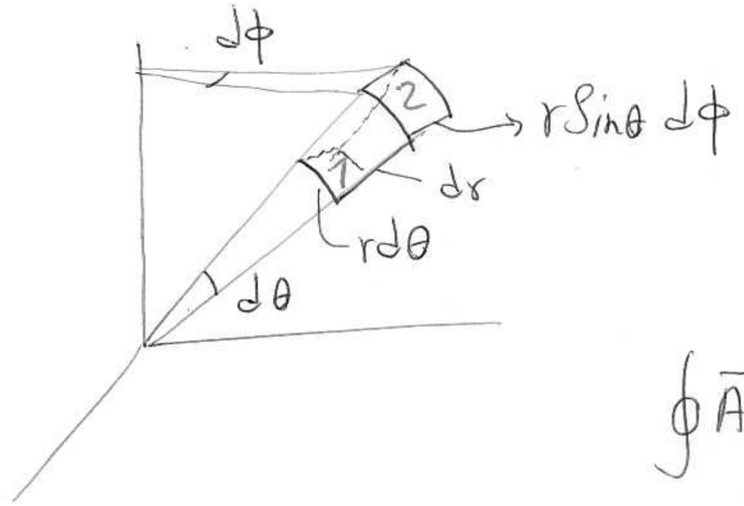
$$\vec{\nabla}T = \partial_x T\,\hat{x} + \partial_y T\,\hat{y} + \partial_z T\,\hat{z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ ;\quad \sin\theta = \frac{z}{r}\ ;\quad tg\,\phi = \frac{y}{x}\ ;$$

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}T = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)\hat{\phi}}$$



دیورژانس در دستگاه کروی

از قضیه دیورژانس داریم :

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d\tau$$

که در حد حجم یک المان کوچک برابر $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})d\tau$ می باشد.

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\oint \vec{A}\cdot d\vec{a}$$

المان حجم در دستگاه کروی $\quad d\tau = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

آن طور که در شکل بالا و نیز شکل A.2 کتاب دیده می شود، باید شار کمیت $\vec{A}$ را روی شش المان سطح محاسبه کنیم :

$$r\,dr\,d\theta\,\hat{\phi},\quad r\sin\theta\, dr\, d\phi\,\hat{\theta},\quad r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{r}$$

---

2 , 1 شار عبوری از دو سطح $= -r^2\sin\theta\, A_r\, d\theta\, d\phi\Big|_1 + r^2\sin\theta\, A_r\, d\theta\, d\phi\Big|_2$

$$= d\left[r^2\sin\theta\, A_r\, d\theta\, d\phi\right]_{1,2}$$

دقت کنید که باید دیفرانسیل را برای $(r^2 \sin\theta\, A_r)$ حساب کنیم نه A_r.

$$\text{شار جبه‌های } 1,2 = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta\, A_r)\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$\text{شار جبه‌های } 3,4 = \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta\, A_\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$\text{شار جبه‌های } 5,6 = \frac{\partial}{\partial \phi}(r A_\phi)\, dr\, d\theta\, d\phi$$

برای محاسبهٔ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ باید حاصل جمع تمام شارها را بر $d\tau$ تقسیم کنیم.

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2 \cancel{\sin\theta}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r \cancel{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r^{\cancel{2}}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\cancel{r}\sin\theta\, A_\theta)$$

$$+ \frac{1}{r^{\cancel{2}}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\cancel{r} A_\phi) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}}$$

راه دوم: می‌توان بطور مستقیم با عملگر $\vec{\nabla} = \partial_r \hat{r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\partial_\theta + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\partial_\phi$

ضرب داخلی $\vec{\nabla}$ با بردار $\vec{A}$ را محاسبه کرد. دقت کنید که در این حالت باید

به مشتق بردارهای یکه $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ نسبت به θ, ϕ توجه کنید.

کرل در دستگاه کروی :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\phi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ B_r & rB_\theta & r\sin\theta\, B_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(B_\phi \sin\theta\right) - \frac{\partial B_\theta}{\partial\phi}\right]$$

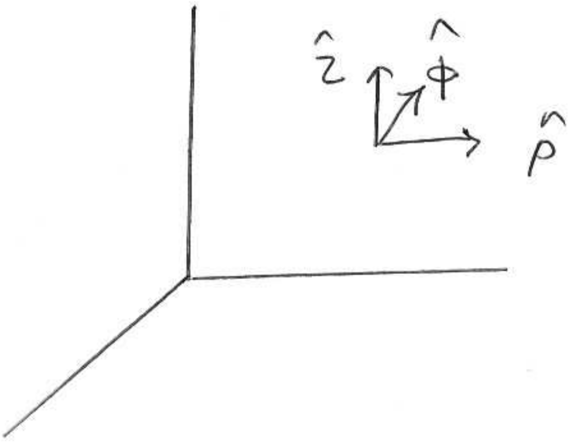
$$+ \frac{\hat{\theta}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\phi\right)\right]$$

$$+ \frac{\hat{\phi}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\theta\right) - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right]$$

لاپلاسی در دستگاه کروی :

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای:



$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \\ y = \rho \sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\rho} = \cos\phi\, \hat{x} + \sin\phi\, \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi\, \hat{x} + \cos\phi\, \hat{y} \end{cases}$$

المان طول $\vec{dl} = d\rho\, \hat{\rho} + \rho\, d\phi\, \hat{\phi} + dz\, \hat{z}$

المان حجم $d\tau = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$

محدودهٔ ρ از صفر تا بی‌نهایت و محدودهٔ ϕ از صفر تا 2π پارامتر است.

در دستگاه استوانه‌ای، $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ تابع ϕ هستند.

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} = \hat{\phi} \quad , \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\hat{\rho}$$

گرادیان :

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\hat{z}$$

دیورژانس :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}B_z$$

کرل :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ B_\rho & \rho B_\varphi & B_z \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\varphi) - \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

لاپلاسی :

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

مثال: با توجه به تعریف x, y, z برحسب r, θ, ϕ در دستگاه کروی ،

الف : روابط زیر را اثبات کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin\theta \cos\phi \, \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \, \hat{y} + \cos\theta \, \hat{z} \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta \cos\phi \, \hat{x} + r\cos\theta \sin\phi \, \hat{y} - r\sin\theta \, \hat{z} \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r\sin\theta \sin\phi \, \hat{x} + r\sin\theta \cos\phi \, \hat{y} \end{cases}$$

ب: ثابت کنید بردارهای $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}$ ، $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ ، $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ دو بدو بر هم عمودند.

الف:

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\hat{z}$$

$$= \boxed{\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}}$$

دو رابطه دیگر به شکل مشابه اثبات می‌شوند.

ب:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right) = r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi - r\sin\theta\cos\theta$$

$$= r\sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta \boxed{= 0}$$

تابع دلتای دیراک :

هنگام مطالعه دیورژانس تابعی نظیر $\vec{B} = \frac{\hat{r}}{r^2}$ ، غیراز مبداء برای سایر نقاط داریم :

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{1}{r^2}\right) = 0$$

اما در نزدیکی مبداء چطور ؟

قضیه دیورژانس را در کره کوچکی به شعاع R درنظر بگیرید .

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{da} = \int \left(\frac{1}{R^2}\right)\hat{r} \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$$

$$= \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) = \boxed{4\pi}$$

هیچ تابع معمولی این ویژگی را ندارد که همه جا صفر ودر مبداء غیرصفر باشد . توابع فیزیکی مثل چگال جرم ، بار ، ... برای یک ذره چنین هستند. این تابع، دلتای دیراک نام دارد. می توان تابع دلتای دیراک را شبیه یک تابع گاوسی بی نهایت باریک درنظر گرفت .

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

در نتیجه اگر $f(x)$ یک تابع معمولی باشد،

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)}$$

حال، ثابت کنید برای هر $k \neq 0$ داریم: $\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)$

اثبات،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(kx)\,dx \xrightarrow{y = kx \Rightarrow dx = dy/k}$$

$$= \int f\left(\frac{y}{k}\right)\delta(y)\frac{dy}{k} = \pm\frac{1}{k}f(0) = \frac{1}{|k|}f(0)$$

اگر k مثبت باشد، انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ است و اگر منفی باشد برعکس. پس در هر دو حالت جواب $\frac{1}{|k|}$ خواهد بود.

$$\Rightarrow \int f(x)\,\delta(kx)\,dx = \int f(x)\left[\frac{1}{|k|}\delta(x)\right]dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)}$$

تابع دلتای دیراک را می‌توان مشتق تابع پله در نظر گرفت،

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$$

تابع دلتای سه بُعدی :

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$\int_{\text{کل فضا}} \delta^3(\vec{r})\, d\tau = \iiint \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\, dx\, dy\, dz = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(\vec{r})\, \delta^3(\vec{r}-\vec{a})\, d\tau = f(\vec{a})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\, \delta^3(\vec{r})} \quad \text{یا} \quad \boxed{\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = 4\pi\, \delta^3(\vec{\mathscr{r}})}$$

دقت کنید که $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$ و مشتق گیری نسبت به $\vec{r}$ انجام می‌شود.

$$\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = -\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) = -4\pi\, \delta^3(\vec{\mathscr{r}})}$$

تمرین ، ثابت کنید

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

تمرین : ثابت کنید

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(2\pi\alpha x)}{\pi x}$$

یک تابع

دلتای دیراک است .

نظریه میدانهای برداری:

در نظریه ماکسول با دیورژانس و کرل $\vec{E}$ و $\vec{B}$ سروکار داریم.

آیا می‌توان با دانستن کرل و دیورژانس یک تابع آن را بدست آورد؟

فرض کنید

$$\nabla\cdot\vec{F} = D \,, \quad \nabla\times\vec{F} = \vec{C} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{C} = 0$$

آیا با این معلومات می‌توان $\vec{F}$ را تعیین کرد؟

بدون شرایط مرزی نمی‌توان تابع $\vec{F}$ را بطور یکتا بدست آورد. برای مثال یک شرایط مرزی متعارف در الکترومغناطیس آن است که میدانها در بی‌نهایت صفر شوند.

با دانستن شرایط مرزی، قضیه هلمهولتز یکتایی $\vec{F}$ را تضمین می‌کند.

$$\vec{F} = \underbrace{-\nabla U}_{\text{بدون چرخش}} + \underbrace{\nabla\times\vec{W}}_{\text{بدون دیورژانس}}$$

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{D(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, d\tau' \\[2ex] \vec{W} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{C}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, d\tau' \end{cases}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = -\nabla^2 U = D(\vec{r})$$

$$\nabla\times\vec{F} = \nabla\times(\nabla\times\vec{W}) = -\nabla^2 W + \cancelto{0}{\nabla(\nabla\cdot\vec{W})} = \vec{C}(\vec{r})$$

چرا جمله دوم صفر است؟

$$4\pi\, \nabla\cdot\vec{W} = \int \vec{C}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)d\tau'$$

طبق تعریف

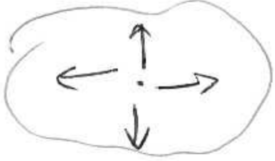
$$= -\int \vec{C}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)d\tau' = \int \frac{1}{\mathscr{r}}\cancel{(\nabla'\cdot\vec{C})}\,d\tau' - \oint \frac{1}{\mathscr{r}}\vec{C}\cdot d\vec{a}$$

اگر در حد بی‌نهایت $\vec{C}$ به‌قدر کافی سریع افت کند، جمله دوم نیز صفر است.

برای همگرایی انتگرال‌ها لازم است که دیورژانس و کرل $\vec{F}$ سریع‌تر از $\frac{1}{r^2}$ به‌سمت صفر میل کنند.

پتانسیل: اگر کرل یک میدان برداری صفر باشد، می‌توان آن را برحسب گرادیان یک میدان اسکالر نوشت.

$$\nabla\times\vec{F}=0 \iff \vec{F}=-\nabla\psi$$



در میدان‌های بدون چرخش، این چهار شرط هم‌ارز هستند:

a) $\nabla\times\vec{F}=0$

b) $\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} =$ مستقل از مسیر

c) $\oint \vec{F}\cdot d\vec{l}=0$

d) $\vec{F}=-\nabla\psi$

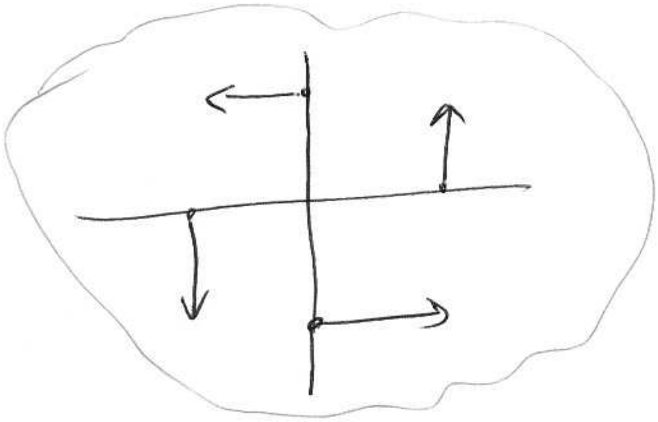
دقت کنید پتانسیل ψ یکتا نیست و می‌توان مقدار ثابتی به آن افزود.

در میدان‌های بدون دیورژانس :

a) $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

b) $\int \vec{F} \cdot \vec{da} =$ مستقل از سطح و فقط تابع مرز

c) $\oint \vec{F} \cdot \vec{da} = 0$



d) $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$

پتانسیل برداری یک مقدار نیست و می‌توان گرادیان هر میدان اسکالر را به آن افزود، چون کرل یک گرادیان همواره صفر است.

در حالت کلی هر میدان برداری را می‌توان به یک بخش بدون چرخش و یک بخش بدون دیورژانس تجزیه کرد.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\psi + \nabla \times \vec{A}$$