تعریف ۱. اگر آزمایشی یا پدیده‌ای به طور دلخواه (...)

همگی (در مجموع) آن نتیجه می‌شوند

(... E نامش می‌دهیم. E نقطه Event پیشامد رخ داده می‌باشد

(Example, ...)

$P(E) =$

... 1000 ... 9155

با این مسئله ... دو روز ارزیابی تا حدی می‌باشد

[illegible]

(فصلی-عطفی) ⟸ قضیه ۵ : اگر دو رخداد A_1 و A_2 مستقل نباشند (و الزاماً یا جداگانه مشروط هم نباشند) یا غیرمستقل

آنگاه برای محاسبه عطف یا فصل آنها باید دقت کرد و از رابطه زیر کمک گرفت

$$\begin{cases} P(A_1+A_2) = P(A_1)+P(A_2)-P(A_1 \times A_2) \\ \text{یا} \\ P(A_1 \times A_2) = P(A_1)+P(A_2)-P(A_1+A_2) \end{cases}$$

(Bayes' Rule) ⟸ قضیه ۶ : اگر با فرض اینکه رخداد B پیش آمده است و رخدادهای شرطی $i=1,2,\dots,n$ و A_i را در نظر بگیریم آنگاه احتمال رخداد هر A_i با فرض اینکه B رخ داده است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)\,P(A_i)}$$

اثبات: از روی قضیه شرطی (قضیه ۴) می‌توان روابط زیر را تعریف کرد:

$$\begin{cases} P(A_1|A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \ \text{یا} \ \dfrac{P(A_1 \times A_2)}{P(A_2)} \\ \text{یا} \\ P(A_2|A_1) = \dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \ \text{یا} \ \dfrac{P(A_1 \times A_2)}{P(A_1)} \end{cases} \Rightarrow P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{P(B)} \\ P(B) = P(A_1|B).P(A_1) + P(A_2|B).P(A_2) + \dots + P(A_n|B).P(A_n) \end{cases}$$

$$\rightarrow P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i).P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)\,P(A_i)}$$

ooo

در ادامه، پنج مثال حل‌ساباتی مبتنی بر قضایای پیش گفته می‌آید. دقت شود هر چه مثال پیچیده‌تر می‌شود به روش‌های مبتنی بر قضیه جذب شده و از روش‌های مبتنی بر تعریف دفع (دوری رفع) می‌شویم.

No.

مثال ۳ - محاسبه احتمال

Experiment : انداختن تاس
Event : مقدار برآمده
Possible values : 1, 2, 3, 4, 5, 6

$P(value = i;\ i = 1, 2, \ldots, 6) = 1/6$

مثال ٤ - محاسبه احتمال رخدادهای مشترک - joint (independent) Event

Experiment : انداختن دو تاس A و B
Events : مقادیر A (یا) B
Joint event : مقادیر A و B
Possible values : (1,1), (1,2), ..., (6,6)

$P(\text{joint event}) = P(A \cap B)$ یا $P(A \times B) = P(A) \times P(B) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$

مثال ۵ - محاسبه احتمال فصلی - Mutually exclusive

Experiment : انداختن تاس
Event : مقدار یا ۱ (یا) ۲ بیاید

$P(1+2) = P(1) + P(2) = 1/6 + 1/6 = 1/3$

مثال ۶ - محاسبه احتمال غیرفصلی - Non-Mutually exclusive

Experiment : انداختن دو تاس A و B
Event : مقدار تاس A (یا) تاس B، ۱ بیاید

$P(A=1 \cup B=1) = P(A=1) + P(B=1) - P(A=1 \cap B=1) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$

مثال ۷ - محاسبه احتمال شرطی - Conditional Events

Experiment : انداختن سه تاس A، B و C
Event E_1 - دقیقاً ۲ تاس مقدار ۱
E_2 - A، ۱ بیاید و B و C هر مقداری

$P(E_1) = P(A=1) \times P(B=1) \times P(C \neq 1) + P(A \neq 1) \times P(B=1) \times P(C=1) +$
$P(A=1) \times P(B \neq 1) \times P(C=1) = 3 \times (1/6 \times 1/6 \times 5/6)$

$P(E_2) = 1/6 \times 1 \times 1 = 1/6$

بقیه در صفحه بعد ←

No.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(A=1) \times P(B=1) \times P(C \neq 1) + P(A=1) \times P(B \neq 1) \times P(C=1)$$

$$= 2 \times (1/6 \times 1/6 \times 5/6) = 5/108$$

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{5/108}{1/6} = 5/18$$

مثال ۷ ـ وقتی یک مرکز مخابره تلگراف، پیامی را به مرکز دیگری می‌فرستد گاهی خطاهایی در ارسال صورت می‌گیرد؛ به ویژه وقتی از الفبای مورس (خط ـ نقطه) یا دیجیتال (باینری یا 0-1) استفاده می‌شود. به تجربه معلوم شده در هر متنی (هر session) که مرکزی می‌فرستد، نسبت فراوانی نقطه (یا صفر) به فراوانی خط (یا ۱) برابر ۳ به ۴ می‌باشد. همچنین به ترتیب معلوم شده است که با احتمال 1/8 نقطه‌ای که یک مرکز به مرکز دیگر می‌فرستد، اشتباهاً خط دریافت می‌شود. حال به دنبال آنیم اگر در یک متن، نقطه‌ای فرستاده شود، آنگاه چقدر احتمال درست در دریافت آن در مرکز دیگر می‌باشد.

(قانون بیز) حل: رخدادهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$E_1 =$ رخداد فرستادن نقطه ، $E'_1 =$ رخداد فرستادن خط

$E_2 =$ رخداد دریافت نقطه

$$\boxed{P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1)}{P(E_2)} \cdot P(E_2 | E_1)}$$

$$P(E_1) = \frac{3}{3+4} = 3/7$$

$$P(E_2 | E_1) = \frac{7}{8}$$

$$P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap E'_1) :$$

$$P(E_2 \cap E_1) = P(E_2 | E_1) \times P(E_1) = 7/8 \times 3/7 = 3/8$$

$$P(E_2 \cap E'_1) = P(E_2 | E'_1) \times P(E'_1) = 1/8 \times 4/7 = 1/14 \Rightarrow$$

$$P(E_2) = 3/8 + 1/14 = 25/56$$

$$\rightarrow P(E_1 | E_2) = \frac{3/7}{25/56} \times \frac{7}{8} = 21/25 \simeq \%84$$

نکته: اگر بخواهیم این مثال را با استفاده از توزیع‌ها حل کنیم، مجبوریم از توزیع احتمال استفاده کنیم و متوسل به کامپیوتر شویم. به این روش می‌گویند شبیه‌سازی مونت کارلو!

متغیرهای تصادفی

* می‌خواهیم در ادامه به اقلیم کمیت، یعنی محاسبات و کار روی اعداد مشخص برویم، لذا برای درک از هم کیفی مثل پرتاب سکه یا تاس و با منطق کلاسیک و بیانی و توصیف مجموعه به کمک کمی

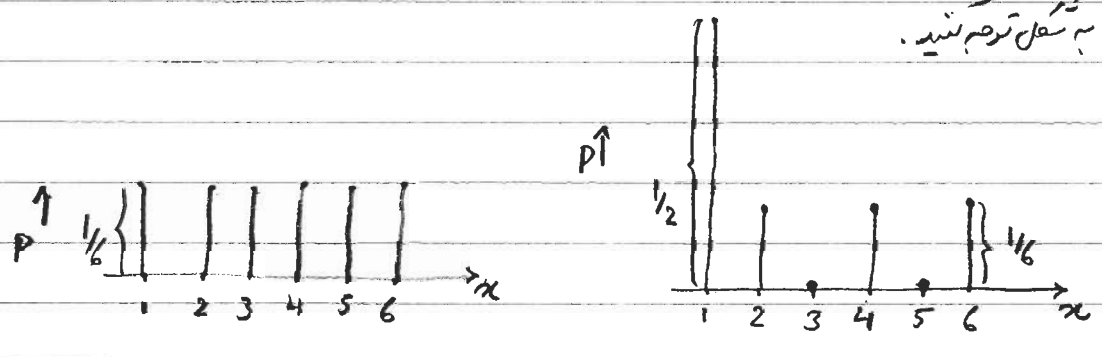
مثل فرآیند تصادفی یا سیستم غیرمعین (stochastic) و با منطق حتی احتمالاتی و توصیف مقدار و متغیر برسیم. در نتیجه برای ایجاد این مبادی مجبور به توصیف متغیر تصادفی هستیم (X)

و به همین ترتیب با توصیف تابع متغیر تصادفی، توزیع یا تنوع احتمالات، میانگین‌گیری، ... جلو می‌رویم تا یک جبر خاص به نام stochastic Algebra و یا یک حساب جامعی به نام Ito calculus برای سیستم‌های دینامیکی را ایجاد کنیم.

توزیع احتمال:

یک تاس معمولی را در نظر بگیرید، احتمال اینکه هر مقداری بیرون بیاید، معادل $1/6$ است ولی اگر خال‌های ۳ و ۵ را حذف کنیم و به جای آن ۱ بگذاریم، دیگر مقادیر (رخداد) مختلف، متساوی الاحتمال نیست،

به شکل توجه کنید.



تاس معمولی

یک تاس غیرمعمول با سه وجه ۱!

به دو شکل بالا، نگرش توزیع احتمال (گسسته) و با $F(x)$ نمایش می‌دهیم. به نمادگذاری توجه کنید، X معرف متغیر یا دامنه توصیف متغیر تصادفی است، درحالی‌که x مقدار برآمده از آزمایش (تصادفی) یا رخداد (تصادفی) است، بدین ترتیب، $F(x)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

بقیه در صفحه بعد ←

تعریف اخیر، کمی (شاید هم بسیار زیاد!) عجیب به نظر می‌رسد. به طور شهودی می‌توان گفت تعریف زیر طبیعی باشد:

تعریف مجازی یا طبیعی تابع توزیع $F(x) = P(X = x)$

یعنی مقدار خود تابع احتمال، یعنی $P(x)$ باشد توزیع احتمال! دیگر نیازی به تعریف اضافه F نبود که بعداً مجبور باشیم

برای محاسبه احتمال از جبری استفاده کنیم که مجبور به عملیات (operation) روی F از قبیل مشتق و انتگرال باشیم!

اجازه دهید با همین تعریف طبیعی یا انتزاعی جلو برویم، خواهیم دید با مشکلات عدیده‌ای روبرو خواهیم شد:

فرض کنید دقیقاً مقدار ۲۵ گرم نمک را در (دقیق وزن شده) دقیقاً یک لیتر آب حل کرده‌ایم. حال با توجه به اینکه تمامی اندازه‌گیری‌ها

تغییر توزین نمک جامد، حجم آب و غلظت نمک دارای عدم قطعیت هستند و همچنین در طول پروسه حل شدن یا حمل کردن

نمک در آب، احتمال هدر رفتن نمک، چسبندگی، تبخیر آب، و ... احتمالش وجود دارد، آیا می‌توان گفت احتمال اینکه غلظت

نمک در آب، دقیقاً چقدر است؟ نه، می‌توان گفت، احتمال اینکه غلظت نمک در آب دقیقاً 1.0000 گرم بر لیتر باشد،

صفر است!!! دقت شود با فرآیندهای تصادفی سروکار داریم، با عدم قطعیت روبرو هستیم. لذا باید به نحوی این

مسأله را حل نماییم، به ویژه برای سیستم‌های پیوسته. در این مفصل، یعنی جبر مخصوص به فرآیندهای تصادفی پیوسته یا فرآیندهای

پیوسته همراه با عدم قطعیت، نیز طبیعی به نظر می‌رسد! چرا که وقتی ادبیات ریاضی (توابع)، مفهوم احتمال را تعریف کردند

یا تبیین کردند یا اختراع کردند یا کشف کردند، اولاً به فکر سیستم‌های پیوسته نبودند و ثانیاً در مورد برازش تابع به مفهوم

مدرن آن (یعنی تفریق مجموعه‌ها) نبودند. لذا باید کار دیگر کرد، یعنی از جبر و هندسه قطعی بیاییم بیرون ولی ارتباطمان با

جبر کلاسیک را قطع نکنیم!!! مشخصاً، چون با عدم قطعیت روبرو هستیم، یعنی با استدلال سروکار داریم و از طرفی سیستم نیز پیوسته

است، لذا مفهوم جمع (Σ یا $\int$) از این طرف متبلور می‌شود و مفهوم تابع اولیه (انتگرال) و مشتق هم از

آن طرف، یعنی جبر کلاسیک چشمک می‌زند! همچنین تعریف تابع به طور غیر صریح و ضمنی نیز خیلی عجیب نیست، بسیاری

از توابع (مثل بسل و بتا) با معادله دیفرانسیل تعریف می‌شوند و بسیاری دیگر با انتگرال (مثل تابع دیراک).

یک توفیق اجباری هم داریم: با تعریف تابع توزیع پیوسته $F(x)$ به راحتی می‌توان با کمک تابع دلتای دیراک، فرآیندهای

گسسته تصادفی را نیز پوشش داد.

No.

در ادامه، پس از بررسی استدلالی تعریف $F(x)$ (تابع توزیع احتمال) به نتایج و تعاریف متعاقب می‌پردازیم:

← تابع دانسیته احتمال (پیوسته)

$$f(x) = dF(x)/dx$$

← باز تعریف تابع توزیع

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

(u، متغیر مجازی است و دامنه مقادیر متغیر تصادفی X، از $-\infty$ تا $+\infty$ گسترانیده شده است
جهت کلیت،)

← تعریف تابع دانسیته احتمال (پیوسته)

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \leq x+\Delta x)}{\Delta x}$$

← رابطه تابع دانسیته احتمال (گسسته)

$$f(x) \triangleq \sum_i P_i\, \delta(x - x_i)$$

← تابع توزیع الحاقی دو متغیره (X و Y مستقل از هم هستند)

$$F_{②}(x,y) = P(X \leq x \ \text{AND}\ Y \leq y)$$

← تابع دانسیته الحاقی

$$f_{②}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{②}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

← خاصیت ضرب: (X و Y مستقل از هم هستند)

$$F_{②}(x,y) = P(X \leq x \ \text{AND}\ Y \leq y) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \times E_2)$$

$$= P(E_1) \cdot P(E_2) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y)$$

$$= F_X(x)\, F_Y(y)$$

به طوری که E_1 و E_2 رخدادهایی هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$E_1 :\ X \leq x \quad , \quad E_2 :\ Y \leq y$$

همچنین با توجه به نتیجه بالا،

$$f_{②}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

تابع الحاقی

← استخراج توابع تک متغیره از ۲ و یا چند متغیره:

$$\begin{cases} F_X(x) \triangleq F(x) = F_{②}(x, \infty) \\ F_Y(y) \triangleq F(y) = F_{②}(\infty, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_X(x) \triangleq f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{②}(x,y)\,dy \\ f_Y(y) \triangleq f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{②}(x,y)\,dx \end{cases}$$

امید ریاضی و آمار متغیرهای تصادفی

گام اول در حرکت از متغیرهای قطعی به غیرقطعی را برداشتیم، یعنی تعیین کران معادل تصور مفهوم تابع در متغیرهای غیرقطعی و ارتباط آن انتگرالی تابع احتمال با تابع توزیع احتمال. گام دوم، تعیین یا تشبیه مقادیر معادل کمیات تصادفی با کمیات قطعی می‌باشد. از آنجایی که کمیات غیرقطعی در یک محدوده به سر می‌برند و در حالت پیوسته تعداد این کمیات سر به بی‌نهایت می‌زند، لذا به دنبال نوعی آبستراکسیون هستیم، یعنی به جای آنکه با بی‌نهایت عدد سروکار داشته باشیم با تعداد کمی (ترجیحاً ۱ عدد) عدد سروکار داشته باشیم. این کنش از آن رو، بسیار آشناست و آن همان مفهوم میانگین در آمار است که به نوعی با وزن‌دهی فراوانی اعداد و جمع کردن (انتگرال گسسته) می‌توان به یک مقدار میانگین (Mean) رسید. اگر این مفهوم را به واسطه برابری بین آمار و احتمالات فرض بگیریم، آنگاه به مفهوم امید ریاضی (Expected Value) می‌رسیم که به طور کلی انتگرال برای متغیرهای پیوسته و سیگما برای گسسته ظاهر شده و فراوانی نسبی جایش را به دانسیته یا فراوانی احتمال می‌دهد:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

اساسی: میانگین یا ممان اول به زبان آماری
امید ریاضی یا مقدار کمی به زبان احتمالات

← امید ریاضی متغیر تصادفی تابع

$$\begin{cases} Y = g(X) \\ E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx & \text{میانگین مربعات یا ممان دوم} \\ \sqrt{E[X^2]} \;:\; MSE & \text{میانگین جذر مربعات} \\ \sigma^2 \triangleq E[X - E[X]]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)\,dx = E[X^2] - E[X]^2 & \text{واریانس} \\ \sigma = \sqrt{\sigma^2} & \text{انحراف معیار (استاندارد)} \end{cases}$$

No.

← خواص میانگین و واریانس $E[X_1+X_2+\dots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\dots+E[X_n]$ (چه مستقل، چه غیرمستقل)

$E[X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \dots X_n] = E[X_1]\times E[X_2]\times E[X_3] \dots E[X_n]$ (مستقل)

$$\begin{cases} \text{if } X=\sum_{i=1}^{n} X_i \quad . \quad X_i \text{ ها مستقل} \\ \text{Then} \quad \sigma_X^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{X_i}^2 \end{cases}$$

وابستگی متغیرهای تصادفی به همدیگر، مفهوم کوواریانس

گام سوم، تبیین بحث استقلال یا وابستگی رخدادهای تصادفی (به زبان کیفی) یا شرطی بودن آنها در اقلیم وسیع‌تر کیفی می‌باشد. آیا بیان شرطی بودن همان مفهوم کمّی تابعیت است؟

اگر اینطور است، تابعیت را چگونه تعریف کنیم (در مورد سیستم‌های غیرقطعی) یا مفهوم مدرن تابع یعنی نگاشت مجموعه‌ها باید دستخوش تحول شود؟ ساختارهای تحلیلی و معروف

نظیر تابعیت خطی، قانون مربع (محاسبه مساحت)، چند جمله‌ای‌ها، توابع مثلثاتی و امثالهم در چه سیستم‌های تصادفی یا غیرقطعی چه محلی از اعراب دارند؟ و و و ...

به هر حال، یک شاخص میزان ارتباط دو متغیر تصادفی، تعریف کوواریانس می‌باشد و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E[X])(y-E[Y])f_{(2)}(x,y)\,dx\,dy \quad \text{(تعریف پیوسته)}$$

(تعریف کامل، چه پیوسته، چه ناپیوسته)

$$=E[XY]-E[X]E[Y]$$

این تعریف، نکته یا خاصیت یا تعبیر جالبی را در خود دارد و آن اینست که اگر دو متغیر X و Y به هم هیچ ارتباطی نداشته باشند و رخداد ترکیب شده روی آنها، عملاً به همدیگر مشروط نباشند، آنگاه باید امید ریاضی حاصلضرب آنها مساوی حاصلضرب امید ریاضی آنها باشد و بعبارتی مقدار کوواریانس صفر باشد. نکته مهم اینجاست این خط‌کش وابستگی را ما توانستیم به صورت حاصل جمع (اگر دامنه تغییرات x و y مثبت بود) به صورت مجموع مربعات یا هر ترکیب ریاضی ساده یا پیچیده دیگر بیان کنیم ولی در این صورت این خاصیت بسیار زیبای اختلاف دو امید ریاضی را دیگر نداشتیم.

* نکته: عدد غیرصفر کوواریانس، فقط و فقط معرف رابطه و وابستگی دو متغیر X و Y است، این که چه نوع رابطه‌ای نظیر رابطه خطی، مجذوری یا هرگونه فرم تحلیلی غیرخطی داشته باشند، بر عهده کوواریانس نمی‌باشد.

* نکته: اگر X و Y از همدیگر مستقل باشند (یا به زبان کیفی به همدیگر مشروط نباشند) آنگاه کوواریانس صفر است ولی عکس آن صادق نیست!!!

No.

* عبارت $E[XY]$ در تعریف کوواریانس، ممان مرتبه دوم X و Y به بیان آماری می‌باشد. اگر کوواریانس را با حاصلضرب انحراف معیارهای X و Y نرمالیزه کنیم به تعریف کاربردی ضریب همبستگی می‌رسیم:
(Correlation Coeff.)

$$\boxed{\rho = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

از این ضریب می‌توان به طور کمّی در میزان ارتباط خطی (و نه فقط شاخصه کیفی ارتباط) دو متغیر X و Y استفاده کرد.

* یک کمیت دیگر در ارتباط با متغیرهای تصادفی و توابع توزیع احتمال آنها، تابع مشخصه (Characteristic function) می‌باشد. کاربرد آن در پردازش سیگنال، نمونه‌گیری از سری‌های زمانی تصادفی و محاسبه ممان‌ها در فضای فرکانسی و ... استفاده از قدرت ابزاری تبدیل فوریه می‌باشد:

Charac. Func. : $g(t) = E[\exp(jtX)]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(jtx) f(x)\,dx$$

چیزی شبیه تبدیل (معکوس) فوریه (یا در کلی پایه آن: تبدیل لاپلاس) می‌باشد، به خصوص وقتی که s را با jt یا منفی آن جایگزین کنیم!

← محاسبه تابع دانسیته احتمال (معکوس تابع مشخصه)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jt}\, g(t)\,dt$$

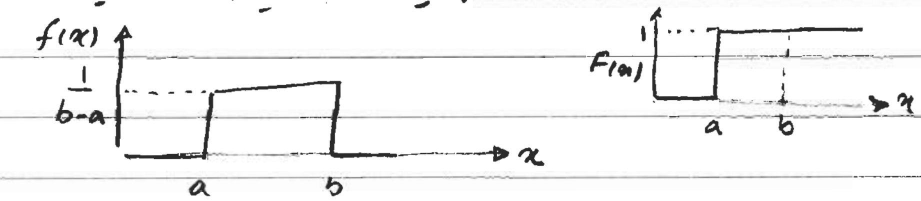
← محاسبه ممان‌ها

$$E[X^n] = j^{-n} \left. \frac{d^n g(t)}{dt^n} \right|_{t=0}$$

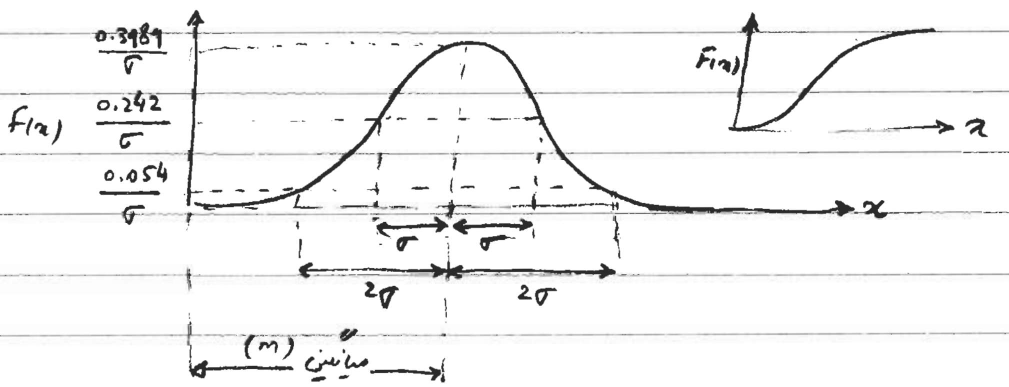
(دانسیته)
توابع توزیع یونیفورم و نرمال (پیوسته)

به تجربه معلوم شده است که بسیاری از رخدادهای طبیعی پیوسته تصادفی هم‌شکل زیر هستند، به طور مثال تابع توزیع احتمال فرآیند کریستالیزاسیون (توزیع فراوانی طول‌های مختلف کریستال‌ها) یا نتایج امتحان کنکورها، همگی نمودارهای شکل هستند و فقط در بزرگی و پهنی یا متوسط و میانگین با هم متفاوتند. دو تابع معروف احتمالی، توابع یونیفورم و نرمال می‌باشند (توابع دیگری نیز مثل تابع توزیع پواسون، نمایی، و دیگر ... شناسایی شده‌اند)

(دانسیته)
تابع توزیع یونیفورم یا پالس



(دانسیته)
تابع توزیع نرمال یا گوسین



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

تابع توزیع نرمال، به لحاظ فراوانی تجربه در مشاهدات طبیعی، مرتبط با رهیافت و تحلیل‌های آماری و احتمالات و همچنین تصاویر جالب و کاربردهای آماری آن ظاهر می‌شود، به طور کلی در بحث فرآیندهای تصادفی فلوچارت دارد!
به چند نکته مرتبط با آن توجه کنید:

* سطح زیر منحنی تابع دانسیته نرمال مثل هر تابع دانسیته دیگر (مطابق تعریف آن)، مقدار واحد می‌باشد.
این نکته برای همه برقرار است و مشخصاً برای تابع نرمال که با دو مقدار m و σ مشخصه‌سازی (پهن و باریک می‌شود یا منتقل و جابجا می‌شود) دارای خواص جالبی است، به طور مثال احتمال قرارگیری مقدار تصادفی x (از متغیر X) در گستره $\pm 1\sigma$ از مقدار میانگین معادل 68% و در گستره $\pm 2\sigma$، معادل 95% می‌باشد. از این‌رو به راحتی می‌توان در مورد مساوات آنالیز واریانس، گستره اطمینان و آزمون تصمیم‌گیری شد.

No.

دارای غیرمستقل (!)

* توزیع مجموع چند متغیر تصادفی مستقل که هر کدام دارای توزیع نرمال هستند، خود دارای توزیع نرمال است و می‌توان σ و m مجموع را با σ_i و m_i رابطه‌مند کرد. این اصل معروف به حفظ فرم نرمال است.

* تحت شرایط خاص، اگر چند متغیر تصادفی مستقل دارای توابع توزیع دلخواه باشند (چه نرمال، چه پواسون، چه نمایی، ...) آنگاه با افزایش تعداد متغیرها به سمت یک عدد بسیار بزرگ (بی‌نهایت)، فرم توزیع مجموع آنها به سمت توزیع نرمال می‌رود! این قضیه (همراه با بیان آن شرایط خاص) موسوم به قضیه حد میانگین است.
(centeral limit)

* تعریف توزیع نرمال دو متغیره (Bivariate)، وقتی متوسط هر دو متغیر صفر باشد:

$$f_{②}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\left(\frac{\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{y}{\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}}{2(1-\rho^2)}\right)\right\}$$

* تعریف توزیع نرمال n متغیره (Multi-dimensional or Multivariate):

$$f_{ⓝ}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|P|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m})^T P^{-1}(\underline{x}-\underline{m})\right\}$$

به طوری که، (علامت زیرخطی، معرف بردار است)

$$\underline{x} \triangleq [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

$\underline{m} \triangleq \underline{E}[x_i]$ (بردار میانگین)

$P \triangleq E[(\underline{x}-\underline{m})(\underline{x}-\underline{m})^T]$ (ماتریس کوواریانس) ← دقت شود بردار ستونی در بردار سطری ضرب شده، نه برعکس، فافهم.

← دقت شود P، ماتریس کوواریانس است و نه کوواریانس. بیاد آر در تعریف کوواریانس را، آنگاه که مفهوم رابطه دو دویی مطرح بود!

No.

۰۹۱۲۸۸۰۰۳۹۸

۰۹۱۲۸۱۴ ۲۷۹۲

فرآیندهای تصادفی (دینامیکی)

یک سری زمانی پیوسته (گسسته) در نظر بگیرید یا اینکه یک دنباله زمانی از یک کمیت تصادفی در نظر بگیرید. می‌خواهیم روابط، مؤلفه‌ها، مشخصه‌های آماری مربوط به این سری زمانی را کشف کنیم، مباحثی مثل همبستگی مقادیر کمیت X در زمان‌های مختلف، میزان ارتباط یا وابستگی دو سری زمانی تصادفی را تجربه کنیم. باید دقت شود که سری‌های زمانی اگر قصد مدل‌سازی‌شان را داشته باشند به صورت تحقق غیرمتناهی است تا اینکه بطور تحلیلی وابسته یک روابطی چه جبری و چه دینامیکی داشته باشیم. علت هم این است که منشأ پیدایش این مباحث به پردازش مشاهدات و زمان‌گیری و نمونه‌برداری برمی‌گردد.

به طور کلاسیک و ابتدایی یک فرآیند تصادفی به صورت یک مجموعه (Ensemble) از کمیات متغیر با زمان در نظر گرفته می‌شود. این مجموعه را با $\{x(t)\}$ نمایش می‌دهیم و چون پارامتر زمان نیز دخیل شده است، باید کمی در تعاریف قبلی دستکاری کنیم. به هر حال مشخصه‌های دینامیکی و مفهوم تاریخچه و امکان ارتباط (وجود نوعی مدل) بین مقادیر x در لحظات متفاوت، بسیار مرتبط هستند. لذا می‌خواهیم با مشخصه‌ها و مؤلفه‌های آماری بفهمیم آیا اندازه‌گیری‌های یک سیگنال کاملاً مستقل از هم و تصادفی هستند یا اینکه برعکس علیرغم تصادفی بودن x، آیا به هم وابسته‌اند!!!

← با تعریف برخی مفاهیم: وابستگی اندازه‌گیری‌ها به زمان:

تابع توزیع احتمال زمانی: $F(x_1,t_1) = P(x(t_1) < x_1)$

تابع دانسیته: $f(x_1,t_1) = dF(x_1,t_1)/dx_1$

برای ترکیب یا برقراری یک فاکتور جهت سنجه میزان ارتباط دو مقدار متفاوت از x (در دو لحظه t_1 و t_2) از توابع توزیع الحاقی (دو متغیره) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_2(x_1,t_1;x_2,t_2) = P[x(t_1) \le x_1 \text{ AND } x(t_2) < x_2] \\ f_2(x_1,t_1;x_2,t_2) = \dfrac{\partial^2 F_2(x_1,t_1;x_2,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases}$$

رتبه‌های بالاتر را نیز می‌توان به همین شکل تعریف کرد ولی در عمل تا همین مرتبه دوم بیشتر نیاز نداریم.

تابع توزیع احتمال زمانی (دو متغیر تصادفی):

$$\begin{cases} F_2(x,t_1;y,t_2) = P(x(t_1) < x \text{ AND } y(t_2) < y) \\ f_2(x,t_1;y,t_2) = \dfrac{\partial^2 F_2(x,t_1;y,t_2)}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

دقت کنید x و y به صورت x_1 و y_2 نوشته شده‌اند.

← توابع همبستگی : معروفترین و مهمترین مؤلفه مشخصه سازی متغیرهای تصادفی زمانی، ممان های اول است که موسوم به توابع همبستگی هستند : (ترتیب گسسته آن برای ما اکتفاپذیر است)

تابع خودهمبستگی (Auto correlation)

$$\varphi_{xx}(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_{(2)}(x_1,t_1;x_2,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

تابع دگرهمبستگی (cross-correlation)

$$\varphi_{xy}(t_1,t_2)=E[x(t_1)y(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f_{(2)}(x,t_1;y,t_2)\,dx\,dy$$

* در صورتیکه $E[x(t_1)]$، $E[x(t_2)]$ و $E[y(t_2)]$ همگی صفر باشند آنگاه توابع فوق الذکر همان کوواریانس های متغیرهای تصادفی فوق الذکر شده و اگر هم مقیاس (نرمالیزه) شوند آنگاه به ضرایب همبستگی تبدیل پیدا می کنند.

← مفهوم ایستایی (Stationarity) : یک فرآیند تصادفی ایستا فرآیندی است که مشخصه های آماری مرتبه اول آن نسبت به زمان ثابت می ماند و مرتبه دوم ها فقط تابع زمان شیفت خواهند بود.

← مفهوم ارگودیسیتی (Ergodicity) : یک مفهوم دیگر درباره فرآیندهای ایستا هست به نام نظریه ارگودیسیتی. خودهمانی تصویر، همان مسئله تشابه فراکتالی (Self-similarity) یا خودمتشابه نامیده یا به تعبیر عام شبیه نمونه خود است.

— فرآیندهای گوسی : فرآیندهای تصادفی هستند که تمامی توابع احتمالاتی آن از همه رتبه ها (چند متغیره) تابع توزیع نرمال باشند،
به عبارتی توزیع $x(t)$ برای هر زمان دلخواه t، نرمال باشد:

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$ برای اسکالر تصادفی x

$$f(\underline{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|P|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m})^T P^{-1}(\underline{x}-\underline{m})\right]$$ برای بردار تصادفی $\underline{x}$

نکته قابل توجه این است که همه خواص آماری یک فرآیند گوسی توسط ممان اول و ممان دوم آن (به بیان آماری) یا در تابع خودهمبستگی (به بیان ریاضی) آن بیان می شود. متقابلاً اینکه خروجی یک سیستم خطی که ورودی آن گوسی باشد، نیز گوسی می باشد. نمادگذاری خلاصه یک فرآیند تصادفی گوسی (به جای نوشتن فرمول های بالا) نیز در اکثر کتب مرجع بصورت زیر می باشد:

$\underline{x}\sim N(\underline{m},P)$ برای بردار

$x\sim N(m,\sigma^2)$ برای اسکالر

— توابع دانسیته طیف توان : (ورود تدریجی به محاسبه توابع اتو)

یک راه تحلیل سیستم های دینامیکی خطی پیوسته از آنالیز فضای حالت و توابع انتقال یا به تحقق مینیمال دیگر) استفاده از رابطه زیر (تابع ایمپالس واحد) می باشد که تعلقه تحقیق پردازش سیگنال است:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)w(t,\tau)\,d\tau$$ (انتگرال برهم نهش)

$$y(t)=\int_{0}^{\infty}w(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$ (انتگرال کانولوشن)

به طوری که $w(t,\tau)$ به زبان سیگنال پردازش، تابع وزن و به زبان کنترلی ها، همان تابع انتقال پایه می باشد.

علت استفاده زیاد از این رابطه، مقدمه تعیین برای استفاده از ابزار قدرتمند تبدیل فوریه و دیگر تبدیل‌های آن (تبدیل لاپلاس، تبدیل z) برای طراحی کنترلر (فیلترها) دیجیتالی می باشد.

حال اگر ما ورودی متغیر تصادفی باشد و از نوع استیشنری باشد، آنگاه می توان آمار خروجی را از آمار ورودی بدست آورد: (!)

$$E[y]=E[x]\int_0^{\infty}W(t)\,dt$$

$$E[y^2]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}W(\tau_1)W(\tau_2)\varphi_{xx}(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$$

$$\varphi_{yy}(\tau)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}W(\tau_1)W(\tau_2)\varphi_{xx}(\tau+\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$$

$$\varphi_{xy}(\tau)=\int_0^{\infty}W(\tau_1)\varphi_{xx}(\tau-\tau_1)\,d\tau_1$$

No.

شکل انتگرال‌ها را می‌زنند که اگر مقصد کمیتی و یا کار با فرم‌ها θ داشته باشیم، مثلاً از تبدیل فوریه (انتگرال در $(-\infty, +\infty)$ برای زمان) یا تبدیل لاپلاس (انتگرال و واقعیتاً مثبت بودن زمان، یعنی کار در $(0, \infty)$) استفاده کنیم؛ مثلاً

$$\left(\text{تبدیل فوریه } \varphi_{xx}\right) \quad \Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

این کمیت موسوم به تابع دانسیته طیفی توانی (Power Spectral Density Function) می‌باشد.

این نحوه نامگذاری نیاز به کمی فلسفه دارد:

اولاً) چون φ_{xx} ظاهر شده، یعنی مربعات اعضای مجموعه یا دامنه تغییرات متغیر تصادفی (و ورودی x) ظاهر شده؛ مجموع مربعات یا معنی نورم، اندازه، اندازه و قدر دارد (اگر x به عنوان ولتاژ باشد) یا معنی قدرت، انرژی، توان و بهره دارد اگر اسکالر باشد و در طول زمان اندازه‌گیری شده باشد.

ثانیاً) چون تغییرات در باطن خود رفتار تناوبی (و فرکانس‌ها تکراری متناوب) را گرفته و سوی دارد و

ثالثاً) ابزار ریاضی ثابت متغیر مختلط s به ω نشان داده که برای حالت ماندگار، بسیار قوی عمل می‌کند.

لذا $\Phi_{xx}(\omega)$ عملاً توزیع طیفی میزان شدت یا دانسیته انرژی مجموعه سری زمانی $\{x(t)\}$ در فاصله فرکانسی است تا چه می‌باشد (با فاصله $(\omega+d\omega, \omega-d\omega)$)، لذا برای حساب کردن قدرت میانگین لازم است در کل طیف انتگرال گرفته شود. این مفهوم میانگین‌گیری را از معکوس تعریف (تبدیل) بالا بدست می‌توان آورید:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$\boxed{E[x^2] = \varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) d\omega}$$

به همین ترتیب و به طرز مشابه

تابع دانسیته طیف توانی الحاقی (Cross power SDF)

$$\Phi_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

← رابطه جبری Φ_{xy} و Φ_{yy} به جای رابطه انتگرالی φ_{xy} و φ_{yy} (در صفحه قبل)

$$\boxed{\Phi_{xy}(\omega) = |W(j\omega)| \, \Phi_{xx}(\omega)}$$

به طوری که W تابع انتقال سیستم (یا پروسه) می‌باشد:

$$\left(\text{تبدیل لاپلاس تابع وزن}\right) \quad W(s) \triangleq \int_0^{\infty} w(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad \text{یا} \quad \int_0^{\infty} w(t) e^{-st} dt$$

← نویز سفید: یک فرم ساده PDSF به شکل آمار ثابت یونیفورم است که موسوم به نویز سفید است:

مشخصه مهم نویز سفید به زبان PDSF : $\Phi_{xx}(\omega) = \Phi_0$

یعنی توزیع قدرت سیگنال تصادفی یا مجموعه $\{x(t)\}$ در همه فرکانس‌ها یک مقدار یونیفورم و ساده است. به آن می‌گوییم نویز، چون تصادفی است و به آن می‌گوییم سفید، چون مثل نور سفید همه نام‌ها و رنگ‌های فرکانس‌ها را در خود دارد! تابع همبستگی یک نویز سفید (عکس Φ_{xx} یا همبستگی در دامنه زمان) یک تابع دلتاست:

$$\varphi_{nn}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0 \, e^{j\omega\tau} \, d\omega = \Phi_0 \, \delta(\tau)$$

← پروسه مارکوف: یک کلاس دیگر از فرآیندهای تصادفی (تغییر نویز سفید)، پروسه مارکوف است. اگر به زبان مهندسی یا (گوس-مارکوف) در ثابت و دامنه زمانی صحبت کنیم، یک پروسه گوسی-مارکوف به شکل زیر تعریف می‌شود:

برای هر فرآیند تصادفی پیوسته $x(t)$ و برای هر k : $t_1 < t_2 < \dots < t_k$

اگر داشته باشیم $F[x(t_k) \mid x(t_{k-1}), \dots, x(t_1)] = F[x(t_k) \mid x(t_{k-1})]$

(یعنی تابع توزیع احتمال $x(t_k)$ فقط تابع مقدار قبلی سیگنال یعنی $x(t_{k-1})$ باشد)

آنگاه فرآیند مزبور یک فرآیند تصادفی رتبه اول مارکوف می‌باشد.

به زبان کنترلی یا پردازش سیگنال، فرآیند یا سیگنال مارکوف مرتبه اول، همان نویز سفید فیلتر شده (فیلتر پایین‌گذر یا تابع انتقال LTV مرتبه اول) می‌باشد و به زبان ریاضی:

$$\frac{dx}{dt} + \beta_1(t)\, x = w$$

به طوری که w ورودی سیستم به شکل نویز سفید است.

اگر قید کنیم که سیگنال w (و به تبع آن x، چون رابطه خطی دارند) گوسی است آنگاه فرآیند مارکوف مذکور به یک فرآیند گوسی - مارکوفی است.

آمار این نوع فرآیند در زیر آمده است:

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|} + m^2 \\ \Phi_{xx} = \dfrac{2\beta\sigma^2}{\omega^2+\beta^2} \end{cases}$$

ما پروسه‌های مرتبه بالاتر مارکوف هم داریم که در حوصله این مقال نیست. در تمام آنها نیز می‌توان گفت در حالت سیستم‌های دینامیکی تقطیعی، وقتی با سیستم‌های درجه اول سروکار داریم که ورودی آن ایمپالس است، متشابهاً و متناظراً، وقتی ورودی یک سیستم دیفرانسیل درجه اول تصادفی یک نویز سفید باشد، آنگاه خروجی آن سیستم یک سیگنال مارکوف است و اگر این سیستم (دینامیک) درجه دوم باشد، آنگاه خروجی آن سیستم یک سیگنال مارکوف درجه دوم است و قس علیهذا!