نگهداری بهینه روابط پدیداری در فضای سه‌بعدی

مجتبی نوری بایگی
nouribaygi@ce.sharif.edu

علیرضا زارعی
zarei@mehr.sharif.edu

محمّد قدسی
ghodsi@sharif.edu

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف

چکیده: محاسبه فضای قابل دید یک ناظر یکی از مسائل مهم و کاربردی در هندسه‌ی محاسباتی و گرافیک کامپیوتری است. برای این مساله در فضای دوبعدی الگوریتم‌ها و ساختارهای بهینه‌ای ارائه شده است. یکی از این ساختارها مجتمع پدیداری[۱] است که روابط پدیداری بین اشیاء یک صحنه را در یک ساختار بهینه و قدرت‌مند نگه‌داری می‌کند و امکان محاسبه‌ی دقیق قابلیت دید یک ناظر را فراهم می‌کند. در مقابل، پدیداری در فضای سه‌بعدی دارای پیچیدگی بیشتری است و اغلب روش‌های ارائه شده برای آن مبتنی بر روش‌های گرافیکی و حل غیردقیق مسئله می‌باشد. با توجه به توانایی مجتمع پدیداری در حل مسائل پدیداری، تلاش‌هایی برای تعمیم مجتمع پدیداری دوبعدی به فضای سه‌بعدی صورت گرفته است. مهمترین نتیجه‌ی به‌دست آمده در این زمینه مربوط به [۱] است که مجتمع پدیداری سه‌بعدی برای n شیئ محدب را در زمان $O((n^3 + k)\log n)$ می‌سازد که k اندازه‌ی مجتمع و از مرتبه‌ی $O(n^4)$ است. با توجه به پیچیدگی محاسباتی این روش استفاده از آن در کاربردهای عملی بر اساس اعتراف ارائه کنندگان آن تقریباً غیرممکن است. در این مقاله ساختار جدیدی برای نگه‌داری روابط پدیداری اشیاء محدب در فضای سه‌بعدی ارائه می‌دهیم که به ترتیب دارای پیچیدگی محاسباتی و حافظه‌ای $O(n^3 \log)$ و $O(n^3)$ است و برای حل مسائل پدیداری قابل استفاده است. به عنوان یکی از کاربردهای این ساختار، نحوه‌ی محاسبه‌ی فضای قابل دید از یک ناظر نقطه‌ای در فضای سه‌بعدی را بیان می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: هندسه‌ی محاسباتی، مجتمع پدیداری، فضای قابل دید، دید در فضای سه‌بعدی.

۱ مقدمه

تعیین منظره یا فضای قابل دید یک ناظر کاربردهای متعددی در هندسه‌ی محاسباتی و گرافیک کامپیوتری از جمله نورپردازی، مجموعه‌ی نگهبان و بازی‌های کامپیوتری دارد. این مساله دارای گونه‌های مختلفی است که براساس نوع ناظر و فضای هدف طبقه‌بندی می‌شوند. برای هر طبقه از این مسائل الگوریتم‌های متعددی ارائه شده است که مبتنی بر داده‌ساختارهای خاص خود هستند. یکی از این ساختارهای قدرتمند مجتمع پدیداری است که برای توصیف کامل روابط و ویژگی‌های پدیداری صحنه ارائه شده است.

مجتمع پدیداری ساختاری توپولوژیک است که روابط پدیداری اشیاء صحنه را در خود نگاه می‌دارد و نخستین بار در [۲] برای اشیاء محدب موجود در صفحه ارائه گردید و سپس توسط افراد متعددی برای مسائل پدیداری مورد استفاده قرار گرفت [۳، ۴]. مفهوم اصلی در این ساختار، قطعات آزاد بیشینه[۲] است که شامل قطعات با طول بیشینه در فضا است که بجز در انتهای خود با هیچ شیئی برخورد نمی‌کنند و به عبارت دیگر دو انتهایشان بر روی دو شیئ قرار دارند. مجتمع پدیداری افراز و دسته‌بندی این قطعات آزاد بیشینه بنابر اشیائی است که در انتهایشان قرار می‌گیرد.

اندازه داده‌ساختار مجتمع پدیداری در صفحه که با k نشان

[۱] Visibility Complex
[۲] Maximal Free Segments

داده می‌شود متناسب با اندازه گراف پدیداری مماسی [۳] اشیاء صحنه است. چنانچه تعداد اشیاء درون صفحه n باشد، الگوریتم کارایی با زمان اجرای $O(n \log n + k)$ برای ساخت آن ارائه شده است [۲]. به کمک این ساختار منظره‌ی یک نقطه واقع در صفحه را می‌توان در زمان $O(m \log n)$ محاسبه کرد که m اندازه منظره است [۲].

تعمیمی از مجتمع پدیداری به فضای سه‌بعدی در [۵] با عنوان مجتمع پدیداری سه‌بعدی معرفی شده است که همانند مجتمع پدیداری دو بعدی بر مبنای افراز قطعات آزاد بیشینه است. اندازه‌ی مجتمع پدیداری سه‌بعدی که با k نشان داده می‌شود، برای n شیئ محدب محدود به دو حد $\Omega(n)$ و $O(n^4)$ است و الگوریتمی برای ساخت آن در زمان $O((n^3 + k) \log n)$ ارائه گردیده است [۱]. بااین‌حال به علت پیچیدگی ساختاری بالای مجتمع پدیداری سه‌بعدی، استفاده از این ساختار برای یافتن الگوریتم‌های کارا برای حل مسائل پدیداری تقریبا ناممکن است [۵].

از آنجا که روابط پدیداری بین اشیاء در فضای سه‌بعدی به شکل گسترده‌ای پیچیده است، معمولا الگوریتم‌ها و ساختارهای تعریف شده در فضای دوبعدی یا معادلی در فضای سه‌بعدی ندارند، مانند گراف پدیداری، و یا مانند مجتمع دیداری تعمیم آن‌ها در این فضا به علت پیچیدگی بالا عملاً غیرقابل استفاده است. به عنوان مثال گراف پدیداری مماسی مطابق با تعریف آن در صفحه قابل تعمیم به فضای سه‌بعدی نیست و معمولاً به گرافی انتزاعی اطلاق می‌شود که در آن رئوس گراف اشیاء هستند و بین رئوس متناظر با دو شیئ که نسبت به هم قابل دید هستند یالی وجود دارد [۱]. همچنین، مجتمع پدیداری سه‌بعدی اگرچه معادل دقیقی برای مجتمع پدیداری دوبعدی محسوب می‌شود ولی به علت پیچیدگی محاسباتی بالا کارایی آن را ندارد. علت تفاوت روابط پدیداری در فضای دوبعدی با فضای سه‌بعدی تفاوت ماهیت خط در این دو فضا است [۱]. خط در صفحه فضا را به دو قسمت تفکیک می‌کند که به این ویژگی تفکیک‌کنندگی [۴] گفته می‌شود ولی در فضای سه‌بعدی این خاصیت برای خط وجود ندارد.

در این مقاله روشی جدید برای بیان روابط پدیداری در فضای سه‌بعدی ارائه می‌کنیم که آن را می‌توان تعمیمی از مجتمع پدیداری دوبعدی در فضای سه‌بعدی دانست که به جای افراز قطعات آزاد بیشینه، صفحات را افراز می‌کند. در این ساختار صفحات بر اساس اشیائی که بر آن‌ها مماس هستند یا آن‌ها را قطع می‌کنند دسته‌بندی می‌شوند. این ساختار دارای اندازه $O(n^3)$ است و در زمان $O(n^3 \log)$ ساخته می‌شود. این داده‌ساختار را می‌توان برای بیان روابط پدیداری بین اشیاء و حل مسائل پدیداری به‌کار برد. یک نمونه از کاربرد این ساختار، تعیین منظره($V(q)$) برای یک ناظر نقطه‌ای(q) است که در زمان $O((|V(q)| + n^2) \log n)$ به‌دست می‌آید.

در ادامه، ابتدا مفاهیم و تعاریف مربوط به پدیداری در فضای سه‌بعدی بیان می‌شود. در بخش سوم، شبه‌گراف پدیداری به عنوان یک ساختار مبنایی تعریف می‌شود و الگوریتمی برای ساخت آن پیشنهاد می‌گردد. در بخش چهارم، نحوه‌ی نگاشت فضای سه‌بعدی هدف به فضای دوکانه در ساختار جدید بیان می‌شود. در بخش پنجم ساختار جدید و الگوریتم ساخت آن بیان می‌شود و محاسبه منظره به عنوان یکی از کاربردهای آن معرفی و برای آن یک الگوریتم ارائه می‌شود. در پایان نیز مطالب گفته شده خلاصه و جمع‌بندی می‌شوند.

۲ پدیداری در فضای سه‌بعدی

همان‌طور که گفتیم اصلی‌ترین تفاوت نقش خط در فضای دوبعدی با نقش آن در فضای سه‌بعدی خاصیت تفکیک‌کنندگی است. در فضای سه‌بعدی تنها صفحه دارای این خاصیت است یعنی یک صفحه فضا را به دو قسمت مجزا از هم تفکیک می‌کند. بنابراین سعی می‌کنیم معادلی برای پدیداری برحسب صفحات به دست آوریم. مفاهیم پایه پدیداری در فضای دوبعدی را می‌توان این‌گونه خلاصه کرد:

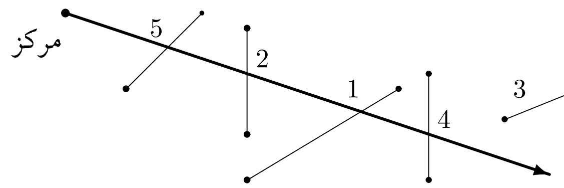
یک پرتو نیم‌خطی جهت‌دار است که از یک نقطه شروع می‌شود.یک قطعه بخشی از یک خط است که میان دو نقطه قرار دارد. به عبارت دیگر یک قطعه در راستای یک خط با دو پرتو در آن راستا و در جهات مختلف مشخص می‌شود. شیئ قابل دید از یک نقطه و در راستای یک پرتو، اولین شیئی است که توسط این پرتو قطع می‌شود. دو نقطه را متقابلاً پدیدار می‌گوییم اگر قطعه‌ی بین آن دو با هیچ شیئی برخورد نکند.

حال تعاریف جدیدی را برای پدیداری در فضای سه‌بعدی ارائه می‌دهیم. همان‌طور که گفتیم در این تعاریف، صفحه نقشی مانند نقش خط در فضای دوبعدی را به عهده دارد.

پدیداری بین چند نقطه از فضا بر اساس وضعیت پدیداری این نقاط در صفحات مشترک آنها تعریف می‌شود. صفحه‌ی A در فضای سه‌بعدی و نقطه‌ی p روی آن را در نظر بگیرید. یک

[۳] Tangent Visibility Graph: گراف پدیداری مماسی در صفحه به گرافی اطلاق می‌شود که در آن رئوس گراف اشیاء هستند و هر مماس مشترک بین دو شیئ بیانگر یک یال بین رئوس متناظر با آن دو شیئ است.

[۴] Separability



شکل ۱. تعیین گراف پدیداری مماسی بر اساس الگوریتم لی

پرتو از نقطه‌ی p در راستای صفحه‌ی A را زاویه‌ای تشکیل شده از دو نیم‌خط گذرا از p در A تعریف می‌کنیم. در این حالت یک شیئ را از یک نقطه‌ی p در راستای صفحه‌ی A پدیدار می‌گوییم اگر شیئ صفحه را قطع کرده باشد و به عبارت دیگر پرتوی از نقطه p در صفحه وجود داشته باشد که سطح مقطع شیئ را در بر می‌گیرد. یک قطعه در یک صفحه را به عنوان چندضلعی محدبی در آن صفحه در نظر می‌گیریم. قطعه را می‌توان محدود شده توسط تعدادی پرتو (زاویه‌های چند ضلعی) در آن صفحه دانست. در ساده‌ترین حالت یک قطعه مثلثی است که از ترکیب سه پرتو با یال‌های مشترک ایجاد می‌شود. در این حالت قطعه را می‌توان با سه رأس مثلث مشخص نمود. تمام نقاط یک قطعه متقابلاً پدیدار هستند اگر هیچ شیئی آن قطعه را قطع نکرده باشد.

تعاریف بالا پایه‌ای برای تعمیم روابط پدیداری دوبعدی در فضای سه‌بعدی خواهند بود.

۳ شبه‌گراف پدیداری

اکنون ساختاری به نام شبه‌گراف تعریف می‌کنیم که آن را می‌توان تعمیم یافته‌ی گراف پدیداری مماسی در فضای سه‌بعدی دانست. برای مجموعه اشیاء محدب و هموار $\mathcal{O}$، مجموعه‌ی رئوس این شبه‌گراف، $\mathcal{O}$ است. یال‌های این شبه‌گراف برخلاف گراف عادی که دو رأس را به هم مرتبط می‌کند، ارتباط بین سه رأس را نشان می‌دهند: به این ترتیب که هر صفحه‌ی مماس بر سه شیئ O_1، O_2 و O_3 یک یال $\{O_1, O_2, O_3\}$ را مشخص می‌کند هرگاه سه نقطه‌ی مماس متقابلاً پدیدار باشند (هیچ شیئی قطعه‌ی تشکیل شده توسط این سه نقطه را قطع نکند). با توجه به وضعیت اشیاء، هر سه رأس این شبه‌گراف حداکثر ۸ یال مشترک می‌توانند داشته باشد.

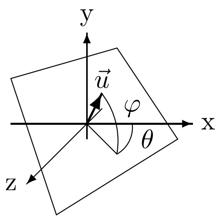
اندازه شبه‌گراف مربوط به n شیئ که با k نشان داده می‌شود، متناظر با تعداد یال‌های شبه‌گراف است که $O(n^3)$ و $\Omega(n)$ می‌باشد. در ادامه الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(n^3 \log n)$ برای ساخت شبه‌گراف ارائه می‌دهیم. با توجه به تناظری که بین گراف پدیداری دوبعدی و شبه‌گراف پدیداری وجود دارد وجود الگوریتم‌هایی با مرتبه‌ی $O(k \log n)$ و $O(k + n \log n)$ نیز برای آن قابل تصور است.

الگوریتمی که برای ساخت شبه‌گراف پدیداری ارائه می‌دهیم متناظر الگوریتم لی[۵] برای ساخت گراف پدیداری دوبعدی است. ابتدا الگوریتم لی را به طور خلاصه شرح می‌دهیم [۶].

صحنه را متشکل از تعدادی پاره‌خط در نظر می‌گیریم. برای هر رأس بقیه‌ی رئوس را بر اساس زاویه‌ی آن‌ها حول این رأس مرتب می‌کنیم. سپس آن‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم و همزمان لیستی از پاره‌خط‌هایی که در آن لحظه می‌بینیم نگه‌داری می‌کنیم. چنانچه رأس جدیدی که به آن برخورد می‌کنیم متعلق به پاره‌خط اول لیست باشد آن را گزارش می‌کنیم وگرنه می‌دانیم که این رأس توسط پاره‌خطی پوشانده شده است. شکل ۱ ایده‌ی کلی الگوریتم را نشان می‌دهد. در این‌جا لیست پاره‌خط‌ها $\{5, 2, 1, 4, 3\}$ می‌باشد.

حال الگوریتم ساخت شبه‌گراف را بیان می‌کنیم. برای سادگی اشیاء صحنه را کروی در نظر می‌گیریم. به ازای هر دو شیئ O_1 و O_2 از فضا الگوریتم زیر را برای تشخیص شبه‌یال‌هایی که با دو رأس متناظر با این دو شیئ تشکیل می‌شوند اجرا می‌کنیم. صفحات مماس بر یک شیئ فضا و دو شیئ O_1 و O_2 براساس زاویه‌ای که با یک صفحه‌ی مرجع مماس بر O_2 و O_1 مرتب می‌کنیم. سپس رئوس فضا را براساس ترتیبی که به دست می‌آید دیدار می‌کنیم که این کار معادل روبش فضا توسط صفحه‌ای دوران کننده و مماس بر O_1 و O_2 است. در این‌جا هم لیستی از اشیاء که توسط صفحه‌ی روبش قطع شده‌اند نگه‌داری می‌کنیم و با برخورد با هر شیئ جدید، موقعیت آن را با بقیه‌ی مثلث‌های درون لیست بررسی می‌کنیم و بر حسب مورد آن را به لیست خود اضافه می‌کنیم یا از لیست خارج می‌کنیم.

---
[۵] Lee



شکل ۲. پارامتری کردن صفحه با استفاده از دو زاویه برای جهت خط عمود بر صفحه و فاصله‌ی صفحه تا مبداء

زمان لازم برای مرتب کردن صفحات مماس $O(n\log n)$ و برای هر کدام از عملیات درج یا حذف از لیست، $O(\log n)$ است. در نتیجه الگوریتم روبش در زمان $O(n\log n)$ انجام می‌شود.

با توجه به این که $n^۲$ زوج شیئ وجود دارد، $O(n^۲)$ بار روبش انجام می‌گردد و کل الگوریتم از مرتبه‌ی $O(n^۳\log n)$ خواهد بود.

۴ پارامتری کردن صفحات

در این بخش روشی برای پارامتری کردن صفحات در فضای سه‌بعدی ارائه می‌دهیم. از این روش برای بهتر بیان کردن روابط موجود در ساختاری که در بخش بعد معرفی می‌کنیم استفاده خواهیم کرد.

هر صفحه را با یک نقطه در فضای نگاشت که به آن فضای دوگانه می‌گوییم، متناظر می‌گیریم. فضای صفحات سه‌بعد دارد، بنابر این فضای دوگانه هم دارای سه‌بعد است. پاره‌خط عمود بر صفحه که از مبدا می‌گذرد را در نظر بگیرید (برای حالتی که صفحه از مبدا می‌گذرد خط گذرا از مبدا عمود بر صفحه را استفاده می‌کنیم) (شکل ۲). جهت این پاره‌خط (یا خط) را با مختصات کروی (θ,φ) و طول این پاره‌خط را با u نمایش می‌دهیم. اکنون این صفحه را به نقطه‌ی (θ,φ,u) در فضای دوگانه نگاشت می‌کنیم. این نگاشت فضای صفحات را به $R\times[-\pi/۲,\pi/۲]\times[۰,۲\pi]$ نگاشت می‌کند.

۵ مجتمع پدیداری جزئی سه‌بعدی

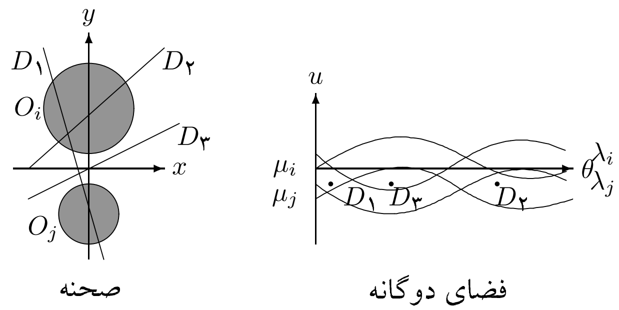
در این بخش براساس تعاریف پدیداری در فضای سه بعدی ساختاری ارائه می‌دهیم که آن را می‌توان تعمیم یافته‌ی مجتمع پدیداری دوبعدی به فضای سه‌بعدی دانست. این ساختار را که به آن مجتمع پدیداری جزئی سه‌بعدی می‌گوییم ابتدا در حالت‌های ابتدایی بررسی می‌کنیم و سپس در حالت کلی آن را تعریف می‌کنیم و الگوریتمی برای ساختن آن ارائه می‌دهیم.

یک کره و یک صفحه در فضا را در نظر بگیرید و فرض کنید که صفحه در فضا به طور پیوسته قابل حرکت است. در این حرکت مرز حالاتی که صفحه با شیئ برخورد می‌کند با حالاتی که با آن برخورد ندارد مواقعی است که صفحه بر شیئ مماس می‌گردد. بر این اساس می‌توان این مرز را در فضای دوگانه محاسبه کرد و صفحات فضا را با این مرز تقسیم‌بندی نمود.

صفحه‌ای که بر یک کره مماس است برای این‌که در ضمن حرکت بر آن کره مماس بماند، دو درجه آزادی برای حرکت دارد. در ادامه منظور ما از جهت صفحه جهت خط عمود بر صفحه است که با دو پارامتر (θ,φ) مشخص می‌گردد.

برای هر جهت (θ,φ) در فضای سه‌بعدی دو صفحه $(\theta,\varphi,\lambda(\theta,\varphi))$ و $(\theta,\varphi,\mu(\theta,\varphi))$ مماس بر شیئ موجود است. $\lambda(\theta,\varphi)$ و $\mu(\theta,\varphi)$ دو رویه را در فضای دوگانه مشخص می‌کنند. این دو رویه مرزهایی را در فضای دوگانه به وجود می‌آورند که صفحات فضا را بر اساس اشیائی که با آن‌ها برخورد می‌کنند تقسیم می‌کنند. به عنوان مثال هر صفحه (θ,φ,u) که رابطه‌ی $\mu(\theta,\varphi)<u<\lambda(\theta,\varphi)$ برای آن برقرار باشد با شیئ برخورد می‌کند. این رویه‌ها را که از نقاط دوگانه صفحات مماس بر شیئ تشکیل شده‌اند، رویه مماسی و حجم محصور بین رویه‌های یک شیئ را حجم مماسی آن شیئ می‌گوییم.

شکل ۳ برشی از صحنه و فضای دوگانه را نشان می‌دهد. صحنه متشکل از دو شیئ O_i و O_j است و تقاطع سه صفحه $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ با صفحه xy نشان داده شده است. در سمت چپ شکل، φ-برشی(برشی از فضای دوگانه که دارای φ ثابت است) از سطوح مماسی دو شیئ دیده می‌شود. فرض کرده‌ایم که نقاط متناظر صفحات $D_{i,i=۱,۲,۳}$ در فضای دوگانه روی برش ما از این فضا قرار دارند. چنانچه می‌بینیم صفحه $D_۱$ که هر دو شیئ را قطع کرده است درون حجم‌های مماسی هر دو شیئ قرار دارد و صفحه $D_۳$ که اشتراکی با دو شیئ ندارد خارج حجم‌های مماسی آن‌هاست. توجه کنید که دامنه‌ی θ، $[۰,۲\pi]$



شکل ۳. برشی از صحنه و فضای دوگانه

و دامنه φ، $[-\pi/2, \pi/2]$ می‌باشد.

در حالت بالا نقاط اشتراک رویه‌های مماسی دو شیئ منحنی‌ای تک بعدی ایجاد می‌کنند که متناظر صفحاتی است که بر هر دو شییء مماس می‌باشند.

حال اگر فضا شامل سه شیئ باشد تقسیم‌بندی‌ای مانند حالات قبل ایجاد می‌شود، با این تفاوت که در این حالت تقاطع رویه‌های مماسی سه شیئ در تعدادی نقطه(حداکثر ۸ نقطه) اشتراک خواهند داشت. هر کدام این نقاط صفحه‌ی مماس بر سه شیئ را نشان می‌دهند.

از مباحث بالا این چنین برداشت می‌شود که برای چینشی از اشیاء، رویه‌های مماسی اشیاء مختلف، فضای دوگانه را به بخش‌های پیوسته‌ای تقسیم می‌کنند که تعلّق یک صفحه به هر بخش نماینده اشیائی است که صفحه با آن‌ها برخورد می‌کند.

اکنون تعریف کلی مجتمع پدیداری جزئی را ارائه می‌دهیم. در فضای سه‌بعدی n شیئ محدب را در نظر بگیرید. برای یکپارچگی ساختار، شیئ نامحدودی را که اشیاء صحنه را در بر گرفته است به فضا اضافه می‌کنیم. مجموعه‌ی قطعات آزاد بیشینه را در نظر بگیرید. منظور از قطعه آزاد بیشینه در این جا قطعات مثلث شکلی هستند که به‌جز در رئوس خود با شیئ دیگری برخورد نمی‌کنند. مجتمع پدیداری را تقسیم‌بندی این مجموعه قطعات براساس اشیائی که رئوسشان بر آن‌ها واقع شده‌اند تعریف می‌کنیم. مجتمع پدیداری جزئی مانند مجتمع پدیداری دوبعدی از چند نوع عنصر تشکیل شده است. این عناصر ۰ تا ۴ بعدی هستند که به ترتیب افزایش بعد عبارتند از: رأس، جزء صفربعدی که متناظر است با یک صفحه مماس بر سه شیئ؛ ضلع، جزء یک‌بعدی که متناظر با مجموعه‌ی صفحاتی است که بر دو شیئ مماس و با شیئ سومی برخورد می‌کنند؛ وجه، جزء دوبعدی که متناظر مجموعه صفحاتی است که بر یک شیئ مماس و با دو شیئ دیگر برخورد می‌کنند؛ و حجم، جزء سه‌بعدی که متناظر مجموعه صفحاتی است که به سه شیئ برخورد می‌کنند.

در فضای دوگانه هر یک از اجزای مجتمع مجاور و یا محدود شده توسط تعداد محدودی از اجزای دیگرآن است. به عنوان مثال روابط زیر برای اجرای محتمع جزئی برقرار است: هر رأس مجاور ۶ یال و ۱۲ وجه است؛ هر یال با دو رأس محدود شده است؛ هر وجه با ۴ رأس محدود شده و مجاور ۴ یال است؛ و هر حجم با دو زنجیره وجه، یال و رأس محدود شده است.

برای جمله‌ی اول، سه شیئ A، B و C و مماس مشترک آن‌ها را در نظر بگیرید. تعداد یال‌های مجاور این رأس در فضای دوگانه (مماس مشترک) این گونه به دست می‌آید که اگر صفحه‌ی مماس را بر دو شیئ A و B مماس نگاه داریم و آن را حرکت دهیم، دو یال به دست می‌آید: یک یال مجموعه‌ی صفحات مماس بر A و B که با C برخورد می‌کنند و یال دیگر مجموعه‌ی صفحات مماس بر A و B که با C برخورد نمی‌کنند. به این ترتیب ۶ یال مجاور این رأس به دست می‌آید. در مورد جمله‌ی سوم چون هر وجه مجموعه‌ی قطعاتی است که بر یک شیئ مماس و با دو شیئ دیگر برخورد می‌کند، برای هر یک از آن دو شیئ صفحات این مجموعه در دو وضعیت بر این شیئ مماس می‌شوند (بالا و پایین شیئ) و هر کدام از این حالات نشان‌دهنده‌ی یک یال هستند.

۵-۱ ساختار مجتمع جزئی

اندازه‌ی مجتمع با تعداد رئوس آن مشخص می‌شود زیرا همان‌طور که گفته شد تعداد اجزای مجتمع با بعد بالاتر مجاور یک جزء با بعد کمتر محدود می‌باشد. تعداد رئوس برابر است با $\Omega(n)$ و $O(n^3)$ که n تعداد اشیاء محدب است. در حقیقت اندازه‌ی مجتمع پدیداری جزئی یک صحنه متناظر اندازه‌ی شبه‌گراف پدیداری آن صحنه می‌باشد.

عناصر مجتمع از رأس، یال، وجه و حجم تشکیل شده‌اند. هر رأس دارای ۳ اشاره‌گر به اشیائی است که بر آن‌ها مماس است. همچنین دارای ۶ اشاره‌گر به یال‌های مجاور و ۱۲ اشاره‌گر به حجم‌های مجاور خود در فضای دوگانه است. به همین ترتیب هر یال دو اشاره‌گر به اشیائی که بر آن‌ها مماس است، یک اشاره‌گر به شیئی که با آن برخورد می‌کند و اشاره‌گرهایی به اجزای مجاور خود در فضای دوگانه دارد. ساختار وجه و حجم هم به همین ترتیب به دست می‌آیند. توجه کنید که مجتمع پدیداری جزئی مانند مجتمع پدیداری دوبعدی یک ساختار توپولوژیک است.

ساختن مجتمع پدیداری را می‌توان با یک الگوریتم پویش رئوس آن انجام داد. وقتی که یک رأس پویش می‌شود، رابطه‌ی بین یال‌ها و وجه‌ها و حجم‌ها باید به‌روز گردد. الگوریتم‌هایی که برای ساخت شبه‌گراف پدیداری بیان شد را می‌توان در این‌جا به کار برد و رأس‌های مجتمع را پویش کرد. پیچیدگی الگوریتمی که ارائه کردیم $O(n^۳ \log n)$ بود. با توجه به محدود بودن رابطه‌ی هر جزء مجتمع با اجزای دیگر، ساخت مجتمع پدیداری را نیز می‌توان در $O(n^۳ \log n)$ انجام داد.

۵-۲ کاربرد مجتمع پدیداری جزئی در محاسبه‌ی منظره

تعیین منظره یا فضای قابل دید از یک ناظر به معنی تعیین مجموعه‌ی نقاطی از فضا است که از ناظر قابل دید هستند. با توجه به کاربردهای متعدد این مساله مطالعات گسترده‌ای در موردآن صورت گرفته است. در فضای سه بعدی تمامی الگوریتم‌هایی که برای حل این مساله ارائه شده‌اند مربوط به کاربردهای گرافیکی است که براساس موارد کاربرد خاص طراحی شده‌اند و دقت آنها در حد دقت مورد نیاز در صفحه‌ی تصویر یا اشیاء قابل دید است. در [۱] این الگوریتم‌ها مرور شده‌اند. همچنین در [۵] نحوه‌ی نمایش منظره یک ناظر نقطه‌ای براساس مجتمع پدیداری سه بعدی بیان شده است که به علت پیچیدگی بالای آن الگوریتم کاملی برای آن ارائه نگردیده است.

در این بخش با استفاده از مجتمع پدیداری جزئی الگوریتمی برای مسئله‌ی محاسبه‌ی فضای قابل دید یک ناظر نقطه‌ای بیان می‌کنیم. در این بخش از مفاهیم کلاسیک پدیداری استفاده خواهیم کرد و به مجتمع پدیداری جزئی که در بالا تعریف کردیم با نام مجتمع اشاره می‌کنیم. محاسبه‌ی فضای قابل دید یک ناظر نقطه‌ای، به معنای مشخص کردن اشیائی است که پرتوهای فرستاده شده از نقطه‌ی دید می‌بینند. برای این کار باید دسته پرتوهایی که اشیاء یکسانی را می‌بینند از هم تفکیک کنیم و به بیان دیگر در یک روبش مرز تغییر این اشیاء را مشخص کرد.

فرض می‌کنیم نقطه‌ی دید خارج پوشش محدب[۶] اشیاء باشد. صفحه‌ای گذرا از نقطه‌ی دید را که با هیچ شیئی برخورد نکند در نظر می‌گیریم. این صفحه را صفحه‌ی روبش[۷] می‌گوییم. اگر این صفحه را حول محوری گذرا از نقطه‌ی دید دوران دهیم، صفحات متناظر آن در فضای دوگانه خم p_v را تشکیل می‌دهند. این خم وجه‌های مجتمع را در نقاطی قطع می‌کند. برخورد با مجتمع در یک وجه متناظر صفحه‌ای مماس بر یک شیئ است. برخورد در یک یال (اشتراک دو وجه) متناظر صفحه‌ای مماس بر دو شیئ و برخورد با یک رأس (اشتراک سه وجه) متناظر صفحه‌ای مماس بر سه شیئ است.

در حین حرکت صفحه‌ی روبش، سطح مقطع اشیائی که با آن برخورد می‌کنند وضعیت دوبعدی پویایی از اشیاء بر روی آن ایجاد می‌کنند. مجتمع پدیداری دوبعدی این صحنه‌ی پویا را در لحظه نگه‌داری می‌کنیم. با داشتن مجتمع پدیداری دوبعدی سطوح مقطع اشیاء می‌توان منظره‌ای را که ناظر نقطه‌ای در آن صفحه می‌بیند مشخص کرد. از طرفی در حین حرکت چنانچه موقعیت توپولوژیک سطوح مقطع نسبت به هم تغییر نکند مجتمع پدیداری دوبعدی هم تغییر نخواهد کرد و تغییری در اشیاء قابل دید از ناظر ایجاد نمی‌شود. از این مطلب نتیجه می‌شود که برای محاسبه‌ی فضای قابل دید کافی است که مجتمع پدیداری دوبعدی صحنه‌ی روی صفحه‌ی روبش را در هنگام روبش نگهداری کنیم و هرگاه تغییری در مجتمع پدیداری به وجود آمد، فضای قابل دید را هم در آن صفحه به‌روز کنیم.

همان‌طور که گفتیم در مدتی که صفحه‌ی روبش با وجهی از مجتمع برخورد نداشته باشد تعداد اشیاء برخورد کرده با صفحه‌ی روبش و در نتیجه تعداد سطح مقطع اشیاء در صفحه‌ی روبش ثابت است و نگه‌داری منظره در حین حرکت صفحه‌ی روبش معادل نگه‌داری منظره‌ی یک نقطه در صفحه‌ای شامل اشیاء متحرک است. این کار را در هر رخداد پدیداری می‌توان در $O(\log m)$ انجام داد که m تعداد اشیاء برخورد کرده با صفحه‌ی روبش است [۳] .

با ادامه‌ی دوران صفحه‌ی روبش، خم p_v در نقطه‌ای با مجتمع برخورد می‌کند. اگر برخورد p_v با i وجه مجتمع باشد ($i = ۱, ۲, ۳$ به ترتیب متناظر وجه، یال و نقطه) به این معنی است که k شیئ شروع به برخورد با صفحه‌ی روبش کرده‌اند و

[۶] Convex Hull
[۷] Sweep Plane

l شیئ دیگر برخورد خود را خاتمه داده‌اند ($k + l = i$). شروع برخورد با شیئ به این معنی است که یک شیئ را باید در مجتمع پدیداری دوبعدی وارد کنیم. این کار را می‌توان در $O(v \log n)$ انجام داد که v اندازه‌ی منظره است [۳]. هنگامی که شیئی برخورد خود را با صفحه‌ی روبش خاتمه می‌دهد وجه‌های متناظر آن در مجتمع پدیداری دوبعدی از بین می‌روند. این حذف را می‌توان در $O(v)$ انجام داد که باز هم v اندازه‌ی منظره در مجتمع دوبعدی است [۳].

ابتدا هزینه‌ی تغییرات در نقاط برخورد p_v با مجتمع را به دست می‌آوریم. تعداد این رخدادها $O(n)$ است که آن‌ها را می‌توان در یک صف با هزینه‌ی $O(n \log n)$ نگه‌داری کرد. هر شیئ یک بار شروع به برخورد با صفحه روبش می‌کند و یک بار برخورد خود را قطع کرد و اندازه‌ی منظره در صفحه‌ی روبش از مرتبه تعداد اشیاء برخورد کرده با صفحه‌ی روبش در آن لحظه است. بنابراین هزینه‌ی زمانی انجام همه‌ی این رخدادها $O(n^۲ \log n)$ است.

حال هزینه‌ی نگه‌داری مجتمع پدیداری دوبعدی و منظره در آن را در مدتی که تعداد اشیاء برخورد کرده با صفحه‌ی روبش ثابت است محاسبه می‌کنیم. فرض کنید در طول قطعه‌ای از p_v که با وجهی از مجتمع برخورد نمی‌کند، تعداد اشیاء برخورد کرده با صفحه‌ی روبش m باشد. مجتمع پدیداری سطح مقطع اشیاء در صفحه‌ی روبش و یا منظره ناظر نقطه‌ای زمانی تغییر می‌کند که یا یک دومماسی(خطی که بر دو شیئ مماس است) بر شیئ سومی هم مماس گردد که به معنی تغییر در مجتمع پدیداری دوبعدی است، و یا مماس بر یک شیئ از نقطه‌ی دید، بر شیئ دیگری هم مماس گردد که به معنی تغییر در منظره است. تعداد دو مماسی‌ها در صفحه‌ی روبش $O(m^۲)$ و تعداد مماس‌ها از نقطه‌ی دید $O(m)$ است. در طول مسیر p_v سطح مقطع هر شیئ در مدتی که آن شیئ با صفحه‌ی روبش برخورد دارد، $O(n)$ دومماسی با سایر سطوح مقطع روی صفحه‌ی روبش می‌سازد. با توجه به این‌که اشیاء محدب فرض شده‌اند و با هم برخوردی ندارند، در طول حرکت صفحه‌ی روبش این دومماسی‌ها می‌توانند $O(n)$ بار توسط اشیاء دیگر قطع گردند. تعداد این رخدادها برای تمام اشیاء $O(n^۲)$ است و در این رخدادها ساختار توپولوژیک مجتمع پدیداری دوبعدی تغییر می‌کند و مجتمع پدیداری را به‌روز کنیم. هزینه‌ی این به‌روز رسانی $O(\log m)$ است [۳] و هزینه‌ی کل آن‌ها $O(n^۲ \log n)$ خواهد بود. نوع دیگر رخداد پدیداری همان‌طور که گفتیم وقتی است که خط مماس از نقطه‌ی دید بر یک شیئ توسط شیئی دیگر قطع گردد. دراین حالت وضعیت پدیداری شیئ قطع کننده نسبت به نقطه‌ی دید تغییر خواهد کرد. چون در هر کدام از این رخدادها منظره تغییر می‌کند تعداد کل این رخدادها از مرتبه‌ی اندازه‌ی منظره خواهد بود. به‌روز رسانی منظره‌ی مجتمع پدیداری دوبعدی در این نوع رخدادها هم $O(\log m)$ است [۳].

از بررسی‌های بالا نتیجه می‌شود که اگر اندازه‌ی منظره ناظر q را با $|V(q)|$ نمایش دهیم هزینه‌ی حساس به خروجی الگوریتم ارائه شده $O((|V(q)| + n^۲) \log n)$ می‌باشد.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله داده‌ساختار مجتمع پدیداری به عنوان یک ابزار قدرتمند جهت توصیف روابط پدیداری اشیاء موجود در یک صحنه مورد بررسی قرار گرفته است. مجتمع پدیداری که نخستین بار در [۲] معرفی شده است روابط پدیداری اشیاء موجود در یک صفحه را به صورت بهینه‌ای توصیف می‌کند. این ساختار مبتنی بر قطعات آزاد بیشینه‌ای است که تمام نقاط روی آنها دارای دید یکسانی در آن امتداد هستند. در [۵] این داده‌ساختار برای استفاده در فضای سه‌بعدی تعمیم داده شده است. ساختاری که به این ترتیب ایجاد می‌شود دارای پیچیدگی بسیار است و عملاً غیر قابل استفاده است. این امر در موارد زیادی رخ می‌دهد و به‌طور خاص در مورد مسائل پدیداری با توجه به تفاوت بین ماهیت دید در این فضا پیچیده‌تر از پدیداری در فضای دوبعدی است.

به همین دلیل در این مقاله تعریف جدیدی از پدیداری در فضای سه‌بعدی ارائه شده است که ضمن اینکه تعاریف موجود در فضای دوبعدی در آن حفظ شده است، از پیچیدگی محاسباتی آن نیز کاسته شده است تا قابل استفاده در کاربردهای عملی باشد. این ساختار بر خلاف معادل دوبعدی آن، براساس صفحه‌های مماسی و قابلیت دید براساس این صفحات است. اندازه‌ی این ساختار برای m شیئ محدب در فضای سه بعدی $O(n^۳)$ است و در زمان $O(n^۳ \log n)$ قابل ساخت است و الگوریتمی برای ساخت آن نیز ارائه گردیده است.

ساختار پیشنهاد شده می‌تواند برای حل مسائل پدیداری استفاده شود که به عنوان یک نمونه از کاربردهای آن، منظره‌ی قابل دید از یک ناظر نقطه‌ای محاسبه شده است. این کار برای ناظر q با منظره $V(q)$ در زمان $O((|V(q)| + n^۲) \log n)$ انجام می‌شود.

کارهایی که در ادامه‌ی این مقاله می‌توان انجام داد در دو دسته‌ی مختلف قرار می‌گیرند: نخست یافتن موارد کاربرد ساختار پدیداری ارائه شده و حل مسائل کلاسیک این حوزه به

کمک آن است که یک نمونه از آن در بخش قبل بیان گردید. دسته‌ی دیگر مربوط به بررسی و بهبود خود ساختار است که ممکن است به کاهش پیچیدگی محاسباتی آن یا ایجاد سهولت در به‌کارگیری آن در کاربردهای مختلف گردد.

مراجع

[1] Durand, F. *3D Visibility: Analytical Study and Applications.* PhD thesis, University of Joseph Fourier, 1997.

[2] Pocchiola, M., and Vegter, G. *The visibility complex.* Internat. J. Computational Geometry Appl., 1996. special issue devoted to ACM-SoSG'93.

[3] Rivière, S. *Dynamic visibility in polygonal scenes with the visibility complex.* Comm. 13th Annu. ACM Symposium. Computational Geometry, 1997.

[4] Orti, R., Durand, F., Rivièr, S., and Puech, C. *Using the visibility complex for radiosity computation.* Proceeding ACM Workshop on Applied Computational Geometry, Philadelphia, May 1996

[5] Durand, F., Drettakis, G., and Puech, C. *The 3D visibility complex.* ACM Transaction on Graphics, 21:2 (2002). pp. 176-206.

[6] Kitzinger, J. *The visibility Graph Among Polygonal Obstacles: a Comparison of Algorithms.* Technical Report, University of New Mexico, 2003.