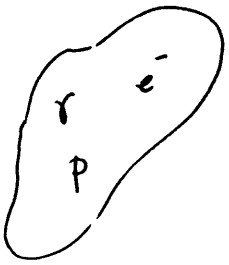
کیهان‌شناسی جلسه ۱۰ - ۸۷/۱۱/۲۴

در زمانی که دمای کیهان کاهش یابد و دمای آن از درجه eV باشد تعادل ترمودینامیکی بین ذرات بهم می‌خورد و ذرات باهم به صورت زیر ترکیب می‌شوند.



$$p^+ + e^- \longrightarrow H + \gamma$$

معادله ساها: (پتانسیل شیمیایی)

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H$$

برای پرده‌ای تابع توزیع بولتزمان به صورت زیر نوشته می‌شود

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-E-\mu}{T}}$$

$$\ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right)\left(\frac{2\pi}{m_i T}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{-E-\mu}{T}$$

انرژی که در این واکنش به صورت فوتون آزاد می‌شود

$$E_p + E_e - E_H = Q$$

برای اتم هیدروژن

$$Q = 13.6\ eV$$

χ: نسبت الکترون به کل ذرات موجود

$$\chi_e = \frac{n_e}{n} = \frac{n_p}{n}$$

معادله ساها به صورت

$$\frac{1-\chi_e}{\chi_e^2} = \eta \left(\frac{T}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} e^{Q/T}$$

$$\eta = 2.68 \times 10^{-8}\ \Omega_b h^2$$

تمرین: معادله ساها را به دست آورید.

در این صورت تمام محیط تبدیل به هیدروژن خنثی می‌شود

در نتیجه $\chi_e \to 0$

اگر $T \ll Q$ $\Rightarrow$

$T \ll m_e$

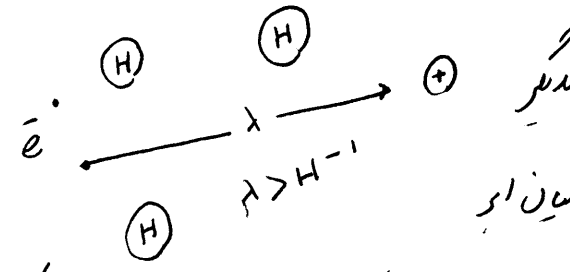
برای $T \sim m_e$ آنگاه $\frac{1-\chi_e}{\chi_e^2} = \eta e^{\frac{13.6}{10^6}} \sim \eta$.

در نتیجه $\chi_e = 1 - 10^{-8}$

$$\frac{1-\chi_e}{\chi_e^2} \sim 10^{-8}$$

- در جهان برخی از یون‌ها در فاصله‌ای بیشتر از H^{-1} از همدیگر قرار می‌گیرند و با هم نمی‌توانند اتم هیدروژن تشکیل دهند

در نتیجه در کیهان همواره مقداری یون آزاد وجود دارد



- هنگامی که الکترون به سمت پروتون حرکت می‌کند، این دو ذره با همدیگر برهم‌کنش الکترومغناطیسی انجام می‌دهند. حال اگر پروتون از میان ابر الکترونی عبور کند این دو با هم برهم‌کنش خواهند داشت و تشکیل اتم هیدروژن می‌دهند. منظور از ابر الکترونی همان موج دوبروی است. حال می‌خواهیم کل سطح برهم‌کنش را حساب کنیم.

طول موج دوبروی $\lambda = \frac{\hbar}{p}$

$\sigma = \pi \lambda^2 \sim \pi \hbar^2 p^{-2}$

$l = (n_e \sigma)^{-1} = (n_b \chi_e \sigma)^{-1}$

حد بالای طول برهم‌کنش

از طرف دیگر $\chi_e = \eta^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{T}{m_e}\right)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{Q}{2T}}$

$n_b = \frac{\rho_b}{m_b} = \frac{3}{8\pi G m_b} H^2 = \frac{\rho_b^{(0)}}{m_p} (1+z)^3$ *

$\sigma = \pi \hbar^2 p^{-2}$

$\rightarrow \sigma = \frac{\pi \hbar^2}{2m_e \frac{p^2}{2m_e}} = \frac{\pi \hbar^2}{2 m_e K T_e}$ (1) ; $(1+z) = \frac{T_\gamma}{T_\gamma^{(0)}}$ **

*, ** $\rightarrow$ $n_b = \frac{T^3}{T^{(0)3}} \frac{3H_0^2}{8\pi G m_p}$ (2)

حال با استفاده از (1), (2) $\rightarrow$

$l \sim n_b^{-1} \chi_e^{-1} \sigma^{-1}$

$\rightarrow l \sim T^{-5/4} e^{Q/2T}$

$\begin{cases} \sigma^{-1} \sim T \\ \chi_e^{-1} \sim T^{3/4} e^{Q/2T} \\ n_b^{-1} \sim T^{-3} \end{cases}$

3

$l \sim T^{-5/4} e^{Q/2T}$

اگر دما را کاهش دهیم طبق رابطه روبرو طول پویش آزاد میانگین

الکترون‌ها بیشتر خواهد شد در نتیجه الکترون‌ها، پروتون‌ها را نخواهند دید. در کیهان الکترون‌ها با سرعت پایین

حرکت می‌کنند $v = 10^{-3} c$. در نتیجه در تمام طول عمر عالم در حدود 10^{-3} برابر طول افق حرکت می‌کند.

$$H^2 \sim \rho \sim T^3 \xrightarrow[\text{در نتیجه}]{} H \sim T^{3/2} \rightarrow H^{-1} \sim T^{-3/2}$$

اگر عالم را تخت در نظر بگیریم، $\Omega_b = 0.04$ ، $\Omega = 1$ دمای رادیکتیو

$l > H^{-1}$

الکترون پروتون به صورت ریز بدست می‌آید.

$T = 0.24 eV$

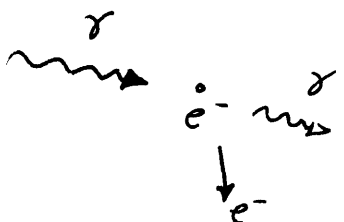
- اگر کیهان‌شناسان در فضای خیلی گذشته‌ای برابر $z = 10^3$ (CMB) تا $z = 10$ دوران تاریکی کیهان می‌گویند.

از احتمال پیدا کردن یک اتم هیدروژن بسیار کم است ولی با تعداد زیادی یون پیدا خواهیم کرد این پدیده را "reionization" می‌نامند

$1 eV = 1.6 \times 10^4$ Kelvin

$T_{e-p \text{ decoupling}} = 0.26 eV = 4000 K$ کمی سردتر از سطح خورشید

□ تراکنش کامپتون: برخورد فوتون پرانرژی با الکترون ساکن



$l = (n_e \sigma_T)^{-1} = H^{-1}$

↓

سطح تشتت تامسون

$l = (n_b X_e \sigma_T)^{-1}$

* تمرین: سطح تشتت تامسون را بدست آورید.

با توجه به دمای واخیتدگی الکترون - پروتون :

$$\frac{T}{T_0} = (1+z) = \frac{4000}{2.7} \simeq 1500$$

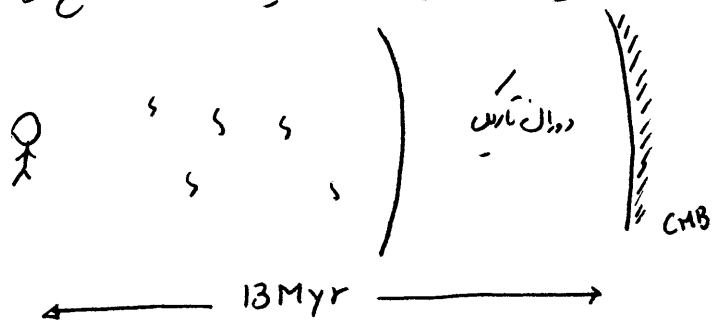
دمای واخیتدگی e^-, γ باید به صورتی به دست آید که انتقال به سمت قرمز مربوط به $z = 1100$ باشد.

- به هم خوردن تعادل پروتون های سنگین با الکترون ها $\sim 5eV$

- واخیتدگی e^-, p^+ و یونیدگی شعر کیهان $\sim 0.26\ eV$

- واخیتدگی e^-, γ دمای کنونی $\sim 0.26eV$

پس از واخیتدگی e^-, γ به کیهانی دست یافتیم که آن از بین می رود یعنی دیدن اشیاء نورانی تر واضح تر شده است.

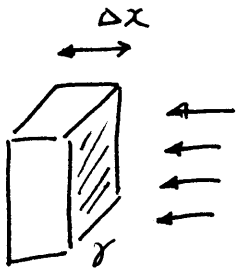


فوتون هایی که از این دوران به ما می رسند به نام CMB معروفند

Cosmic Microwave Background Radiation

- τ را طوری تعریف می کنیم که برای $\tau = 1$ همه فوتون ها پراکنده شوند و برای $\tau = 0$ هیچ فوتونی پراکنده نشده باشد.

$$d\tau = \frac{\text{نسبت فوتون های پراکنده شده}}{\text{کل فوتون ها}}$$



$$\tau = \int_0^1 d\tau$$

$$d\tau = \frac{n_e \cdot A\,\Delta x\,\sigma_T}{A} \rightarrow d\tau = n_e \sigma_T\, dx$$

$$\tau = \int n_b x_e \sigma_\tau\, dx$$

5.

$$\tau = \int n_b \chi_e \sigma_T \, d\chi$$

$$-\int n_b \chi_e \sigma_T \, a \frac{d\chi}{dz} dz = \int \frac{n_b \chi_e \sigma_T \, a}{H(z)} dz$$

χ: فاصله همراه

$$\frac{d\chi}{dz} \equiv H^{-1}$$

$$\tau(z) = \sigma_T \int \frac{\rho_B^{(0)}}{m_p} \cdot \frac{\chi_e (1+z)^3}{(1+z) H(z)} dz$$

تمرین: انتگرال بالا را حل کنید.

Δz مربوط به CMB را بدست آورید.

$$\tau(z) = \frac{\sigma_T}{m_p} \rho_B^{(0)} \int \frac{\chi_e(z) (1+z)^2 dz}{H(z)}$$

$$\tau(z) = \frac{\sigma_T \Omega_B \rho_c^{(0)}}{m_p} \int \frac{\chi_e (z) (1+z)^2 dz}{H_0 \Omega_m^{1/2} (1+z)^{3/2}}$$

$$\tau(z) = \frac{\sigma_T}{m_p} \frac{\Omega_B}{\Omega_m^{1/2}} \frac{\rho_c^{(0)}}{H_0} c \int \chi(z) (1+z)^{\frac{1}{2}} dz$$