بسمه

روش‌های حجم کنترل _ معرفی و مقدمات

به جای مقدمه _ حداقل از دو زاویه می‌توان به این مسأله حمله کرد:

① رویکرد "اختراع زاییده احتیاج است"، به عنوان رویکردی انگیزشی

② رویکرد "جادوی انتگرال"، به عنوان رویکردی نظاره‌ای یا این‌چنانی

① در این رویکرد تقابلی، به احتیاجاتی می‌پردازیم که نه روش‌های FDM و نه روش‌های FEM توان اجابت آنها را ندارند. مثلاً:

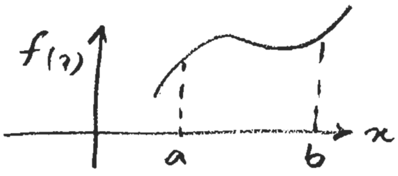
- دستگاه معادلات PDE
- وجود معادلات جبری زیاد (High Index DAE)
- مسائل چندفیزیکی (Multiphysics)
- مسائل چندفازی به ویژه حضور فاز پراکنده
- جریان‌های راکتیو
- فقدان قابلیت کنترل خطای عددی یا فقدان خطاکش صریح یا فیزیکی برای مانیتورینگ خطای عددی

② در دنیای سیال اندیشه معمولاً به خاطراتی شیرین برمی‌خوریم که مدت‌ها در ذهن باقی می‌مانند و در قصارتی و صورت‌های متکثر به صورتی نظاره‌ای و این‌چنانی در ذهن افاده معنی می‌کنند تا با کمی پردازش و دستکاری بتوان معانی انتزاعی را برای یک مسأله و صورت جدید به کار بست. به چند نمونه از این خاطرات توجه کنید:

الف) توصیف تاریخی انتگرال (مساحت سطح زیر منحنی)

فرض کنید در زمان قبل از لایب‌نیتز (و نیوتن) قرار داریم،

مطلوب است مساحت سطح زیر منحنی پیوسته $f(x)$،



آیا می‌توان سطح زیر منحنی را به یک مشخصه‌ای از $f(x)$ ربط داد یا فرمول‌بندی کرد؟
مثلاً با مشتق مرتبه دوم آن کار کنیم یا از مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ استفاده کنیم یا ...

راه حل عملی: گسسته سازی سطح زیر منحنی و تقریب سطوح ریزتر و شکسته شده با عرض Δx و طول $f(x_i)$ و سپس جمع زدن آنهاست، هرچه تعداد تقسیمات بیشتر، خطای کمتر. به دنبال فرمولاسیون ریاضی آن برای حالت پیوسته، محاسبه حد مجموع سری بی‌نهایت زیر می‌باشد:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x_i)\Delta x$$

هدف لایب‌نیتز ارائه راهی بود که به طور کلی حد بی‌نهایت بالا را فرموله کرد:

$$S = F(b) - F(a)$$

به طوری که

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

از این نقطه به بعد، به F می‌گویند تابع اولیه یا انتگرال نامعین و برای محاسبه سطح زیر منحنی، تعریف انتگرال معین ارائه شد:

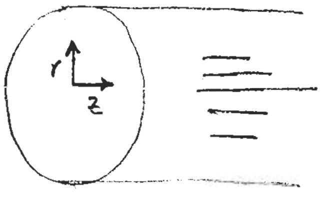
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

ب) مفهوم متوسط‌گیری: آیا برای متوسط‌گیری یک کمیت فیزیکی، باید الزاماً از فیزیک بهره گرفت؟

(lumping)

پاسخ: نه! می‌توان از انتگرال معین کمک گرفت کاملاً صرف ریاضی بهره گرفت.

مثال: مطلوبست محاسبه سرعت متوسط در جریان لامینار و ویسکوز:



$$v_z = v_z(r) = \text{پروفیل سهموی}$$

* راه حل فیزیکی: سرعت خطی نوعاً مخصوص مکانیک جامدات و دبی جریان نوعاً مخصوص مکانیک سیالات است. رابطه بین این دو به صورت زیر است:

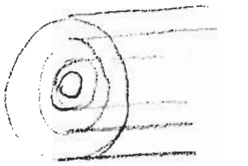
$$Q = uA$$

از طرفی می‌دانیم توزیع سرعت داریم، یعنی با یک مقدار از u مواجه نیستیم و اگر با یک مقدار کوالیتی روبرو باشیم، مجبور به استفاده از متوسط هستیم یعنی

$$Q = v_{z,avg} \cdot A = v_{z,avg} \times \pi \frac{D^2}{4}$$

حال طبق رابطه اخیر، اگر بخواهیم $v_{z,avg}$ را حساب کنیم باید Q را با استفاده از پروفیل $v_z(r)$ حساب کنیم (چرا که Q یعنی دبی، تنها کمیت ذاتی فرآیند است و می‌توان آن را مدل کرد یا محاسبه کرد! فانهم)

برای این کار، فرض می‌کنیم Q (تنها پارامتر دیگر) متشکل از چند ΔQ یعنی دبی‌های زیر لوله‌ها با غلاف‌های (annulus) فرضی است که در هر غلاف مقدار سرعت با شعاع تعریف می‌شود:

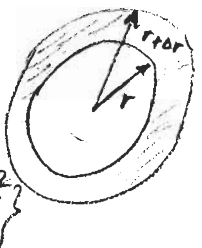


$$\Delta Q = \overset{\text{تغییر}}{v_z\Big|_r} \cdot \Delta A \rightarrow \text{حدگیری} \rightarrow dQ = v_z(r)\,dA$$

سپس جمع زدن یا در حالت حدی <u>انتگرال‌گیری</u>:

$$\int dQ = \int v_z\,dA = \int v_z(r)\,2\pi r\,dr = 2\pi \int v_z\, r\,dr$$

$$\Delta A = \text{سطح واشر مانند} = A\Big|_{r+\Delta r} - A\Big|_r$$



$$= \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi\left\{\cancel{r^2} + (\Delta r)^2 + 2r\Delta r - \cancel{r^2}\right\}$$

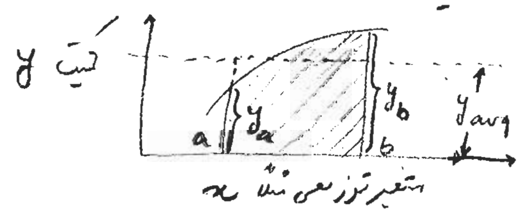
$$= \pi\left(2r\Delta r + (\Delta r)^2\right) \rightarrow \text{حدگیری} \rightarrow dA = 2\pi r\,dr$$

از نظر حدی، $(\Delta r)^2$ در برابر Δr، ناچیز یا صفر است.

$$\rightarrow \begin{cases} Q = 2\pi \int v_z(r) \times r\,dr & (\text{محاسباتی}) \\ Q = v_{z,avg}\,\pi R^2 & (\text{تعریف}) \end{cases} \rightarrow 2\pi \int v_z(r)\,r\,dr = v_{z,avg}\,\pi R^2$$

$$\boxed{\rightarrow v_{z,avg} = \frac{2\cancel{\pi}\int v_z(r)\,r\,dr}{\cancel{\pi}R^2} = \frac{2\int v_z(r)\,r\,dr}{R^2}}$$

* راه حل ریاضی: از تعریف یا <u>خانواده</u> سطح زیر منحنی داریم:



مساحت زیر منحنی یا S با $\int_a^b y\,dx$ معلوم می‌شود، چه آنکه با شنیدن اسم <u>مساحت</u>، مفهوم مستطیل یا مثلث در ذهن متبادر می‌شود. اگر این S، بدون مساحت مستطیل (شکل) بود، می‌توان فرض کرد که طول (یا عرض) آن برابر $b-a$ بوده و عرض (یا طول) آن را y_{avg} یعنی یک متوسط (فرضی) بین دو عدد $f(a)$ و $f(b)$ فرض کرد یا تعبیر کرد! فانهم

به عبارتی دیگر:

$$S = S \rightarrow \int_a^b y\,dx = y_{avg} \times (b-a) \rightarrow$$

$$y_{avg} = \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a} = \frac{\int_a^b y\,dx}{\int_a^b dx} \xrightarrow{\text{تعمیم}} \boxed{y_{avg} = \frac{\int_\Omega y(\sigma)\,d\sigma}{\int_\Omega 1 \times d\sigma}}$$

(در حالت گسسته $\int$ به Σ تبدیل می‌شود و از نظر آماری همان معنی متوسط به ذهن متبادر می‌شود)

یعنی هرگونه متوسط‌گیری را به طور ریاضی (آماری) می‌توان به شکل بالا نمایش داد، تعمیم سرعت متوسط: (!)

$$v_{z,avg} = \frac{\int v_z(r)\,dA}{\int dA} = \frac{2\pi\int v_z(r)\,r\,dr}{A} = \frac{2\pi\int v_z(r)\,r\,dr}{\pi R^2}$$

یا متوسط حجمی دما

$$T_{avg} = \frac{\int T\,dV}{\int dV}$$

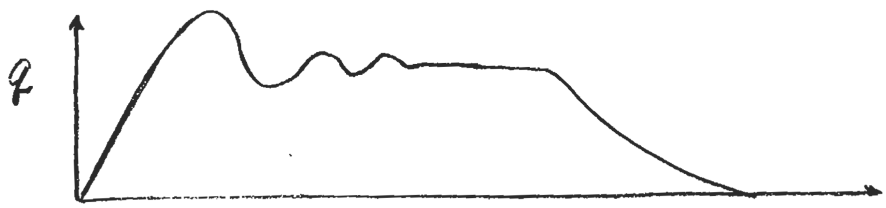
یا متوسط دمای توده در طول راکتور پیوسته:

$$T_{avg} = \frac{\int T\,dx}{\int dx} = \frac{\int T\,dx}{L}$$

یا ...

2) دبی تولیدی چاه نفت در برابر بازیافت تجمعی نفت

نمودار زیر یک منحنی نمونه از دبی تولیدی یک چاه نفت در طول عمر خودش می‌باشد

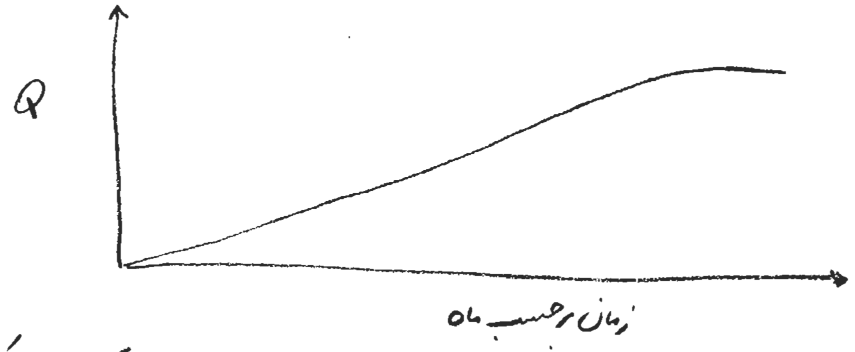


زمان برحسب ماه

به تغییرات توجه کنید و به یاد داشته باشید که q کمیتی شدتی (تغییراتی یا مشتقی) است.

Difference/Derivative, That's the problem. (Sadraa'pier)

حال به نمودار زیر که بازیافت تجمعی نفت یا به زبان ریاضی انتگرال q توجه کنید :

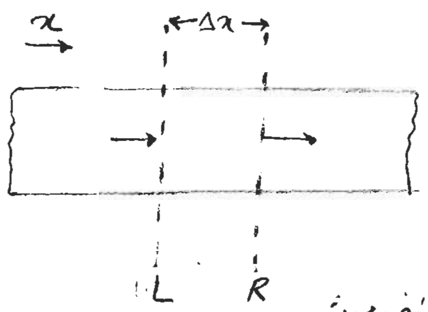


بازهم به تغییرات توجه کنید، خبری از نوسان نیست ! چرا که Q کمیتی تجمعی (خازنی یا انتگرالی) است.

Capacitance/Integration, That's the solution to the previous problem! (Annonymous)

د) مقایسه فرمولاسیون دیفرانسیلی با انتگرالی

یک مثال ساده انتقال حرارت هدایتی (دیفیوژن) یا با را در یک تیغه در نظر بگیرید، به طوری که در جهت محور تیغه سیستم توزیعی می‌باشد (distributed) و در دو بعد دیگر متوسط‌گیری شده (lumped) می‌باشد، سطح مقطع را A و ضریب هدایت حرارتی فوریه را $k(x)$ در نظر بگیرید. سپس یک پوسته (shell) نمونه دیفرانسیلی را در نظر بگیرید و به نامگذاری دقت کنید. (ترم منبع حرارتی در واحد حجم می‌باشد و بستگی به دما دارد)



کنترل حجم سیستم دارای ابعاد $A \times \Delta x$ بوده و فرض می‌شود از چپ به راست دما کاهش می‌یابد، یعنی فلاکس انرژی هم‌جهت با محور x می‌باشد، صفحه یا مرز ورود انرژی با نماد L و صفحه یا مرز خروج انرژی با R علامت‌گذاری شده است.

قانون عام : (بیلان انرژی) 0 = ورودی − خروجی + تولید

قانون خاص : (قانون هدایت فوریه) گرادیان دما $\propto$ فلوی جریان (یا فلاکس)

اگر در قانون عام و خاص مسأله را برای دستیابی به معادله حاکم پارامتریزه کنیم:

$$\begin{cases} 0=(qA)\big|_L-(qA)\big|_R+S(A\Delta x)\\ q=-k\dfrac{dT}{dx}\end{cases}\longrightarrow$$

اگر محل L را با x و R را با $x+\Delta x$ نمایش دهیم

آنگاه می‌توان حدگیری کرد تا به فرمولاسیون دیفرانسیلی برسیم:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0} \quad \text{یا} \quad \frac{dq}{dx}=S$$

تفسیر فرمولاسیون دیفرانسیلی: «گرادیان فلاکس انرژی برابر است با میزان تولید انرژی بر واحد حجم»

این تفسیر، مخصوص ریاضی‌دانان است که مسأله را طوری طرح می‌کنند که کسی نفهمد!

و حل

(نه ریاضی‌خوانان)

فرمولاسیون انتگرالی: اگر از حجم کنترل دیفرانسیلی انتگرال بگیریم:

$$\int_{\Delta V}\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dV+\int_{\Delta V}S\,dV=\left(kA\frac{dT}{dx}\right)_L-\left(kA\frac{dT}{dx}\right)_R+S\Delta V=0$$

یا اگر از حجم کنترل مسأله، انتگرال بگیریم:

$$\int_V\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dV+\int_V S\,dV=\left(kA\frac{dT}{dx}\right)_{x=0}-\left(kA\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}+\int S\,dV=0$$

به طوری که $dV=A\,dx$، چون A ثابت است

به نوعی فرق نمی‌کند، خواستیم با این حرکت، عمل lumping را با جادوی انتگرال انجام دهیم.

حال تنها فرقی که کرده تفسیر فیزیکی فرمولاسیون انتگرالی می‌باشد، (به عبارات دو سمت راست روابط اخیر مراجعه کنید:)

«مقدار خالص انرژی هدایت شده برابر است با میزان تولید انرژی.»

این تفسیر، مخصوص مهندسین است که مسأله را طوری حل می‌کنند که کسی نفهمد!

بسمه

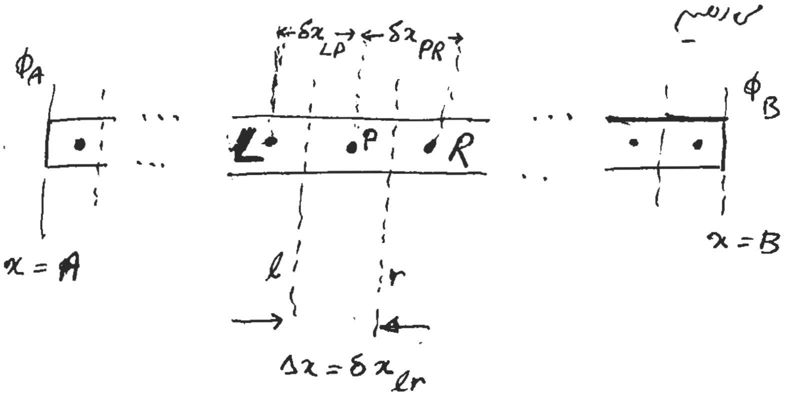
روش FVM برای مسئله پایای یک بعدی – دیفیوژن محض

یک مسئله ساده یک بعدی با کمیت انتقالی ϕ در حالت دیفیوژن (نفوذ) محض در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0 \qquad (1)$$

فرض می‌شود ضریب نفوذ و همچنین ترم چشمه/چاه غیرخطی باشند (مثلاً وابسته ϕ باشند). شرایط مرزی نیز به صورت دیریکله هستند.

تولید گرید – دامنه حل را در فاصله داده شده به شکل زیر گسسته کرده و نامگذاری با مشخصات زیر انجام می‌دهیم



فاصله مرزهای چپ و راست تا نقطه P (نقطه کانونی یا گره و مورد توجه ما) را به ترتیب با مقادیر δx_{lp} و δx_{pr} نمایش می‌دهیم. سطح مقطع ثابت مسئله را با A نمایش می‌دهیم.

گسسته‌سازی مکان – روش FVM، با فرمولاسیون انتگرالی و نه دیفرانسیلی شروع می‌کند (شبیه FEM):

ابتدا از معادله دیفرانسیل مسئله در حجم کنترل (سلول یا المان که نقطه P را احاطه کرده است) انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dV + \int_{\Delta V} S\, dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_r - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_l + S_{avg} \Delta V = 0 \qquad (2)$$

اختلاف روش‌ها FVM و FEM از همین جا شروع می‌شود. در روش FEM، تابع زیر انتگرال، موسوم به انتگرالده، ابتدا تقریب زده می‌شود، سپس انتگرال‌گیری می‌شود در حالی که در روش FVM، ابتدا انتگرال‌گیری می‌شود، سپس حاصل انتگرال تقریب زده می‌شود. در حالت FEM، مسائل یافتن انتگرال‌گیری عددی مطرح می‌شود، در حالی که در FVM، جملات عبارت به دست آمده، روش و تعبیر فیزیکی پیدا می‌کنند.

ترتیب عبارات : ① برای عبارات داخل پرانتز، ساده‌ترین ترتیب تفاضلی یعنی ترتیب فوروارد و
② برای ترم غیرخطی چشمه، فرض می‌کنیم ترتیب خطی تکرار باشد و ③ متوسط‌گیری برای پارامتر Γ

$$
\begin{cases}
\left(\Gamma A \dfrac{d\phi}{dx}\right)_r = \Gamma_r A_r \dfrac{\phi_R - \phi_P}{\delta x_{RL}} \quad , \quad \Gamma_r = \dfrac{\Gamma_R + \Gamma_P}{2} \\[2ex]
\left(\Gamma A \dfrac{d\phi}{dx}\right)_l = \Gamma_l A_l \dfrac{\phi_P - \phi_L}{\delta x_{LP}} \quad , \quad \Gamma_l = \dfrac{\Gamma_L + \Gamma_P}{2} \\[2ex]
S_{avg} \Delta V = S_0 + S_p \phi_P
\end{cases}
$$

۴ سطح مقطع را به طور خطی برداشتیم.

حال با جاگذاری‌ها به یک رابطه می‌رسیم :

① رویکرد تشکیل دستگاه : جملات همراه با ضرایب را طوری می‌نویسیم که مقادیر ϕ در گره‌ها از چپ به راست نوشته شوند تا دستگاه حل به آن دستگاه خطی کذایی برسیم.

② رویکرد تغییر بردار : جمله ϕ_P (تکرارآوری: گره P که گره کانونی جمله عمومی میدان انتقال است) را سمت چپ و بقیه را سمت راست می‌نویسیم تا میدان تأثیر یا رفتار تکراری (iterative) مقادیر گره‌های مجاور را آنالیز کنیم.

در ادامه رویکرد دوم را دنبال می‌کنیم چون در روش‌های FDM و FEM این روش حل با آن دستگاه نهایی را دیده‌ایم. با جاگذاری به جمله عمومی (تکراری) زیر می‌رسیم:

$$
\boxed{a_P \phi_P = a_L \phi_L + a_R \phi_R + S_0} \qquad (۳)
$$

به طوری که :

$$
\begin{cases}
a_L = \dfrac{\Gamma_l}{\delta x_{LP}} A_l \\[2ex]
a_R = \dfrac{\Gamma_r}{\delta x_{PR}} A_R \\[2ex]
a_P = a_L + a_R - S_P
\end{cases}
$$

دقت شود →

* نکته: اگر بخواهیم روند تکمیل دستگاه را تعقیب کنیم، باید برای شرایط مرزی را به طور خاص پردازش کنیم، یعنی دوباره مثل FDM، FEM، برای گره‌های مجاور مرز یا بلوک‌های مرزی به طور خاص ضرایب مربوطه را بنویسیم.

* نکته: اگر فرمول عمومی (۳) را برای حالت دوبعدی و سه‌بعدی بنویسیم، ضریب a_P (ضریب کانونی، ضریبی که در مقدار کمیت انتقالی در محل گره اصلی یعنی گره P ضرب می‌شود) به شکل زیر درمی‌آید:

$$a_P = \sum a_{nb} - S_P \qquad (٤)$$

یعنی جمع ضرایب گره‌های مجاور ($nb \triangleq Neighbor$) منهای شیب عبارت منبع!
خطی‌سازی شده

آیا این شکل آشنا نیست؟

* نکته: در حالت فرمولاسیون گذرا، دوباره همان مسائل گسسته‌سازی زمانی یعنی فرمولاسیون ضمنی، کرانک-نیکولسون و صریح و همان حرف‌ها.

* نکته: یک فرق عمده FVM با روش‌های FDM و FEM همان ترتیب ریشه گرفتن از فرمولاسیون پیوسته و مشتق شدن از فیزیک مسأله است. خود این مشتق شدن هم به طور طبیعی صورت شکل گرفته است، این یعنی که موقع فرمولاسیون پیوسته همانگاه که بیلان کمیت انتقالی را می‌نویسیم، مجبور به فرض یک shell بی‌نهایت کوچک با سایز ΔV (در حالت یک‌بعدی $A\Delta x$، دوبعدی $W\Delta x\Delta y$ و سه‌بعدی $\Delta x\Delta y\Delta z$) هستیم. حال اگر حد بگیریم به فرمولاسیون پیوسته می‌رسیم و اگر نگیریم، عملاً به فرمولاسیون FVM رسیده‌ایم، همچنانکه برای FDM، حد گرفتیم، پیوسته شده است، بعد گسسته کردیم! در بسیاری از کتب FVM، موقع فرمولاسیون، از همان ابتدا فرمولاسیون FVM را می‌نویسند و نه فرمولاسیون پیوسته، فافهم!

* نکته: یکی دیگر از برکات وصل بودن به فرمولاسیون و فیزیک مسأله دسته‌بندی فیزیک‌های مختلف می‌باشد و چون با انتگرال‌گیری شروع می‌شود، می‌توان این دسته‌بندی را مستقل از مختصات نوشت، فافهم!

* به عبارت منبع به صورت مطلق و مصداقی نگاه نکنید. اگر انتقال حرارت یک پره را در نظر بگیرید (مثلاً یک بعدی) ترم کنوکسیون یا انتقال حرارت تبریدی را می توان مثل یک ترم منبع در نظر گرفت، غلط هم که نیست!

$$\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right) - hP(T - T_\infty) = 0 \qquad (5)$$

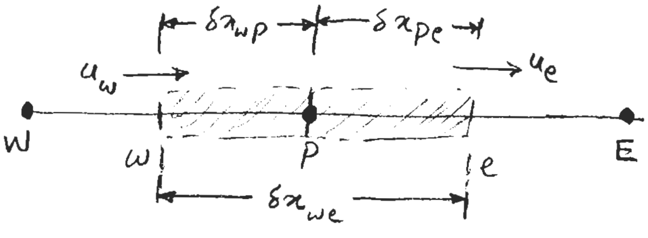
مسئله ادوکسیون (ترکیب کنوکسیون و دیفیوژن)

یک مثال بسیار بزرگ از معادلات PDE، سیستم های جریانی (Flow Process) است که ترم CFD یک اطلاق تخصصی و تقییدی برای آنها محسوب می شود. از نظر ریاضی، در کنار هم قرار گرفتن مشتقات مراتب مختلف در کنار یکدیگر، باعث تأمل بیشتر در دقت و ثبات گسسته سازی ها می شود، حال آنکه از نظر فیزیکی، اینکه دیفیوژن در همه جهات (لااقل در جهت عمود بر راستای جریان) تغییر می کند ولی کنوکسیون فقط در جهت محور جریان تغییر می کند، همان مسئله ریاضی را به شکل دیگری در ذهن متبادر می کند. از آنجایی که قرار است به طور مهندسی (یعنی ریاضی - فیزیکی) به مسئله بپردازیم، باید علی القاعده هنگام فرمولاسیون (اگرچه FVM سعی می کند بیش از بقیه پایسته باشد!)، به طور همزمان هم دقت و هم شاخصی از قدرت نسبی کنوکسیون بر دیفیوژن را ببینیم! (درک کنیم)

مثال ساده زیر را در نظر بگیرید (برای ساده سازی و پرهیز از کوپل شدن معادله پیوستگی برای تعیین سرعت جریان با میدان فشار، فرض شده که سرعت جریان معلوم است). همچنین فرض می کنیم (بنا به خاطر ساده سازی) ترم منبع یا چشمه و چاه (در حجم) نداریم:

معادله بیلان پارامتر ϕ : $$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) \qquad (6)$$

معادله پیوستگی : $$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \qquad (7)$$



(کنترل حجم هاشور زده شده است)

با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله ترانسپورت (۶) خواهیم داشت :

$$(\rho u A\phi)_e - (\rho u A\phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \qquad (۸)$$

و همچنین برای معادله پیوستگی :

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \qquad (۹)$$

همانطور که معلوم است، u معرف سرعت یا کنوکسیون و Γ نماینده دیفیوژن است. مطابق بحث‌های مکانیک سیالات، جهت تأمین گلنده لازم برای تشریح و تدوین تفسیرهای فیزیکی، پارامترها یا نماینده‌ها را کمی موشکافی فیزیکی می‌کنیم:

(Force) $\quad F \triangleq \rho u \quad$ (۱۰) فلاکس جرمی کنوکتیو
(این جرم بر واحد سطح عبوری)

(Diffusion) $\quad D \triangleq \dfrac{\Gamma}{\delta x} \quad$ (۱۱) کنداکتانس دیفیوزیو

برای صفحات یا وجوه ترانسپورت، کمیات متناظر را تعریف می‌کنیم:

$$F_w = (\rho u)_w \quad , \quad F_e = (\rho u)_e$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \quad , \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

فرض می‌کنیم $A_w = A_e = A$ و از رویکرد سانترال برای تقریب مشتق‌ها استفاده می‌کنیم:
(مشتقات معادله ۸)

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \qquad (۱۲)$$

$$F_e - F_w = 0 \qquad (۱۳)$$

هنوز با ϕ_e و ϕ_w داریم که باید به ϕ_E و ϕ_W تبدیل شوند، با فرض اینکه از رویکرد سانترال استفاده کنیم، یعنی:

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2 \quad , \quad \phi_w = (\phi_W + \phi_P)/2$$

آنگاه ما به جملهٔ عمومی و مرتب شده (مناسب برای تکرار) زیر می‌رسیم:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \qquad (14)$$

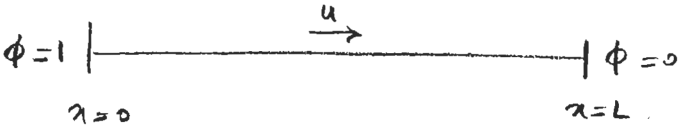
به طوری که

$$\rightarrow * \begin{cases} a_W = D_W + \frac{F_W}{2} \\ a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \\ a_P = a_W + a_E + (F_e - F_W) \end{cases}$$

که همگی ملاک‌های شرکت، تناظر، تقابل، تنافر، تداخل، سرایت، ترابت، رفاقت، وساطت و کفایت روابط را تفکر کنید.

← مثال (رقابت بین کنوکسیون و دیفیوژن)

خاصیت انتقالی ϕ در حالت یک بعدی تحت دیفیوژن و کنوکسیون مطابق شکل زیر منتقل می‌شود، می‌خواهیم در سه حالت (Calc) ولی برای یک گره‌بندی یکسان و یک روش حل، رقابت بین دو پدیده انتشاری شبه صوتی (کنوکسیون) و شبه نوری (دیفیوژن) را امتحان کنیم.



گره‌بندی و سایر داده‌های مسئله:

$L = 1.0\ (m)$, $\rho = 1.0\ kg/m^3$, $\Gamma = 0.1\ kg/m/s$

پنج گره ، $N_{nodes} = 5, 20$ ، متساوی الفاصله : $\delta x = 0.2\ (m)$

$D_e = D_W = D$, $F_e = F_W = F$, $D = \Gamma / \delta x$, $F = \rho u$

شرایط مرزی با نقاط A و B نمایش داده می‌شوند:

Case I : $u = 0.1\ (m/s)$ کنوکسیون پایین ، $N_{nodes} = 5$

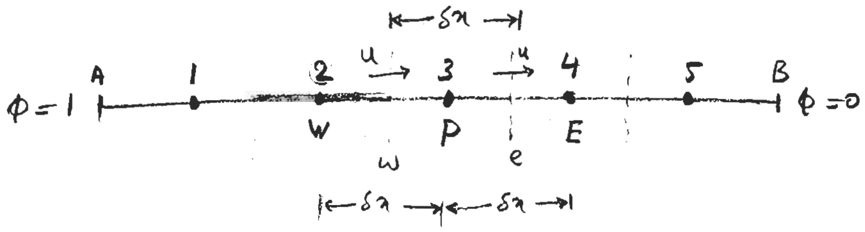
Case II : $u = 2.5\ (m/s)$ کنوکسیون بالا ، $N_{nodes} = 5$

Case III : $u = 2.5\ (m/s)$ کنوکسیون بالا ، $N_{nodes} = 20$

حل تحلیلی :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{\rho u x/\Gamma} - 1}{e^{\rho u L/\Gamma} - 1}$$

گره‌بندی (برای ۵ = N_{nodes}) و جاگذاری‌ها



گره‌های ۱ و 5 مرزی هستند و گره‌های 2، 3 و 4 را می‌توان به صورت جمله عمومی نوشت. بعد از عملیات ریاضی به شکل کلی ضرایب به شرح جدول زیر می‌رسیم:

	Node	a_W	a_E	S_P	S_0
(مرزی)	1	0	$D - F/2$	$-(2D+F)$	$(2D+F)\phi_A$
(عمومی در دامنه)	2,3,4	$D + F/2$	$D - F/2$	0	0
	5	$D + F/2$	0	$-(2D-F)$	$(2D-F)\phi_B$

← حالت اول (Case I): ($u = 0.1$, $F = 0.1$, $D = 0.5 \rightarrow \boxed{F/D = 0.2}$)

با جاگذاری مقادیر و تشکیل دستگاه:

$$\begin{bmatrix} 1.55 & -0.45 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بعد از حل:

$$\underline{\phi}^{FVM} = [0.9421,\ 0.8006,\ 0.6276,\ 0.4163,\ 0.1579]^T$$

حل تحلیلی $\underline{\phi}^{Anal.} = [0.9387,\ 0.7963,\ 0.6224,\ 0.4100,\ 0.1505]^T$

! تشابه جواب‌ها زیاد هستند.

(حل تحلیلی : $\phi(x) = \dfrac{2.7183 - e^{x}}{1.7183}$)

← حالت دوم (Case II): $\left(u=2.5,\ F=2.5,\ D=0.5 \rightarrow \boxed{F/D=5} \right)$

با جایگذاری مقادیر و تشکیل دستگاه و حل آن

$$\phi^{FVM} = [1.0356\ ,\ 0.8694\ ,\ 1.2573\ ,\ 0.3521\ ,\ 2.4644]^T$$

$$\phi^{Anal.} = [1.0000\ ,\ 0.9999\ ,\ 0.9999\ ,\ 0.9994\ ,\ 0.9179]^T$$

جواب FVM اصلاً قابل قبول نیست و دارای نوسان (wiggles) می‌باشد.

← حالت سوم (Case III): $\left(u=2.5,\ F=2.5,\ D=\Gamma/\delta x=2.0 \rightarrow \boxed{F/D=1.25} \right)$

این همان حالت قبلی است با این تفاوت که تعداد گره‌ها ۴ برابر بیشتر شده است و در نتیجه نسبت گره‌ای F/D نیز یک چهارم شده است. در این حالت جواب‌ها بسیار بهبود یافته‌اند.

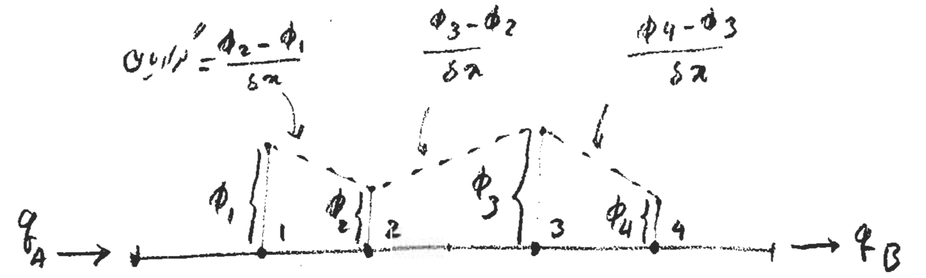
(در روش تفاضل FVM)

خواص روش‌های گسسته‌سازی - با عنایت به مثال پیشین متوجه می‌شویم که باید روی تکنیک‌های گسسته‌سازی تأمل بیشتری کنیم. در مثال قبلی آن چه که روش گره مربوطه را دچار مشکل می‌کرد، ریاضی یا هندسه سیستم بود که در مقدار δx تجلی کرده بود. آیا فیزیک مسأله (تنگاتنگ با ریاضی یا هندسه مسأله) نظیر نسبت F/D که علاوه بر δx، متنج و تأثیرپذیر از فیزیک مسأله (ρ، u و Γ) می‌باشد نیز قابل کسب است؟ پاسخ مثبت است و آن را در خواص گسسته‌سازی در FVM بیان می‌کنند:

1. ـ صدق بیلان (Conservativeness)
2. ـ محدود ماندن (Boundedness)
3. ـ میزان انتقالی بودن (Transportiveness)

① صدق بیلان

با انتگرالگیری (که یک بحث ریاضی صرف) از معادله دیفیوژن-کنوکسیون حول شدارهای حجم کنترل منجر به شدارهای معادله گسسته بیلان (که یک بحث فیزیکی) می‌شود که برحسب فلاکس خاصیت انتقال ϕ عبوری از سطوح حجم کنترل بیان شده‌اند. برای اطمینان از حفظ یکپارچگی یا صدق بیلان باید به نحوی این قضیه چک شود و اگر این قضیه از روش‌های ضرایب (مربوط a_P و a_{nb} ها) تعقیب شود که شیوه علمی‌تری است. برای کنترل این مسئله دو کار می‌توان کرد، یکی اینکه چک کنیم (مثلاً در حالت پایا) آیا میزان فلاکسی که وارد حجم کنترل شده، به همان مقدار نیز خارج می‌شود، ثانیاً آیا جمع ورودی‌ها از مکعب‌ها یا حجم‌های مجاور به همان مقدار نیز از مکعب مورد نظر (و به طرف مکعب‌های مجاور) خارج می‌شوند.
دیگر اینکه کل دامنه حل را در نظر گرفته و ببینیم آیا شرایط مرزی سازگار (consistent) برقرار می‌شوند.
برای روشن‌تر شدن موضوع دو شکل زیر که با رویکرد خطی و درجه دوم گسسته‌سازی شده‌اند توجه کنید.



مثال از فلاکس‌های سازگار دیفیوزیو

مثال از فلاکس‌های ناسازگار دیفیوزیو

۲) محدود ماندن (ماتریس قطری غالب)

حل دستگاه نهایی نوعاً دو نوع است: حل همزمان و حل تکراری. در حالت اول، وقتی که تعداد گره‌ها بسیار زیاد باشد، مشکل حافظه خواهیم داشت که البته می‌توان برای مسائل خاص الگوریتم‌های مختلفی (نظیر TDM توماس، PDM، HDM که استفاده از تغییر متغیر، بهره‌گیری از ویژگی‌های ماتریس‌های پراکنده و ماتریس‌های باندی) نیز به کار گرفت. و اگر بخواهیم مسئله را تکراری حل کنیم، یک شرط کافی برای این کار شرط محدود ماندن زیر است (درس محاسبات عددی را به یاد آورید! شرط قطری غالب Diagonal Domin.)

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a'_p|} \begin{cases} \le 1 & \text{at all nodes} \\ < 1 & \text{at one @ least} \end{cases}$$

به طوری که a_{nb}، ضرایب گره‌های مجاور همسایه بوده و a'_p مقدار مطلق ضریب گره P (یعنی $a_p - S_p$) می‌باشد. بدین ترتیب اگر یک رویکرد گسسته‌سازی خاص از شرط بالا تبعیت کند یعنی دستگاه مربوطه قطری غالب است و می‌توان نسبتاً با خیال راحت (فارغ از واگرایی و حدود نوسان) دستگاه را با روش تکراری حل نمود.

این کنترل رفتار نوسانی را می‌توان در گام‌ها و حوزه‌های مختلف حل FVM به خوبی و هنرمندانه بکار گرفت، مثلاً در بخش خطی‌سازی ترم منبع (یا ترم کنوکسیو از جنس مشتق مرتبه صفرم!) نگاه کنیم آیا مقدار a'_p مقدار بزرگی می‌شود یا نه، به عبارت دیگر اگر شیب S_p همیشه منفی باشد آنگاه مقدار $-S_p$ مقداری مثبت شده و به a_p اضافه می‌شود و لذا a'_p بزرگ می‌شود!! که عملاً حرکت به سمت قطری غالب شدن است.

نکته دیگر اینست که چک کنیم آیا همه ضرایب معادله گسسته هم‌علامت هستند (معمولاً مثبت) یا خیر! اگر در رویکرد گسسته‌سازی ما تراز (ای که فلاکس‌های دیفیوزیو) دقت کنیم a_p عمدتاً از جمع سایر ضرایب بدست می‌آید، اگر سایر ضرایب هم‌علامت باشند به بزرگ شدن مقدار a_p کمک می‌کنند و در نتیجه دستگاه را به فرم قطری غالب نزدیک‌تر می‌کنند. اگر این قطری بودن رخ ندهد، ممکنست مسئله واگرا شود یا اینکه در صورت همگرا شدن، نوسان پایدار (!) کند. به مثال اخیر، به خصوص در حالت دوم مراجعه شود.

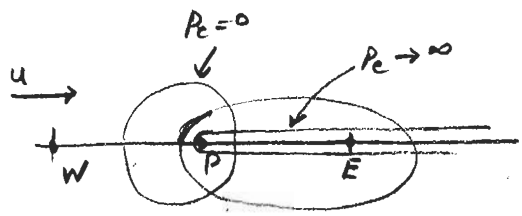
یک استفاده دیگر از این مسئله فیزیکی و ریاضی، بکارگیری آن در تولید گریدها می‌باشد، فافهم!

۳) میزان انتقالی بودن

برای نمایش قدرت یا قوت حضور پدیده‌های انتقال (کنوکسیون و دیفیوزیون) می‌توان از عدد پکلت کنترل حجم استفاده کرد:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta x}$$ (به طوری که δx همان طول مشخصه می‌باشد)

اگر در دو حالت حدی ($Pe \to 0$ و $Pe \to \infty$) کانتورهای کمیت انتقالی را رسم کنیم، متوجه می‌شویم که در حالت حدی $Pe \to 0$ کانتورها مثلاً $\phi =$ ثابت (وقتی مرزها بی‌نهایت یا فرمولاسیون پیوسته) به شکل دایره (در دو بعد) می‌باشد یعنی قدرت مطلقه است پدیده کند و در سطح مولکولی دیفیوزیون می‌باشد که در همه جهات می‌خواهد پخش شود. اگر u را زیاد کنیم، این دایره به یک بیضی تمایل خواهد داشت به طوری که در حالت $Pe \to \infty$، به شکل یک خط در جهت u، پخ (پهن) می‌شود. دقت شود میزان انتقالی بودن می‌تواند علاوه بر تاثیرپذیری از رویکرد گسسته‌سازی، متاثر از سایر عوامل یا شکل گرید نیز باشد، فافهم!



ارزیابی رویکرد گسسته سازی سانترال برای مسائل دیفیوژن-کنوکسیون با استفاده از مفاهیم سه گانه

- **صدق بیلان (کنسرواتیو بودن)**: با عنایت به آنالوگ‌های جداره‌های اشتراکی می‌توان نشان داد که این رویکرد گسسته سازی کنسرواتیو است. این کار با جمع زدن همه معادلات گسسته شده انجام می‌شود.
(اثبات)

- قیود کرانداری: ضرایب گره‌های داخلی برای این نوع رویکرد گسسته سازی به شکل زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \\ a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \\ a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \end{cases}$$

(۱) اگر میدان جریان داده شده یا محاسبه شده در بیلان جرم (معادله پیوستگی) صدق کند، آنگاه F_e همیشه با F_w مساوی بوده و لذا a_P به صورت مجموع ضرایب گره‌های مجاور (یعنی $\sum a_{nb}$) در می‌آید و در نتیجه شرط کافی کرانداری درست از آب در می‌آید.

(۲) برای گره شرقی، a_E (که به صورت $D_e - \frac{F_e}{2}$ محاسبه می‌شود) استعداد منفی شدن دارد، برای اینکه این گره همیشه مثبت در بیاید، شرط زیر باید برقرار باشد:

$$D_e - F_e/2 > 0 \rightarrow Pe_e < 2$$

- میزان انتقالی: گسسته سازی سانترال نمی‌تواند باعث تشخیص گره P نسبت به جهت جریان بشود، چراکه برای محاسبه فلاکس دیفیوزیو در گره کانونی P، از همه گره‌ها استفاده می‌کند و این فرق نمی‌کند که آیا به مقدار ϕ در گره بالادست جریان قرار دارد وزن بیشتری بدهد یا نه خیر، به طور علی السویه همه گره‌ها را در نظر گرفته و به نوعی متوسط‌گیری می‌کند. به هر حال این نوع رویکرد از کف میزان انتقالی مردود بیرون می‌آید!

برای سایر رویکردها گسسته سازی به ویژه تأمین شاخص مناسب میزان انتقالی نظیر تقریب‌ها یا رویکردهای بالادستی (upwinding) به کتب رفرنس مراجعه کنید.