دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

رساله‌ی دکتری

مهندسی کامپیوتر

عنوان

تقسیم منصفانه و استراتژیک منابع

نگارش

مسعود صدیقین

استاد راهنما

دکتر محمد قدسی

مهر ۱۳۹۷

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

در این رساله، به بررسی مسئله **تقسیم منصفانه** می‌پردازیم. در این مسئله، یک منبع باید در بین تعدادی از افراد با ترجیحات و سلیقه‌های متفاوت تقسیم شود و از ما خواسته شده‌است که این کار را با رعایت انصاف انجام دهیم. منبع، می‌تواند پیوسته و تقسیم‌پذیر (مانند زمان) باشد و یا از تعدادی شیء گسسته و غیرقابل‌تقسیم (مانند تعدادی کتاب) تشکیل شده‌باشد. حالت اول به مسئله «برش کیک» معروف است. برای مفهوم انصاف نیز تعریف‌های مختلفی ارائه‌شده‌است، مانند: تناسب، بدون‌رشک بودن، تساوی و یا رعایت سهم بیش‌کمینه. در این رساله، ابتدا به تشریح شکل کلی مسئله و تعریف‌های ریاضی هر کدام از این مفاهیم خواهیم‌پرداخت. نتایج این رساله، در رابطه با دو معیار سهم بیش‌کمینه و بدون‌رشک است. در ابتدا، نشان می‌دهیم که نسبت ۳/۴ از معیار سهم بیش‌کمینه را می‌توان در یک تخصیص منصفانه تضمین کرد. این، بهترین تضمین اثبات شده قبلی که ۲/۳ است را بهبود می‌دهد. به علاوه، ما مطالعه در این زمینه را برای توابع مطلوبیت غیرجمعی نیز گسترش می‌دهیم. برای توابع ارزش زیرپیمانه‌ای و XOS ما به ترتیب نشان می‌دهیم که تضمین ۱/۳ و ۱/۵ از سهم بیش‌کمینه امکان‌پذیر است. ما همچنین، تضمین معیار سهم بیش‌کمینه را در حالتی بررسی می‌کنیم که سهم افراد از منبع متفاوت است. برای این حالت ما معیار سهم بیش‌کمینه وزن‌دار را معرفی می‌کنیم که در حقیقت، گسترشی از معیار سهم بیش‌کمینه برای سهم‌های نابرابر است. سپس، نشان می‌دهیم که با در نظر گرفتن این فرض که ارزش هرشیء برای هر فرد به اندازه کافی کم است، نسبت ۱/۲ از این معیار قابل تضمین است.

در بخش دوم این رساله،ما معیار بدون رشک بودن را برای یک منبع پیوسته بررسی می‌کنیم و سازوکاری ارائه می‌دهیم که صادقانه و بدون‌رشک است و در عین حال، تعداد برش‌هایی که بر روی منبع اعمال می‌شود حداکثر دو برابر مقدار بهینه است.

کلمات کلیدی: ۱ـ تقسیم منصفانه، ۲ـ سهم بیش‌کمینه، ۳ـ تقسییم بدون رشک، ۴ـ تعادل رقابتی ۵ـ الگوریتم های تقریبی.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل ۱

مقدمه

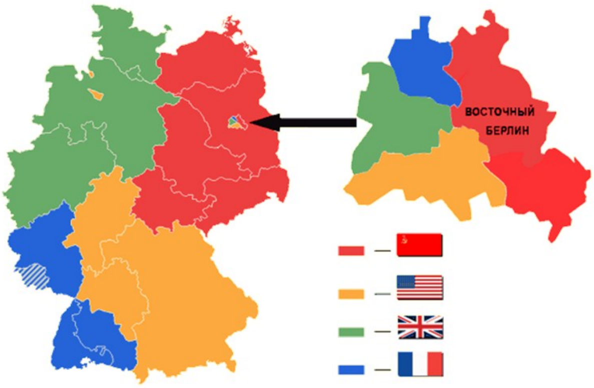
"خوب بودن راحت است.کار سخت، منصف بودن است"

— بینوایان، ویکتور هوگو [۵۳]

تقسیم منصفانه یکی از اصلی‌ترین و مناقشه برانگیزترین مسئله‌ها در طول تاریخ بشر بوده‌است. روش‌های تقسیم منصفانه در زمینه‌های گوناگون، از جمله سیاست، فلسفه، اقتصاد، علوم کامپیوتر و علوم اجتماعی مورد استفاده قرار گرفته‌است. پیشینه بسیاری از این روش‌ها، مانند روش «تقسیم و انتخاب» [۱] به ده‌ها هزار سال پیش باز می‌گردد. در ابعاد کلان، تقسیم منابع طبیعی (مانند سوخت‌های فسیلی، منابع آبی، زمین و ...) از جمله مسائل مهم در زمینه روابط بین کشورها است که سوژه اصلی بسیاری از نزاع‌ها و جنگ‌ها، به خصوص در صده اخیر بوده است [۷۵] . در ابعاد کوچک‌تر، روش‌های منصفانه برای تقسیم اشیا در مسائلی مانند تقسیم ارث، تقسیم اموال بعد از جدایی، تقسیم دارایی یک شرکت ورشکسته میان سهام‌داران، و یا تقسیم حافظه و پردازنده میان کاربران در رایانش ابری کاربرد دارند.

به طور کلی، تقسیم منصفانه زمانی مطرح می‌شود که قرار است یک یا چند منبع بین تعدادی بازیکن با علایق و ترجیحات مختلف تقسیم شود. این مسئله، برای زمان طولانی در فلسفه، اقتصاد، علوم سیاسی و ریاضیات و علوم کامپیوتر مورد توجه و مطالعه قرار گرفته است [۶۳، ۱۹، ۲۳، ۶۷، ۱۸، ۶۶]. یکی از مهم‌ترین گام‌ها در این زمینه در اقتصاد و با معرفی مسئله برش کیک در سال ۱۹۴۸ و در دانشگاه ملی لهستان توسط باناخ، ناستر و اشتاینهاز صورت گرفته است. مدل ریاضی مسئله برش کیک به دلیل جذابیت ریاضی، به سرعت در بین ریاضی‌دانان آن زمان مطرح و توجه زیادی را به خود جلب نمود، به گونه‌ای که مسئله تقسیم بدون رشک کیک یکی از مهم‌ترین مسئله‌های قرن بیستم در ریاضیات محسوب می‌شود که نهایتا توسط برامز و تیلور در سال

[1] Cut and choose



شکل ۱.۱: تقسیم آلمان توسط متفقین

۱۹۹۶ حل شد [۲۱] .

در ابتدا، جهت تبیین اهمیت موضوع و آشنایی با مسئله‌هایی که در این زمینه با آنها مواجه هستیم، مثال‌هایی از تقسیم منصفانه در واقعیت را بیان می‌کنیم.

تقسیم آلمان

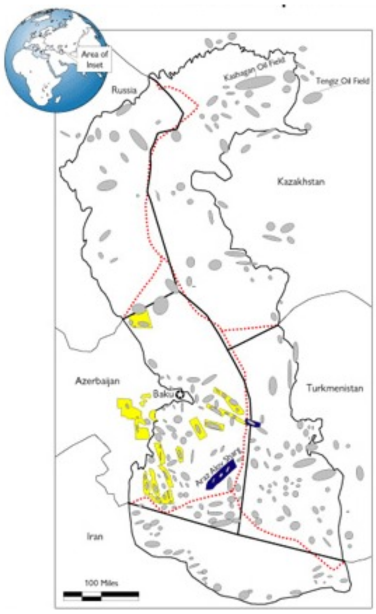
در هفدهم جولای ۱۹۴۵ و در همایش پستدام [۲]، بعد از فتح برلین توسط متفقین و تسلیم بی‌قید و شرط آلمان، مسئله تقسیم نواحی اشغالی بین چهار کشور پیروز، یعنی امریکا، انگلستان، فرانسه و اتحادیه جماهیر شوروی مطرح شد.

هرکدام از این کشورها، بسته به این‌که کدام منطقه را تحت فرماندهی خود قرار دهند، ترجیحات متفاوتی داشتند. برای مثال فرانسه ترجیح می‌داد قسمتی که به این کشور می‌رسد در نزدیکی مرز مشترکش با آلمان باشد و یا امریکا علاقه‌مند بود نفوذ بیشتری در قسمت‌های شمالی داشته‌باشد. همچنین وسعت و جغرافیای سیاسی این مناطق نیز مورد توجه این کشورها بوده‌است. در شکل ۱.۱ می‌توانید نتیجه این تقسیم‌بندی را ببینید. در این تقسیم‌بندی، علاوه بر رعایت مطلوبات هر کشور، لازم بود معیارهای دیگری مانند متصل بودن ناحیه متعلق به هر کشور نیز رعایت شود. به طور خاص، چون شهر برلین از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بود، به گونه‌ای تقسیم شد که هر چهار کشور از آن سهمی داشته‌باشند.

تقسیم دریای کاسپین(خزر)

تا قبل از فروپاشی اتحاد جماهیر شوروی در سال ۱۹۹۱، دریای کاسپین تنها در بین دو کشور ایران و شوروی قرار داشت. اما اکنون این دریا با پنج کشور ایران، روسیه، آذربایجان، ترکمنستان و قزاقستان مرز مشترک دارد.

[2] Postdam Conference



شکل ۲.۱: طرح خطوط میانه برای تقسیم دریای خزر

این دریا شامل منابع بسیار ارزشمند، از جمله ۹۰ درصد کل خاویار جهان است. حجم نفت و گاز این دریا، پنجاه میلیارد بشکه نفت و سیصد هزار میلیارد متر مکعب گاز تخمین زده شده است [۱] . افزون بر این، مسیرهای آبی نقش مهمی را در حمل و نقل و بازرگانی و مسائل سیاسی ایفا می‌کنند. همه این‌ها باعث شده‌است که تلاش‌های زیادی برای تقسیم این دریا و منابع آن در بین پنج کشور صورت بپذیرد. مذاکرات در این زمینه از سال ۱۹۹۳ آغاز و تا ۲۰۱۸ ادامه داشته است. در طول این مدت، پیشنهادهای ارائه‌شده همواره با مخالفت حداقل یک کشور روبرو شده‌است. برای مثال، در روش خط‌های میانه که توسط روسیه در سال ۲۰۰۲ ارائه شد، سطح دریا برای حمل و نقل به صورت مشترک باقی می‌ماند، اما عمق آن با استفاده از امتداد خطوط مرزی تقسیم می‌شد. بر این اساس، ۲۰ درصد کل عمق دریا به روسیه، ۲۹٫۵ درصد به قزاقستان، ۲۱ درصد به آذربایجان، ۱۷ درصد به ترکمنستان و ۱۲٫۵ درصد به ایران می‌رسد. ایران و ترکمنستان با این پیشنهاد مخالفت کردند. موضع دولت ایران تقسیم دریای کاسپین بر پایه انصاف (۲۰ درصد برای هر کدام از پنج کشور) و در عین حال تقسیم همزمان آب‌ها و کف دریا بوده‌است.

در این رابطه پژوهش‌های زیادی صورت پذیرفته‌است. این پژوهش‌ها، بیشتر در جهت ارائه مدلی از مطلوبیت کشورها و همچنین پیشنهاد روشی برای تقسیم است [۵۹، ۶۰، ۷۰] . شایان ذکر است که در مرداد سال ۱۳۹۷ و بعد از سال‌ها مذاکره، کنوانسیون رژیم حقوقی دریای خزر به امضای پنج کشور ساحلی رسید. بسیاری، سهم ایران از دریای خزر در این قرارداد را غیرمنصفانه می‌دانند.

مسائل روزمره

نیاز به یک راه حل سریع و منصفانه در بسیاری از مسائل اجتماعی ساده و روزمره وجود دارد. تقسیم اجاره‌بهای منزل بین ساکنین، تقسیم کرایه تاکسی بین مسافرین، یا تقسیم ارث نمونه‌هایی از این دست مسائل هستند. ارائه روش‌های منصفانه برای این دست مسائل سوژه بسیاری از تحقیقات، به خصوص در سال‌های اخیر و در حوزه علوم کامپیوتر بوده است. به عنوان مثال، سایت «اسپلیدیت» [3] [۲] که توسط شاه و پروکاچیا در دانشکده علوم کامپیوتر دانشگاه کارنگی‌ملون (CMU) راه‌اندازی شده‌است، اقدام به ارائه راه‌حل‌های منصفانه با تضمین‌های قابل اثبات برای مسائل روزمره کرده‌است. سرویس‌هایی که این سامانه در حال حاضر ارائه می‌دهد شامل تقسیم اجاره‌بها، تقسیم کرایه تاکسی، تخصیص کار و بودجه در یک پروژه و تعیین میزان مشارکت افراد در یک فعالیت (مانند تهیه مقاله) است. در طول یک سال و نیم از شروع به کار این سامانه، بیش از ۷۰۰۰۰ نفر از بیش از ۱۵۰ کشور از آن استفاده کرده‌اند [۶۹].

۱.۱ اِلمان‌های اصلی در مسئله تقسیم منصفانه

در یک مسئله تقسیم منصفانه، منبع $\mathcal{R}$، مجموعه افراد $\mathcal{N}$، مجموعه توابع مطلوبیت V و معیار انصاف σ داده شده‌است و هدف تقسیم منبع $\mathcal{R}$ در میان افراد است، به گونه‌ای که معیار σ برای همه افراد رعایت شود. مسئله، بسته به نوع منبع، شکل توابع مطلوبیت، معیار انصاف و همینطور نوع رفتار افراد ممکن است شکل‌های مختلفی به خود بگیرد که در ادامه به شرح آن می‌پردازیم.

- **منبع:** نوع منبع یکی از پارامترهای تعیین کننده در تقسیم منصفانه است. به طور کلی، منبع می‌تواند یک منبع تقسیم‌پذیر (پیوسته) باشد، به این معنی که آن را می‌توان به دلخواه به قسمت‌های کوچکتر تقسیم نمود. به عنوان مثال، تقسیم زمین یا سطح دریا، مانند آنچه که در مسئله تقسیم آلمان و دریای کاسپین با آن مواجه بودیم و یا تقسیم زمان در بین پردازنده‌ها. در این حالت، مسئله به برش کیک مشهور است. همچنین، منبع ممکن است شامل تعدادی شیء تقسیم‌ناپذیر باشد، به این معنی که هر شیء باید به طور کامل به یک نفر تخصیص یابد و نمی‌توان آن را به قطعات کوچکتر تقسیم کرد. مثال‌هایی مانند تقسیم اموال بعد از جدایی، تقسیم ارث و تخصیص کارها به پردازنده‌ها از این قبیل مسائل هستند.

- **توابع مطلوبیت:** تابع مطلوبیت افراد نیز یکی از پارامترهای مسئله تقسیم منصفانه است. در حالت پیوسته، کیک معمولا به صورت بازه $[0,1]$ مدل می‌شود. در این حالت، تابع مطلوبیت هر فرد i به

[3] Spliddit

صورت یک تابع $v_i : [0,1] \rightarrow R^+$ مدل می‌شود، به طوری که ارزش بازه $[a,b]$ از کیک برابر با $\int_a^b v_i(x)d_x$ است. در حالتی که منبع گسسته باشد، تابع مطلوبیت فرد i به صورت $V_i : 2^{\mathcal{M}} \rightarrow R^+$ تعریف می‌شود، که در آن $\mathcal{M}$ مجموعه همه اشیای موجود است.

- **معیار انصاف:** بنیادی‌ترین چالش در حوزه تقسیم منصفانه، مشخص کردن مفهوم انصاف است. این مسئله سال‌های زیادی سوژه تحقیقات در حوزه اقتصاد رفاهی [4] و توزیع عدالت [5] بوده است و معیارهای زیادی برای سنجش انصاف در یک تخصیص تعریف شده است. هر معیار، مزایا و معایب خاص خود را دارد و دانستن این مزایا و معایب نقش کلیدی در انتخاب معیار مناسب را بازی می‌کند. معیارهای تناسب [6] و بدونِ رشک بودن [7] از اهمیت ویژه‌ای، به خصوص برای حالت پیوسته برخوردار هستند. با این حال، این دو معیار برای حالتی که منبع شامل تعدادی شیء گسسته است، بسیار قوی هستند و تضمین آنها ممکن نیست. برای حالت گسسته، معیارهای دیگری مانند سهم بیش‌کمینه، عدالت بیش‌کمینه و رفاه اجتماعی نش مورد توجه هستند. در فصل دوم، به طور مفصل به معرفی این معیارها و رابطه آنها با یکدیگر می‌پردازیم.

۲.۱ تقسیم منصفانه در علوم کامپیوتر

در سال‌های اخیر، مسئله تقسیم منصفانه در حوزه علوم کامپیوتر اهمیت ویژه‌ای یافته است. دلیل این اهمیت، ماهیت کاملا الگوریتمی این مسئله است. در حوزه علوم کامپیوتر، مسئله تقیسم منصفانه زیرشاخه‌ای از نظریه محاسباتی انتخاب اجتماعی [8] محسوب می‌شود. به علاوه، مسئله استخراج توابع مطلوبیت افراد یکی از زمینه‌های فعال در هوش مصنوعی است که ارتباط نزدیکی با تقسیم منصفانه دارد. در ادامه، شرح مختصری در مورد رابطه علوم کامپیوتر با تقسیم منصفانه ارائه خواهیم داد.

ارائه الگویتم‌های منصفانه

هر روش تقسیم منصفانه در واقع الگوریتمی است که منبع را در میان افراد تقسیم می‌کند. مانند سایر الگوریتم‌ها، می‌توان این روش‌ها را نیز از نقطه نظر زمان اجرا، تعداد پرسمان ، پیچیدگی ارتباط و میزان بهینگی بررسی نمود. تا قبل از سال ۲۰۰۰، عمده تمرکز بر اثبات وجود روش تقسیم منصفانه بوده است و کمتر به پیچیدگی و زمان

[4] Welfare economic
[5] Distributive justice
[6] Proportionality
[7] Envy-freeness
[8] Computational Social Choice

اجرای آن دقت شده است. اما از سال ۲۰۰۰ به بعد و با ورود این حوزه به علوم کامپیوتر، مبحث پیچیدگی روش‌های منصفانه با دقت بیشتری مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، کلاس سختی بسیاری از مسائل تقسیم منصفانه نیز مشخص شده است. برای مثال، اثبات شده است که مسئله پیدا کردن تقسیم بدونِ رشک کیک با کمترین تعداد برش یک مسئله پی‌پد‌ـسخت [9] است. همچنین در حالت گسسته، پیدا کردن تخصیص منصفانه برای اکثر معیارهای موجود ان‌پی‌ـسخت [10] است. با توجه به این مطلب، یکی از مطالعات رایج در این زمینه، یافتن الگوریتم‌های تقریبی با تقریب مناسب برای این دست از مسائل است.

استخراج مطلوبیت‌ها

به طور معمول، توابع مطلوبیت افراد، یک پارامتر خصوصی است و تنها خود افراد از آن آگاه هستند. اما ارائه یک روش تقسیم منصفانه، نیاز به آگاهی از توابع مطلوبیت افراد دارد و این اطلاعات باید به طریقی از افراد جمع‌آوری شود. جمع‌آوری این اطلاعات، با دو چالش جدی همراه است.

چالش اول این است که ممکن است ماهیت توابع مطلوبیت به گونه‌ای باشد که امکان جمع‌آوری آنها وجود نداشته باشد. برای مثال، در مسئله برش کیک برای مشخص کردن کامل تابع مطلوبیت یک نفر، باید مقدار v_i به ازای تمام نقاط در بازه $[۰, ۱]$ مشخص شود که شامل بی‌نهایت نقطه است. برای حل این مسئله، ارائه راه کارهای منصفانه که با تعداد محدودی پرسمان از کاربر بتواند تقسیم مناسب را پیدا کند، مفید است. همچنین در حالت گسسته، اگر تعداد اشیا m باشد، برای توابع مطلوبیت غیرجمعی مانند زیرپیمانه‌ای و یا زیرجمعی، جمع آوری ارزش هر زیرمجموعه از اشیا نیاز به تعداد نمایی پرسمان دارد. بنابراین، هر روش منصفانه زمان چندجمله‌ای برای این حالت باید بدون داشتن اطلاع کامل از توابع مطلوبیت و با استفاده از تعداد محدودی پرسمان، تقسیم مناسب را ارائه دهد.

چالش دوم، مسئله میزان صداقت بازیکنان در اعلام تابع مطلوبیت است. با فرض این که بازیکنان رفتار راهبردی در پیش می‌گیرند و سعی در افزایش سود خود دارند، ممکن است با ارسال اطلاعات غلط در رابطه با مطلوبیت خود سهم بیشتری از منبع را به خود اختصاص دهند. در این حالت، طراحی سازوکارهای صادقانه که در آن افراد انگیزه‌ای برای ارائه غلط اطلاعات ندارند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

[9] PPAD-hard
[10] NP-hard

۳.۱ نوآوری‌های این پژوهش

به طور کلی، نوآوری‌های این پژوهش مرتبط با دو معیار بدون‌رشک و سهم بیش‌کمینه است، که در ادامه به طور مختصر شرح داده می‌شود. خلاصه‌ای از این نتایج را می‌توانید در جدول ۱.۷ ببینید.

سهم بیش‌کمینه در حالت توابع مطلوبیت جمعی

سهم بیش‌کمینه، توسط بودیش در سال ۲۰۱۴ به عنوان معیار سنجش میزان انصاف در حالت گسسته معرفی شد و در مقاله پیشگامی که توسط پروکاچیا و همکاران ارائه شد، نشان داده شد که در حالت توابع مطلوبیت جمعی، نسبت ۲/۳ این معیار را همیشه می‌توان تضمین کرد. به عبارتی، همیشه تخصیصی وجود دارد که ۲/۳ از سهم بیش‌کمینه هر فرد را تضمین می‌کند. در این رساله، ما این تقریب را به ۳/۴ بهبود می‌دهیم. به علاوه، یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای یافتن چنین تخصیصی ارائه میدهیم. در الگوریتم ارائه شده برای این بخش به طور مکرر از خواص تطابق‌های بیشینه در گراف‌های دو بخشی و نتایج کلاسیک در این زمینه استفاده شده‌است. همچنین اثبات تفریب مورد نظر بر پایه روش‌های دوگونه‌شماری است. این روش‌ها به طور مفصل در فصل ۳ شرح داده شده است.

سهم بیش‌کمینه در حالت توابع مطلوبیت غیرجمعی

علاوه بر حالت جمعی، نتایج خود را در رابطه با سهم بیش‌کمینه برای توابع مطلوبیت غیر جمعی نیز گسترش می‌دهیم و الگوریتم‌هایی با ضریب تقریب ۱/۳، ۱/۸ و $\log n$ را به ترتیب برای توابع زیرپیمانه‌ای، نسبتا زیرجمعی (XOS) و زیرجمعی ارائه می‌دهیم. به علاوه، اثبات می‌کنیم برای توابع XOS، یک تخصیص با ضریب تقریب ۱/۵ وجود دارد. این نتایج به طور کامل در فصل ۴ شرح داده شده‌اند.

تقسیم با سهم‌های نابرابر

در فصل ۵ به بررسی تقسیم منصفانه در حالتی می‌پردازیم که در آن سهم افراد از منبع متفاوت است. به عنوان نمونه، در قوانین اسلامی در مسئله تقسیم ارث، سهم مردان دو برابر سهم زنان است. برای این حالت، یک گسترش از معیار سهم بیش‌کمینه در شرایط سهم‌های نابرابر پیشنهاد می‌دهیم و سپس نشان می‌دهیم که با وجود این که همیشه نمی‌توان این معیار را تضمین نمود، اما نسبت ۱/۲ این معیار را همواره می‌توان تضمین کرد. ما نشان می‌دهیم که در حالتی که ارزش اشیا برای افراد از یک توزیع دلخواه انتخاب شده باشد، تضمین معیار معرفی شده با احتمال بالایی ممکن است.

طراحی سازوکارهای بدون رشک

همان‌طور که اشاره شد، ارائه سازوکارهای مناسب جهت به دست آوردن توابع مطلوبیت افراد، یکی از چالش‌های مطرح در زمینه تقسیم منصفانه است. در فصل ۶ ما به بررسی مسئله طراحی سازوکارهای بدون‌رشک با تعداد برش کم جهت تقسیم کیک می‌پردازیم. به بیان ساده، هدف ما از این بخش طراحی الگوریتمی است که سه خاصیت را به طور همزمان داشته باشد: اول این که الگوریتم تقسیم صادقانه باشد، به این معنی که افراد انگیزه‌ای برای اعلام نادرست توابع مطلوبیت خود نداشته باشند. دوم این که تقسیم‌بندی ارائه شده معیار بدون رشک بودن را رعایت کند. در نهایت، می‌خواهیم روش ارائه شده دارای تعداد برش کم باشد. در این فصل، با توجه به توابع مطلوبیت افراد، الگوریتم‌های مختلف برای ارضای شرایط خواسته شده ارائه خواهیم کرد.

۴.۱ ساختار مستند

فصل ۲ شامل مجموعه‌ای از تعاریف و قضایای ابتدایی است که در تمامی فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین در این فصل، راجع به توابع مجموعه‌ای غیرجمعی شامل توابع زیرپیمانه‌ای، XOS و زیرجمعی صحبت خواهیم کرد و پرسمان‌های موجود برای هر کدام را شرح می‌دهیم. به علاوه، به طور مختصر راجع به مبحث تطابق در گراف‌های دوبخشی و قضایای کلاسیک در این زمینه توضیح می‌دهیم.

جهت رعایت نظم و پیوستگی مطالب، سایر فصل‌های این مستند به دو قسمت تقسیم شده است. قسمت اول، شامل فصل‌های ۳، ۴ و ۵ است. در این فصل‌ها به شرح نتایج مرتبط با سهم بیش‌کمینه در حالت‌های جمعی، غیرجمعی و تقسیم با سهم‌های نابرابر می‌پردازیم. همچنین در بخش دوم رساله که شامل فصل ۶ است، در مورد معیار بدون‌رشک بودن و طراحی سازوکارهای بدون‌رشک با تعداد برش کم صحبت می‌کنیم.

فصل ۲

پیش نیازها و تعاریف ابتدایی

در فصل دوم این رساله، به شرح مفاهیم اولیه و پیش‌نیازهایی می‌پردازیم که در فصل‌های آتی از آنها استفاده خواهد شد. در ابتدا و در بخش ۱.۲ به طور رسمی مسئله تقسیم منصفانه را تعریف می‌کنیم. در این بخش، انواع مختلف توابع مطلوبیت و همچنین نحوه دریافت ورودی در هر دو حالت منبع پیوسته و گسسته را مشخص می‌کنیم. در بخش ۲.۲ به طور مفصل راجع به انواع معیارهای مختلف انصاف که در مطالعات مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند صحبت می‌کنیم. در نهایت در بخش ۳.۲ مقدماتی در رابطه با گراف‌های دوبخشی و مبحث تطابق در گراف‌های دوبخشی ارائه می‌دهیم.

۱.۲ بیان ریاضی مسئله تقسیم منصفانه

مسئله تقسیم منصفانه به صورت زیر تعریف می‌شود:

مسئله ۱.۲. *یک منبع $\mathcal{R}$ و مجموعه $\mathcal{N}$ شامل n فرد و یک معیار انصاف σ داده شده است. همچنین به ازای هر فرد i از مجموعه $\mathcal{N}$، یک تابع مطلوبیت V_i داده شده است. آیا می‌توان منبع را در میان افراد به گونه‌ای تقسیم کرد که معیار انصاف σ برای همه افراد رعایت شود؟*

همان‌طور که اشاره شد، منبع مورد مطالعه می‌تواند یک منبع تقسیم‌پذیر، یا مجموعه‌ای از چند منبع تقسیم‌ناپذیر باشد. هنگامی که با یک منبع تقسیم‌پذیر مواجه باشیم، منبع به صورت بازه $[۰,۱]$ مدل می‌شود. [۱] در این حالت، به‌ازای هر فرد $i \in \mathcal{N}$، یک تابع مطلوبیت v_i تعریف می‌شود و مطلوبیت فرد i به ازای هر بازه $[x,y] \in [۰,۱]$ به صورت

$$V_i([x,y]) = \int_x^y v_i(x)dx$$

[۱] همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، در حالت منبع پیوسته، مسئله به برش کیک مشهور است.

محاسبه می‌گردد. فرض زمینه در رابطه با تابع f این است که دامنه f شامل تمام بازه $[۰,۱]$ است و به ازای هر نقطه $x \in [۰,۱]$ رابطه $f(x) \geq ۰$ برقرار است. به علاوه، تابع f در تمام بازه $[۰,۱]$ انتگرال‌پذیر است و ارزش کل کیک برای هر فرد، برابر با یک است:

$$\forall i \in \mathcal{N} \qquad V_i([۰,۱]) = ۱.$$

یک قطعه از کیک، مجموعه‌ای از زیربازه‌های دو به دو مجزا از بازه $[۰,۱]$ است. برای یک قطعه P، ارزش این قطعه برای فرد i به صورت $\sum_{I \in P} V_i(I)$ تعریف می‌شود.

دقت کنید که ممکن است پیچیدگی توابع مطلوبیت به اندازه‌ای باشد که تعریف آنها به عنوان ورودی به صورت چندجمله‌ای میسر نباشد. در این حالت، لازم است که از مدل‌های مبتنی بر پرسمان استفاده کنیم. یکی از مشهورترین این مدل‌ها، مدل رابرتسون و وب [۲] است. در این مدل، برای مشخص شدن توابع مطلوبیت افراد، امکان استفاده از دو نوع پرسمان وجود دارد:

- **پرسمان ارزیابی [۳] :** به ازای بازه I و فرد i، مقدار $V_i(I)$ را برمی‌گرداند.

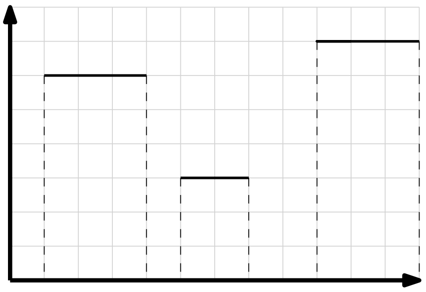
- **پرسمان برش [۴] :** به ازای نقطه x، مقدار حقیقی r و فرد i، یک نقطه y را به خروجی می‌دهد، به گونه‌ای که رابطه $V_i([x,y]) = r$ برقرار باشد. در صورتی که مقدار y یکتا نباشد، سمت چپ‌ترین نقطه با این خاصیت را به خروجی می‌دهد. همچنین اگر چنین نقطه‌ای وجود نداشته باشد، مقدار -۱ را برمی‌گرداند.

در مدل‌های مبتنی بر پرسمان، کمینه کردن تعداد پرسمان‌های لازم جهت پیدا کردن تقسیم مناسب از جمله پارامترهای مهم در تعیین کیفیت روش است.

تعریف ۲.۲ (تابع ثابت قطعه‌ای)**.** *تابع مطلوبیت v یک تابع ثابت قطعه‌ای است، اگر v شامل مجموعه $S_v = \{\mathcal{I}_۱, \mathcal{I}_۲, \dots, \mathcal{I}_k\}$ از بازه‌های دو به دو مجزا باشد، به گونه‌ای که به ازای هر دو نقطه x, x' از $\mathcal{I}_i$ داشته باشیم: $v(x) = v(x') = r_i$ و به ازای هر نقطه x که به هیچ بازه‌ای از S_v تعلق ندارد، داشته باشیم: $v(x) = ۰$. همچنین v دارای k پله است، اگر $|S_v| = k$.*

برای مثال، در شکل ۱.۲ یک تابع مطلوبیت ثابت قطعه‌ای نشان داده شده است. بخش اعظم مطالعه ما در حالت منبع پیوسته بر روی توابع مطلوبیت ثابت قطعه‌ای با یک پله تمرکز دارد.

---
[2] Robertson & Webb
[3] Evaluate
[4] Cut



شکل ۱.۲: یک تابع ثابت قطعه‌ای

در حالتی که منبع مجموعه‌ای از اشیای گسسته باشد، مجموعه اشیا را با $\mathcal{M}$ نشان می‌دهیم، و فرض می‌کنیم که تعداد اشیا برابر با m است. در این حالت، چون هیچ‌کدام از منابع قابلیت تقسیم شدن ندارند، از واژه تخصیص به جای تقسیم استفاده می‌شود. به ازای هر مجموعه $S \in \mathcal{M}$ ، عبارت $V_i(S)$ ارزش مجموعه اشیای S را برای فرد i ام نشان می‌دهد که مقداری مثبت است. ساده‌ترین فرض در مورد توابع مطلوبیت در این حالت، فرض جمعی بودن است، به این معنی که ارزش یک مجموعه از اشیا، برابر با جمع ارزش تک تکِ آن اشیا است. اما طبیعی است که مسئله تخصیص را برای حالت‌های کلی‌تر توابع مطلوبیت نیز در نظر بگیریم. برای مثال، ممکن است که انتظار داشته باشیم که اگر یک فرد دو کالا با ارزش ۴۰۰ دریافت کند، راضی‌تر از زمانی باشد که ۸۰۰ کالا با ارزش یک دریافت کند. چنین محدودیتی را با استفاده از توابع جمعی نمی‌توان نشان داد. اما به طور مثال، توابع زیرپیمانه ای این توانایی را دارند. بررسی توابع مطلوبیت کلی‌تر مانند زیرپیمانه‌ای، برای بسیاری از مسائل مرتبط با حوزه اقتصاد رفاه مانند مسئله تقسیم بیش‌کمینه سانتاکلاز [5] ، بیشینه سازی سود اجتماعی [6] و مسئله منشی [7] صورت گرفته است [۱۱، ۳۷، ۳۸، ۵۰].

معمول‌ترین کلاس‌ها از توابع مطلوبیت که تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، کلاس‌های زیرپیمانه‌ای، XOS و زیرجمعی هستند. در این رساله، ما این سه شکل از توابع مطلوبیت را به همراه توابع جمعی در نظر خواهیم گرفت . در ادامه به تعریف رسمی این چهار شکل از توابع مطلوبیت می‌پردازیم:

- **جمعی**: تابع مطلوبیت $V(\cdot)$ جمعی است، اگر به ازای هر دو مجموعه از اشیای $S_۱, S_۲ \in \mathcal{M}$ داشته باشیم:

$$V(S_۱) + V(S_۲) = V(S_۱ \cup S_۲) + V(S_۱ \cap S_۲).$$

- **زیرپیمانه‌ای**: تابع ارزش $V(\cdot)$ زیرپیمانه‌ای است، اگر به ازای هر دو مجموعه از اشیای $S_۱, S_۲ \in \mathcal{M}$

[5] Santa claus maximin
[6] Social welfare
[7] Secretary problem

داشته باشیم:

$$V(S_1) + V(S_2) \geq V(S_1 \cup S_2) + V(S_1 \cap S_2).$$

- **زیرجمعی کسری (XOS)**: یک تابع مجموعه‌ای XOS به صورت تعداد محدودی مجموعه از توابع جمعی $\{V^1, V^2, \ldots, V^\alpha\}$ نشان داده می‌شود، به طوری که به ازای هر مجموعه از اشیای $S_1, S_2 \in \mathcal{M}$ داشته باشیم: $V(S) = \max_{i=1}^{\alpha} V^i(S)$.

- **زیرجمعی**: یک تابع مجموعه $V(\cdot)$ زیرجمعی است، اگر به ازای هر دو مجموعه از اشیای $S_1, S_2 \in \mathcal{M}$ داشته باشیم: $V(S_1) + V(S_2) \geq V(S_1 \cup S_2)$.

برای توابع جمعی، می‌توانیم فرض کنیم که به ازای هر شیء ، ارزش آن برای هر کدام از افراد در ورودی به ما داده شده است. طبیعتا با داشتن این اطلاعات، به ازای هر مجموعه از اشیا، محاسبه ارزش آن برای فرد دلخواه در زمان خطی میسر است. اما برای سایر کلاس‌های توابع ارزش، دانستن ارزش تک تک اشیا کمکی به محاسبه ارزش یک مجموعه از اشیا نمی‌کند. همچنین، چون تعداد زیرمجموعه‌های مختلف از $\mathcal{M}$ برابر با $2^{\mathcal{M}}$ است، نمی‌توان به ازای هر مجموعه، ارزش آن را برای هر فرد در ورودی مشخص کرد. در این حالت، نیاز به دسترسی به پیشگوها [8] داریم. برای توابع زیرپیمانه‌ای، فرض ما بر این است که به پیشگوی پرسمان دسترسی داریم. این پیشگوها برای توابع زیرپیمانه‌ای بسیار مناسب هستند. اما برای توابع XOS و زیرجمعی نیاز به پیشگوهای‌های قدرتمندتری است. برای چنین توابعی، ما از نوع قدرتمندتری از پیشگوها با نام پیشگوی درخواست [9] استفاده می‌کنیم. علاوه بر این، از یک نوع دیگر از پیشگوها با نام پیشگوی XOS نیز برای توابع XOS استفاده خواهیم کرد. در ادامه، به طور رسمی این پیشگوها را معرفی می‌کنیم.

- **پیشگوی پرسمان:** برای تابع V، پیشگوی پرسمان $\mathcal{O}$ در واقع الگوریتمی است که یک مجموعه S را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و مقدار $V(S)$ را در زمان $O(1)$ محاسبه می‌کند.

- **پیشگوی درخواست:** برای تابع V، پیشگوی درخواست $\mathcal{O}$ در واقع الگوریتمی است که یک دنباله $p_1, p_2, \ldots, p_n$ از قیمت‌ها را دریافت می‌کند و مجموعه S را که مقدار $V(S) - \sum_{e \in S} p_e$ را بیشینه می‌کند به عنوان خروجی برمی‌گرداند. فرض ما بر این است که زمان اجرای این الگوریتم $O(1)$ است.

- **پیشگوی XOS (تنها برای توابع XOS):** برای مجموعه S از اشیا، این پیشگو میزان تاثیر هر کدام از اشیا را در مقدار $V(S)$، برمی‌گرداند.

[8] Oracle
[9] Demand oracle

در حالت کلی، ممکن است نتوان پیشگوی درخواست را در زمان چندجمله‌ای پیاده‌سازی کرد. با این حال، نشان داده شده است که برای بعضی توابع مانند جایگزین ناخالص [10] پیشگوی درخواست در زمان چندجمله‌ای قابل پیاده‌سازی است. در ادبیات مسائل تخصیص، استفاده از پرسمان‌های نام برده شده امری رایج است [۳۲، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۱، ۵۷، ۷۶].

۲.۲ مفهوم انصاف

معیار انصاف، مهم‌ترین مفهوم در مسئله تقسیم منصفانه است. این که چه تقسیمی منصفانه است و یا چه معیاری مناسب سنجش انصاف است، سوژه بسیاری از مطالعات در حوزه علوم اجتماعی، سیاسی، فلسفه و ریاضی بوده است. در نظر داشته باشید که برای یک معیار، علاوه بر این که ذاتا چقدر منصفانه است، این که چقدر رعایت آن معیار ممکن است، و یا این که چقدر محاسبه تخصیصی که آن معیار را رعایت کند زمان بر است نیز اهمیت دارد. برای مثال، ممکن است یک معیار برای حالت منبع پیوسته مناسب باشد، اما همان معیار، در حالت گسسته به دلیل عدم امکان تضمین، مناسب نباشد.

در این بخش، به طور مختصر شکل ریاضی معیارهای مختلف انصاف و رابطه آنها با یکدیگر را مرور می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_۱, \mathcal{A}_۲, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ یک تقسیم منبع $\mathcal{R}$ (پیوسته یا گسسته) به افراد $\mathcal{N}$ باشد، به طوری که سهم فرد i در $\mathcal{A}$ برابر با $\mathcal{A}_i$ است. این سهم بنا به پیوسته یا گسسته بودن منبع، می‌تواند مجموعه‌ای از اشیا، یا یک قطعه [11] کیک باشد. فرض ما این است که در این تقسیم باید سهم افراد کاملا از هم جدا باشد و همچنین همه منبع به طور کامل تخصیص داده شود [12]: $\cup_i \mathcal{A}_i = \mathcal{R}$.

اولین و قدیمی‌ترین معیارهای تعریف شده، معیارهای تناسب [13] و بدونِ رشک بودن [14] است که به ترتیب توسط استاینهاز [۷۱] و فولی [۴۲] معرفی شدند.

تعریف ۳.۲. *تخصیص $\mathcal{A}$ متناسب است، اگر هر فردی احساس کند که ارزش سهم او حداقل به میزان $۱/n$ از ارزش کل منبع است. به بیان دیگر، به ازای هر فرد i داشته باشیم: $V_i(\mathcal{A}_i) \geq V_i(\mathcal{R})/n$.*

تعریف ۴.۲. *تخصیص $\mathcal{A}$ بدونِ رشک است، اگر هر فردی سهم خود را به سهمی که به دیگران تعلق گرفته است ترجیح دهد. به عبارتی، به ازای هر فرد i داشته باشیم:*

$$\forall j \qquad V_i(\mathcal{A}_i) \geq V_i(\mathcal{A}_j).$$

[10] Gross substitute

[11] به یاد داشته باشید که یک قطعه کیک، مجموعه‌ای از تعدادی بازه است.

[12] این فرض به شرط دفع آزاد معروف است.

[13] Proportionality

[14] Envy-freeness

	وجود تخصیص	تعداد پرسمان (حد پایین)	تعداد پرسمان (حد بالا)	تقسیم با قطعات پیوسته
تناسب	✓	[۷۸] $\Omega(n\log n)$	[۳۴] $O(n\log n)$	[۳۴] ✓
بدونِ رشک بودن	✓	[۶۴] $\Omega(n^{2})$	[۶] $O(n^{n^{n^{n^{n^n}}}})$	[۷۲] ✓

جدول ۲.۱: خلاصه‌ای از نتایج ابتدایی در زمینه معیارهای تناسب و بدونِ رشک بودن

با کمی دقت در این دو معیار، متوجه خواهید شد که معیار بدونِ رشک بودن، معیاری قوی‌تری نسبت به معیار تناسب است. به عبارتی، اگر یک تقسیم منبع معیار بدونِ رشک بودن را تضمین کند، حتما متناسب نیز هست.

بخش کوچکی از نتایج موجود در رابطه با معیارهای تناسب و بدونِ رشک بودن، در حالتی که منبع پیوسته باشد، در جدول ۲.۱ نشان داده شده است. همان‌طور که از جدول مشخص است، هر دو معیار برای حالت منبع پیوسته قابل ارضا کردن هستند. با این حال، بر خلاف معیار تناسب که برای آن الگوریتم با تعداد پرسمان‌های بهینه وجود دارد، بهترین الگوریتم تقسیم کیک به صورت بدونِ رشک تنها حد بالای $O(n^{n^{n^{n^{n^n}}}})$ را بر روی تعداد پرسمان‌ها تضمین می‌کند و بهترین حد پایین اثبات شده برای آن نیز $\Omega(n^{2})$ است که هنوز فاصله فراوانی بین این حدود بالا و پایین وجود دارد. با این حال، همان‌طور که در جدول نمایش داده شده است، اثبات شده است که یک تخصیص بدونِ رشک وجود دارد که در آن به هر کدام از افراد، تنها یک قطعه پیوسته از کیک تعلق می‌گیرد (یعنی $n-1$ برش). این اثبات تنها وجودی است و هنوز هیچ الگوریتمی برای پیدا کردن این تخصیص در حالت کلی ارائه نشده است. در واقع، ثابت شده است که پیدا کردن این تخصیص در حالت کلی یک مسئله پی‌پد-تمام است [۳۰]. همچنین اثبات شده است که با تعداد محدودی پرسمان، نمی‌توان یک تقسیم بدونِ رشک با $n-1$ برش را یافت [۷۳].

معیارهای اشاره شده در بالا، قوی‌تر از آن هستند که در حالت اشیای تقسیم‌ناپذیر قابل تضمین باشند. به عنوان یک مثال ساده، زمانی که منبع شامل تنها یک شیء تقسیم‌ناپذیر باشد، این شیء ناچار به یکی از افراد می‌رسد و سایر افراد هیچ سهمی نمی‌برند. بنابراین، نه تنها این دو معیار، بلکه هیچ تقریبی از آنها نیز در حالت اشیای تقسیم‌ناپذیر قابل ارضا شدن نیستند. این مسئله، پژوهش‌گران در این زمینه را به معرفی معیارهای ضعیف‌تری که مناسب اشیای تقسیم‌ناپذیر باشد واداشت. از جمله مورد توجه‌ترین این معیارها، می‌توان به سهم بیش‌کمینه [۱۵]، انصاف بیش‌کینه [۱۶]، سود اجتماعی نش [۱۷]، و بدون‌رشک تا حد یک شیء (EFX) اشاره کرد.

[15] Maximin-share
[16] Maximin fairness
[17] Nash social welfare

در این رساله، تمرکز ما بر روی سهم بیش‌کمینه است. این معیار توسط بودیش [۲۴] به عنوان یک معیار جدید انصاف برای اشیای تقسیم‌ناپذیر در سال ۲۰۱۳ معرفی شد و در سال‌های اخیر، توجه زیادی را به خود جلب نموده‌است [۶۵، ۴، ۱۷، ۱۰، ۷، ۳۶، ۵]. تصور کنید از فرد i بخواهیم که مجموعه اشیای $\mathcal{M}$ را در n دسته تقسیم، و سپس دسته با کمترین ارزش (از دیدگاه خودش) را برای خود انتخاب کند. این فرد برای بیشینه کردن سود خود سعی می‌کند اشیای داخل $\mathcal{M}$ را به گونه‌ای تقسیم کند که کم‌ارزش‌ترین بسته تا حد ممکن جذاب باشد. بر این اساس، سهم بیش‌کمینه فرد i که با MMS_i نشان داده می‌شود، معادل ارزش کم‌ارزش‌ترین بسته، در بهترین تقسیم‌بندی فرد iام است. در ادامه، این معیار را به صورت رسمی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. *فرض کنید Π_r مجموعه همه روش‌های تقسیم $\mathcal{M}$ به r مجموعه جدا باشد. به ازای هر تقسیم بندی $P^* \in \Pi_r$، ما دسته‌های داخل این تقسیم بندی را با $P^*_1, P^*_2, \dots, P^*_r$ نشان می‌دهیم. در این صورت، مقدار $\mathsf{MMS}_i^r(\mathcal{M})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\mathsf{MMS}_i^r(\mathcal{M}) = \max_{P^*\in\Pi_r} \min_{1\leq j\leq r} V_i(P^*_j). \tag{۱.۲}$$

سهم بیش‌کمینه فرد i در واقع همان $\mathsf{MMS}_i^n(\mathcal{M})$ است. برای راحتی، زمانی که اشیا و تعداد افراد مشخص است، این مقدار را با MMS_i آن را نشان می‌دهیم.

بدیهی است که MMS_i بیشترین مقداری است که می‌توان برای فرد i در یک تقسیم‌بندی تضمین کرد، چرا که اگر همه افراد دارای توابع مطلوبیت یکسان باشند، حداقل یکی از این افراد حداکثر به اندازه سهم بیش‌کمینه خود سهم خواهد برد. حال سوال این است: آیا یک تخصیص وجود دارد که سهم حداقل MMS_i را برای هر فرد i تضمین کند؟ بر همین اساس، ما یک تخصیص را MMS می‌گوییم، اگر به هر فرد i یک بسته از اشیا با ارزش حداقل MMS_i تعلق گیرد. همچنین یک تخصیص $\mathcal{A}$ را $\alpha - \mathsf{MMS}$ می‌نامیم، اگر به ازای هر فرد i داشته باشیم: $V_i(\mathcal{A}_i) \geq \alpha\mathsf{MMS}_i$.

نکته قابل توجه در رابطه با سهم بیش‌کمینه، این است که با وجود این که مثال‌هایی ارائه شده است که در آنها رعایت سهم بیش‌کمینه امکان پذیر نیست، اما ثابت شده است که تخصیص $۲/۳ - \mathsf{MMS}$ همواره وجود دارد [۶۵]. در سه فصل آتی، به طور مشخص نتایج موجود در رابطه با این معیار را شرح خواهیم داد.

در پایان این قسمت، به طور خلاصه، دو معیار دیگر برای تقسیم اشیای گسسته را نیز تعریف و سپس در جدول ۲.۲ مقایسه کوتاهی بین نتایج موجود در رابطه با این معیارها انجام خواهیم داد.

تعریف ۶.۲. *تخصیص A^* سود اجتماعی نش را بیشینه می‌کند، اگر میانگین هندسی سود افراد را بیشینه کند.*

	بهترین تقریب موجود	بهترین تقریب ممکن (حد بالا)	ضریب تقریب بهترین الگوریتم موجود
سهم بیش‌کمینه	۲/۳ [۶۵]	$۱-\epsilon$ [۶۵]	۲/۳ [۱۰]
انصاف بیش‌کمینه	n^{ϵ}	۱/۲ [۱۴]	$\epsilon = \Omega(\log\log n/\log n)$ ، $n^{-\epsilon}$ [۲۶]
سود اجتماعی نش	۱/۲ [۲۹]	$۱-\epsilon$ [۵۶]	۱/۲ [۲۹]

جدول ۲.۲: خلاصه‌ای از نتایج ابتدایی در رابطه با انصاف در حالت گسسته

به عبارتی، تخصیص $\mathcal{A}^*$ منصفانه است، اگر

$$\mathcal{A}^* = \arg\max_{\mathcal{A}\in\Omega} V_۱(\mathcal{A}_۱)\cdot V_۲(\mathcal{A}_۲)\dots V_n(\mathcal{A}_n).$$

که در آن، Ω مجموعه تمام تخصیص‌های ممکن است.

تعریف ۷.۲. *تخصیص $\mathcal{A}^*$ میزان انصاف بیش‌کمینه را بیشینه می‌کند، اگر کمینه سود افراد را بیشینه کند. به عبارتی، تخصیص $\mathcal{A}^*$ منصفانه است، اگر*

$$\mathcal{A}^* = \arg\max_{\mathcal{A}\in\Omega} \min\{V_۱(\mathcal{A}_۱), V_۲(\mathcal{A}_۲),\dots,V_n(\mathcal{A}_n)\}.$$

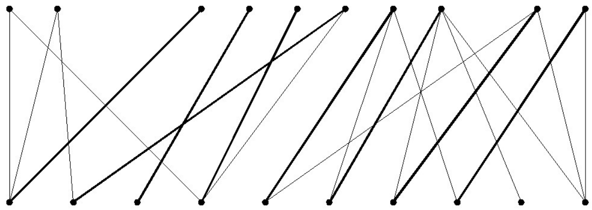
که در آن، Ω مجموعه تمام تخصیص‌های ممکن است.

معیار سود اجتماعی نش، با وجود این که معیاری قدیمی است، در دو سال گذشته مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته است. در جدول ۲.۲ خلاصه‌ای از نتایج مربوط به این سه معیار را می‌توانید ببینید.

۳.۲ تطابق در گراف‌های دوبخشی

بخش قابل توجهی از تکنیک‌های مورد استفاده ما در فصل ۳ مربوط به مبحث تطابق در گراف‌های دوبخشی است. در این بخش، ما به طور مختصر مبحث تطابق در گراف‌های دوبخشی را توضیح می‌دهیم. همچنین تعدادی لم ابتدایی در این رابطه اثبات می‌کنیم که از نتایج آن در فصل سوم استفاده خواهد شد.

یک گراف دوبخشی $H\langle V,E\rangle$ را در نظر بگیرید که در آن، $V=\hat{\mathcal{X}}\cup\hat{\mathcal{Y}}$ مجموعه راس‌های گراف و E مجموعه یال‌های گراف است. یک تطابق M از گراف H، یک زیرمجموعه از یال‌های E است که هیچ دو یالی از آن راس مشترک ندارند. همچنین، منظور از یک تطابق بیشینه، تطابقی است که بیشترین تعداد یال‌ها را دارد. برای مثال، در شکل ۲.۲ می‌توانید یک گراف دوبخشی به همراه یک تطابق بیشینه از آن را مشاهده کنید. در تطابق M، یک راس v آلوده شده است، اگر یک یال مجاور v در M وجود داشته باشد.



شکل ۲.۲: تطابق بیشینه در گراف‌های دوبخشی

تعریف ۸.۲. *گراف دوبخشی H و یک تطابق M از H را در نظر بگیرید. یک مسیر P از H، یک مسیر متناوب است، اگر یال‌های آن یک در میان متعلق به M باشد. همچنین مسیر متناوب P افزایشی است، اگر یال ابتدایی و انتهایی مسیر، متعلق به M نباشند.*

قضیه زیر که توسط برگ در سال ۱۹۵۷ اثبات شد، یکی از قضایای مهم در مبحث تطابق در گراف‌های دوبخشی است.

قضیه ۹.۲. *تطابق M از گراف دوبخشی H بیشینه است، اگر و تنها اگر H شامل هیچ مسیر افزایشی نباشد.*

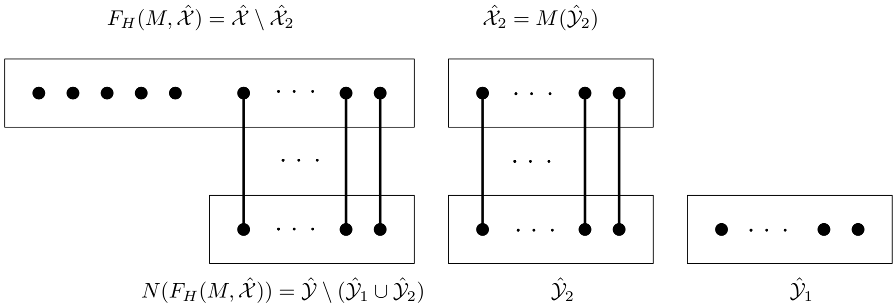
همچنین، قضیه زیر که به قضیه ازدواج هال معروف است و توسط هال [18] در سال ۱۹۳۵ اثبات شد، یک شرط لازم و کافی برای وجود تطابق کامل در گراف دوبخشی ارائه می‌دهد.

قضیه ۱۰.۲. *در گراف دوبخشی $H\langle V, E\rangle$ که درآن، $V = \hat{\mathcal{X}} \cup \hat{\mathcal{Y}}$، یک تطابق وجود دارد که تمام راس‌های $\hat{\mathcal{X}}$ را آلوده می‌کند، اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه $S \in \hat{\mathcal{X}}$ داشته باشیم: $|N(S)| \geq |S|$، که درآن $N(S)$ مجموعه راس‌های همسایه راس‌های حاضر در S و $|S|$ تعداد راس‌های S است.*

تعریف ۱۱.۲. *فرض کنید $H\langle V, E\rangle$ یک گراف دو بخشی با $V = \hat{\mathcal{X}} \cup \hat{\mathcal{Y}}$ باشد و فرض کنید M تطابق بیشینه در H باشد. مجموعه $\hat{\mathcal{Y}}_1$ را به عنوان مجموعه راس‌هایی از $\hat{\mathcal{Y}}$ در نظر بگیرید که با M آلوده نشده‌اند. به علاوه، $\hat{\mathcal{Y}}_2$ را به عنوان مجموعه راس‌هایی در $\hat{\mathcal{Y}}$ در نظر بگیرید که به راس‌های حاضر در $\hat{\mathcal{Y}}_1$ با استفاده از یک مسیر متناوب متصل هستند و قرار دهید $\hat{\mathcal{X}}_2 = M(\hat{\mathcal{Y}}_2)$، که درآن $M(\hat{\mathcal{Y}}_2)$ مجموعه راس‌های در $\hat{\mathcal{X}}$ است که با راس‌های $\hat{\mathcal{Y}}_2$ در M جور شده‌اند. در این صورت، ما $F_H(M, \hat{\mathcal{X}})$ را به عنوان مجموعه راس‌های حاضر در $\hat{\mathcal{X}} \setminus \hat{\mathcal{X}}_2$ تعریف می‌کنیم.*

برای فهم بهتر تعریف ۱۱.۲، شکل ۳.۲ را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف مسیر متناوب، هیچ یالی میان راس‌های آلوده شده از $F_H(M, \hat{\mathcal{X}})$ و $\hat{\mathcal{Y}}_1 \cup \hat{\mathcal{Y}}_2$ وجود ندارد. از سوی دیگر، از آن‌جا که M بیشینه است، هیچ

[18] Hall



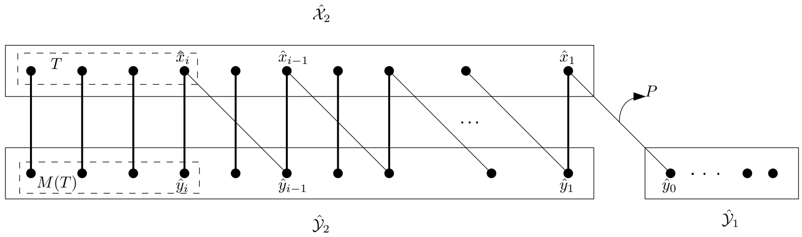
شکل ۳.۲: تعریف F_H

مسیر افزایشی نیز در H وجود ندارد. بنابراین، هیچ یالی بین راس‌های آلوده نشده در $F_H(M,\hat{\mathcal{X}})$ و $\hat{\mathcal{Y}}_1 \cup \hat{\mathcal{Y}}_2$ وجود ندارد. در نتیجه، هیچ یالی بین $F_H(M,\hat{\mathcal{X}})$ و $\hat{\mathcal{Y}}_1 \cup \hat{\mathcal{Y}}_2$ وجود ندارد. به علاوه، $F_H(M,\hat{\mathcal{X}})$ یک خاصیت مهم دیگر نیز دارد: یک تطابق از $N(F_H(M,\hat{\mathcal{X}}))$ به $F_H(M,\hat{\mathcal{X}})$ وجود دارد که همه راس‌های $N(F_H(M,\hat{\mathcal{X}}))$ را آلوده می‌کند، که در آن $N(F_H(M,\hat{\mathcal{X}}))$ مجموعه همسایگان $F_H(M,\hat{\mathcal{X}})$ است .

در لم‌های ۱۲.۲ و ۱۳.۲ ما دو خاصیت قابل توجه را برای گراف‌های دو بخشی نشان می‌دهیم. همچنین در نتیجه این دو لم، نتیجه ۱۴.۲ نیز به ازای هر گراف دو بخشی برقرار است. از نتیجه ۱۴.۲ بعدا جهت خوشه‌بندی افراد در مسئله تخصیص منصفانه برای توابع جمعی استفاده خواهیم کرد.

لم ۱۲.۲. *فرض کنید $H\langle V,E\rangle$ یک گراف دو بخشی با $V = \hat{\mathcal{X}} \cup \hat{\mathcal{Y}}$ باشد و فرض کنید M یک تطابق بیشینه از H باشد. در این صورت، به ازای هر مجموعه $T \subseteq \hat{\mathcal{X}} \setminus F_H(M,\hat{\mathcal{X}})$ رابطه $|N(T)| > |T|$ برقرار است، که در آن $N(T)$ مجموعه راس‌های همسایه T است.*

اثبات. ما $\hat{\mathcal{Y}}_1$ را به عنوان مجموعه راس‌هایی از $\hat{\mathcal{Y}}$ تعریف می‌کنیم که در تطابق M آلوده نشده‌اند. همچنین $\hat{\mathcal{Y}}_2$ را به عنوان راس‌هایی از $\hat{\mathcal{Y}}$ تعریف می‌کنیم که به $\hat{\mathcal{Y}}_1$ با یک مسیر متناوب متصل هستند. به علاوه، فرض کنید $\hat{\mathcal{X}}_2 = M(\hat{\mathcal{Y}}_2)$. با توجه به تعریف داریم $F_H(M,\hat{\mathcal{X}}) = \hat{\mathcal{X}} \setminus \hat{\mathcal{X}}_2$ (شکل ۳.۲ را ببینید). همان‌طور که قبلا به آن اشاره شد، همه راس‌های حاضر در $\hat{\mathcal{X}}_2$ در تطابق M آلوده شده‌اند. در نتیجه، همه راس‌های حاضر در T در M آلوده شده‌اند و $|N(T)| \geq |T|$. فرض کنید $M(T)$ مجموعه راس‌هایی باشد که در تطابق M با راس‌های T جور شده‌اند. می‌دانیم که هر راس از T در حداقل یک مسیر متناوب که $\hat{\mathcal{Y}}_1$ را به $\hat{\mathcal{Y}}_2$ متصل می‌کند حضور دارد. فرض کنید $P = \langle \hat{y}_0, \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \dots, \hat{x}_k, \hat{y}_k \rangle$ یکی از این مسیرها باشد که شامل حداقل یکی از راس‌های T است. از آنجا که P مسیر متناوبی است که $\hat{\mathcal{Y}}_1$ را به $\hat{\mathcal{Y}}_2$ متصل می‌کند، داریم $\hat{y}_0 \in \hat{\mathcal{Y}}_1$ (تصویر ۴.۲). به علاوه، بر اساس تعریف مسیر متناوب، هر یال $(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ از P متعلق به M است و هر یال $(\hat{x}_j, \hat{y}_{j-1})$ به M تعلق ندارد.



شکل ۴.۲: مسیر متناوب P مجموعه $\hat{\mathcal{Y}}_1$ را به $\hat{\mathcal{Y}}_2$ متصل می‌کند و با T برخورد می‌کند.

فرض کنید $\hat{x}_i$ اولین راس از T باشد که در P ظاهر شده است. می‌دانیم که یال $(\hat{x}_i, \hat{y}_{i-1})$ به M تعلق ندارد. از سوی دیگر، چون $\hat{x}_i$ اولین راس از T در M است، داریم $\hat{x}_{i-1} \notin T$. دقت کنید که $\hat{y}_{i-1}$ متعلق به $M(T)$ نیست، زیرا که هر راس از $M(T)$ با یک راس از T در M جور شده است و $(\hat{x}_{i-1}, \hat{y}_{i-1})$ به M تعلق دارد. این نکته که $\hat{y}_{i-1} \notin M(T)$ است، یعنی $N(T)$ شامل حداقل یک راس است که در $M(T)$ حضور ندارد. چون همه راس‌های داخل $M(T)$ در $N(T)$ هستند، داریم $|N(T)| > |M(T)|$ و لذا $|N(T)| > |T|$. ■

لم ۱۳.۲. *به ازای یک گراف دو بخشی $H\langle V, E\rangle$ با شرط $V = \hat{\mathcal{X}} \cup \hat{\mathcal{Y}}$، رابطه $F_H(M, \hat{\mathcal{X}}) = \emptyset$ برقرار است، اگر و تنها اگر به ازای هر $T \subseteq \hat{\mathcal{X}}$ داشته باشیم: $|N(T)| > |T|$.*

اثبات. اگر $F_H(M, \hat{\mathcal{X}}) = \emptyset$، آنگاه بر اساس لم ۱۲.۲ به ازای هر $T \subseteq \hat{\mathcal{X}}$ داریم $|N(T)| > |T|$.
از سوی دیگر، فرض کنید که به ازای هر $T \subseteq \hat{\mathcal{X}}$ داریم $|N(T)| > |T|$. در این صورت نشان می‌دهیم که $F_H(M, \hat{\mathcal{X}}) = \emptyset$. برای برهان خلف، فرض کنید $F_H(M, \hat{\mathcal{X}}) \neq \emptyset$ و قرار دهید $T = F_H(M, \hat{\mathcal{X}})$. از آنجا که یک تطابق از T به $N(T)$ وجود دارد که همه راس‌های $N(T)$ را آلوده می‌کند، داریم $|T| \geq |N(T)|$ که این تناقض است. بنابراین، $F_H(M, \hat{\mathcal{X}}) = \emptyset$. ■

نتیجه ۱۴.۲ (از لم‌های ۱۳.۲ و ۱۲.۲)**.** *فرض کنید $H\langle V, E\rangle$ یک گراف دو بخشی با $V = \hat{\mathcal{X}} \cup \hat{\mathcal{Y}}$ باشد و فرض کنید M یک تطابق بیشینه از H باشد. به علاوه، فرض کنید $H'(V', E')$ یک زیرگراف القایی از H با $V' = \hat{\mathcal{X}}' \cup \hat{\mathcal{Y}}'$ باشد، که $\hat{\mathcal{X}}' = \hat{\mathcal{X}} \setminus F_H(M, \hat{\mathcal{X}})$ و $\hat{\mathcal{Y}}' = \hat{\mathcal{Y}} \setminus N(F_H(M, \hat{\mathcal{X}}))$. در این صورت، به ازای هر تطابق بیشینه M' از H' رابطه $F_{H'}(M', \hat{\mathcal{X}}') = \emptyset$ برقرار است.*

فصل ۳

سهم بیش‌کمینه برای توابع ارزش جمعی

تمرکز ما در این فصل، بر روی سهم بیش‌کمینه، در حالتی است که توابع مطلوبیت افراد جمعی باشد. همان‌طور که در بخش دوم به آن اشاره شده، بهترین تضمین اثبات شده برای توابع مطلوبیت جمعی، مقدار ۲/۳ − MMS است که توسط پروکاچیا و ونگ ارائه شد. در این فصل، ما یک روش تخصیص ارائه می‌دهیم که نسبت ۳/۴ از سهم بیش‌کمینه همه افراد را تضمین می‌کند.

در بخش بعدی، ابتدا مروری بر نتایج قبلی موجود برای توابع ارزش جمعی انجام می‌دهیم و نتایج خود را با آنها مقایسه می‌کنیم. سپس، الگوریتم تخصیص خود را برای حالت توابع مطلوبیت جمعی ارائه خواهیم داد. به علت حجم بالای مطالب این بخش، اثبات‌های مربوط به قضایا و لم‌ها را به پیوست انتقال داده‌ایم. همچنین به علت رعایت اختصار، از اثبات این امر که الگوریتم ما در این فصل قابل پیاده‌سازی در زمان چندجمله‌ای است نیز صرف نظر می‌کنیم. برای مشاهده اثبات کامل این امر، می‌توانید به نسخه کامل مقاله [۴۵] مراجعه نمایید.

۱.۳ مروری بر نتایج قبلی و مقایسه آنها با نتایج این فصل

همان‌طور که قبلا اشاره شد، معیار سهم بیش‌کمینه، اولین بار در سال ۲۰۱۱ توسط بودیش [۲۴] معرفی شد. بودیش با انگیزه تخصیص منصفانه درس‌ها به دانشجوها، معیار سهم بیش‌کمینه را تعریف کرد. بورت و لمیتر [۱۷] برای اولین بار این معیار را در حالتی که قرار است تعدادی شیء به افراد تخصیص داده شود بررسی کردند. آنها نشان دادند که برای حالت خاص که ارزش اشیا برای هر فرد ۰ یا ۱ باشد، یا زمانی که $m \leq n + ۳$ باشد، و همچنین توابع مطلوبیت افراد خاصیت جمعی داشته باشد، یک تخصیص MMS حتما وجود دارد.

در حالی که تمام نتایج تجربی وجود تخصیص MMS را در حالت کلی تایید می‌کرد [۱۷] ، این حدس با مقاله پروکاچیا و ونگ [۶۵] رد شد. آنها با یک مثال نقض نشان دادند که نمونه‌هایی ازمسئله وجود دارد که برای آنها تضمین سهم بیش‌کمینه برای همه افراد امکان‌پذیر نیست. به علاوه، آنها یک روش تخصیص

کارهای قبلی	اثبات وجودی	الگوریتم چندجمله‌ای	$n = ۳$	$n = ۴$
پروکاچیا و ونگ [۶۵]	۲/۳ − MMS	–	۳/۴ − MMS	۳/۴ − MMS
آماناتیدیس و همکاران [۴]	–	$(۲/۳ - \epsilon)$ − MMS	۷/۸ − MMS	–
بارمان و همکاران [۱۰]	–	۲/۳ − MMS	–	–
گروز و مونوت [۵۱]	–	–	۸/۹ − MMS	–
نتایج ما [۴۵]	۳/۴ − MMS	$(۳/۴ - \epsilon)$ − MMS	–	۴/۵ − MMS

جدول ۱.۳: خلاصه نتایج قبلی و مقایسه آن با نتایج ما

MMS − ۲/۳ ارائه کردند. آنها همچنین، ثابت کردند که برای حالت خاص ۴ $\leq n$ الگوریتم آنها یک تخصیص MMS − ۳/۴ را تضمین می‌کند. با این وجود، روش آنها تنها در حالتی قابل پیاده‌سازی در زمان چندجمله‌ای است که تعداد افراد ثابت فرض شود. در ادامه این کار، آماناتیدیس و همکاران [۴] یک الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای پیدا کردن یک تخصیص MMS − $(۲/۳ - \epsilon)$ ارائه کردند که در آن ϵ یک مقدار ثابت دلخواه است. آنها همچنین نشان دادند که برای حالت خاص ۳ نفر، یک تخصیص MMS − ۷/۸ همواره وجود دارد. نسبت ۷/۸ بعدا توسط گروز و مونوت [۵۱] به ۸/۹ بهبود یافت.

در [۴۵]، ما نتیجه پروکاچیا و ونگ [۶۵] را با اثبات وجود یک تخصیص MMS − ۳/۴ بهبود می‌بخشیم. به علاوه، یک الگوریتم چندجمله‌ای برای به دست آوردن چنین تخصیصی ارائه می‌کنیم. این نتیجه از این جهت مورد توجه است که روش‌های قبلی که برای تخصیص MMS − ۲/۳ ارائه شده بودند همگی محکم بودند. به عبارتی، برای هر کدام از این روش‌ها، مثالی وجود داشت که الگوریتم ارائه شده تقریبی بهتر از ۲/۳ را تضمین نمی‌کرد. این مسئله، بسیاری از محققان در این زمینه را متقاعد کرده بود که ۲/۳ بهترین تضمین ممکن است. این نشان می‌دهد که تکنیک‌های مورد استفاده تا قبل از این نتیجه قدرت کافی برای اثبات تقریب بهتر از ۲/۳ را نداشته است. در این بخش ما یک درک بهتر از این معیار را با آشکار ساختن خاصیت‌های جدید برای آن مهیا می‌کنیم.

خلاصه‌ای از نتایج ما مربوط به سهم بیش‌کمینه برای توابع ارزش جمعی را می‌توانید در جدول ۱.۳ مشاهده نمایید. همان‌طور که از جدول مشخص است، ما علاوه بر ارائه تقریب ۳/۴ در حالت کلی و یک الگوریتم برای این تقریب، روشی ارائه می‌دهیم که برای حالت خاص چهار نفر، تقریب ۴/۵ را تضمین کند.

در این فصل، ما روش خود را برای تخصیص MMS − ۳/۴ ارائه و تضمین آن را اثبات می‌کنیم. با توجه به پیچیدگی این روش، قبل از ورود به الگوریتم اصلی، ابتدا در بخش‌های ۲.۳، ۳.۳ و ۴.۳، مفاهیم بنیادی که در روش ما استفاده می‌شود را معرفی می‌کنیم و سپس به شرح الگوریتم خود می‌پردازیم. **برای راحتی، در طول این فصل، فرض می‌کنیم که به ازای هر فرد i، رابطه ۱ = MMS_i برقرار است.** به راحتی می‌توان

نشان داد که این فرض، بدون از دست دادن کلیت است.

۲.۳ الگوریتم پر کردن کیف

حالتی را در نظر بگیرید که ارزش اشیا برای همه افراد به اندازه کافی کم است. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید مقدار $۱ > \alpha > ۰$ وجود داشته باشد، به گونه‌ای که برای هر فرد i و شیء m_j، ارزش شیء m_j برای فرد i حداکثر برابر با α باشد. در این حالت، با روش ساده زیر می‌توان تمام اشیا را به همه افراد تخصیص داد:

- افراد را با یک ترتیب دلخواه مرتب کنید.
- با یک کیف خالی شروع کرده و اشیا را با ترتیب دلخواه و یکی یکی به داخل کیف اضافه کنید.
- هر زمانی که ارزش اشیای داخل کیف برای یک فرد i حداقل به اندازه $(۱ - \alpha)$ رسید، همه اشیای داخل کیف را به او می‌دهیم و سپس او و اشیای تعلق گرفته به او را حذف و عملیات را با سایر افراد و کیف خالی ادامه می‌دهیم. اگر چند نفر به طور همزمان شرایط گرفتن اشیا را دارا بودند، یکی از آنها را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

در طول این فصل، از این عملیات با نام «پر کردن کیف» یاد می‌کنیم. به راحتی می‌توان نشان داد که این الگوریتم، یک تخصیص $(۱ - \alpha) - \mathsf{MMS}$ است. ایده اصلی برای اثبات این ادعا این است که اثبات کنیم هر فرد یک بسته از اشیا را در طول الگوریتم به دست می‌آورد. برای این، کافی است نشان دهیم که هر زمانی یک بسته از اشیا به فردی داده می‌شود، ارزش این بسته برای سایر افراد باقیمانده حداکثر به اندازه مقدار سهم بیش‌کمینه آنها است. این، در کنار این حقیقت که ارزش کل اشیا برای هر فرد i حداقل به میزان $n \cdot \mathsf{MMS}_i = n$ است، نتیجه می‌دهد که روش پر کردن کیف، یک تخصیص $(۱ - \alpha) - \mathsf{MMS}$ را تضمین می‌کند.

مشاهده بالا مبین این حقیقت است که اشیا با ارزش کم را می‌توان به صورت منصفانه بین افراد تقسیم کرد. بنابراین، بخش سخت کار مربوط به اشیایی است که حداقل برای یک نفر ارزش قابل توجهی دارند. برای تخصیص این اشیا، ما از یک روش خوشه‌بندی استفاده می‌کنیم. به بیان ساده، ما افراد را بر اساس توابع ارزششان به سه خوشه مختلف تقسیم می‌کنیم. سپس برای هر خوشه خاصیت‌هایی را اثبات می‌کنیم و در نهایت، با روشی که در واقع شکل پیچیده‌تری از روش پر کردن کیف است، اشیا را به افراد تخصیص می‌دهیم.

۳.۳ کاهش‌ناپذیری

ما مفهوم کاهش‌پذیری را برای یک نمونه از مسئله به این صورت تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۳. *یک نمونه از مسئله تخصیص منصفانه αـ کاهش‌پذیر است، اگر یک مجموعه $T \subset \mathcal{N}$ از افراد و یک مجموعه S از اشیا و یک تخصیص $\mathcal{A} = \langle A_۱, A_۲, \ldots, A_{|T|}\rangle$ از S به افراد در T وجود داشته باشد، به طوری که*

$$\forall i \in T \qquad\qquad V_i(A_i) \geq \alpha$$

و

$$\forall i \notin T \qquad \mathsf{MMS}_i^{n-|T|}(\mathcal{M} \setminus S) \geq ۱.$$

به طور مشابه، ما یک نمونه از مسئله را αـ*کاهش‌ناپذیر* می‌نامیم، اگر αـ کاهش‌پذیر نباشد. ایده اصلی پشت این تعریف این است که برای اثبات وجود یک تخصیص $\mathsf{MMS} - \alpha$ برای همه نمونه‌ها از مسئله، کافی است که آن را تنها برای نمونه‌های αـ کاهش‌ناپذیر اثبات کنیم.

مشاهده ۲.۳. *مسئله تخصیص منصفانه شامل یک تخصیص $\mathsf{MMS} - \alpha$ است، اگر و تنها اگر به ازای تمام نمونه‌های αـ کاهش‌ناپذیر، چنین تخصیصی وجود داشته باشد.*

به عنوان مثال، لم ۳.۳ یک نتیجه ساده از کاهش‌ناپذیری را نشان می‌دهد.

لم ۳.۳. *برای هر نمونه αـ کاهش‌ناپذیر داریم:*

$$\forall i \in \mathcal{N}, m_j \in \mathcal{M} \qquad V_i(m_j) < \alpha.$$

اثبات. ایده اصلی اثبات این است که اگر برای هر فرد i داشته باشیم $\mathsf{MMS}_i \geq ۱$، در این صورت، به ازای هر شیء $m_j \in \mathcal{M}$ داریم $\mathsf{MMS}_i^{n-۱}(\mathcal{M} \setminus m_j) \geq ۱$. این رابطه به این دلیل برقرار است که حذف یک شیء از مجموعه $\mathcal{M}$ ارزش حداکثر یک بسته را در تقسیم‌بندی بهینه اشیا توسط فرد i کاهش می‌دهد. بنابراین، حداقل $n - ۱$ دسته دست‌نخورده باقی می‌ماند که ارزش هر کدام از آنها حداقل برابر با ۱ است. بنابراین: $\mathsf{MMS}_i^{n-۱}(\mathcal{M} \setminus m_j) \geq ۱$. ادامه اثبات در نتیجه تعریف αـ کاهش‌ناپذیری است. اگر ارزش یک شیء m_j برای یک فرد i حداقل به میزان α باشد، مسئله αـ کاهش‌پذیر است، زیرا که اگر m_j را به فرد i اعطا کنیم، به ازای هر فرد k داریم $\mathsf{MMS}_{V_k}^{n-۱}(\mathcal{M} \setminus \{m_j\}) \geq ۱$، که این با فرض کاهش‌ـناپذیری مسئله در تناقض است. ■

لم ۳.۳ بیان می‌دارد که در یک نمونه کاهش‌ناپذیر، هیچ شیء ی به تنهایی نمی‌تواند یک فرد را راضی کند. شایان ذکر است که اثبات لم ۳.۳ وابسته جمعی بودن توابع ارزشی نیست، و به ازای هر تابع ارزش یکنوا برقرار

است. بنابراین، می‌توانیم از این لم در حالت‌هایی که توابع ارزش زیرپیمانه‌ای، XOS و یا زیرجمعی هستند نیز استفاده کنیم.

به عنوان یک حالت کلی‌تر از لم ۳.۳، ما در لم ۴.۳ کاهش‌پذیری را در حالتی بررسی می‌کنیم که دو شیء توانایی راضی کردن یک فرد را داشته باشند. دقت کنید که بر خلاف لم ۳.۳، نتایج لم‌های ۴.۳ و ۵.۳ تنها در حالت توابع مطلوبیت جمعی برقرار است و برای توابع مطلوبیت کلی‌تر قابل اعمال نیست.

لم ۴.۳. *اگر در یک نمونه ۳/۴ـ کاهش‌ناپذیر از مسئله، به ازای یک فرد i و اشیای $m_j, m_k \in \mathcal{M}$ داشته باشیم $V_i(\{m_j, m_k\}) \geq ۳/۴$ ، در این صورت حتما یک فرد $i' \neq i$ نیز وجود خواهد داشت، به گونه‌ای که $V_{i'}(\{m_j, m_k\}) > ۱$.*

اثبات. به عنوان فرض خلف در نظر بگیرید که به ازای هر فرد $i' \neq i$ داریم $V_{i'}(\{m_j, m_k\}) \leq ۱$. بر این اساس، نشان می‌دهیم رابطه

$$\mathsf{MMS}_{i'}^{n-۱}(\mathcal{M} \setminus \{m_j, m_k\}) \geq ۱ \qquad (۱.۳)$$

برقرار است. دلیل این امر این است که حذف دو شیء m_j و m_k از $\mathcal{M}$ ارزش حداکثر دو بسته را در تقسیم‌بندی بهینه اشیا برای فرد i' کاهش می‌دهد. در تقسیم‌بندی بهینه فرد i'، اگر بعد از حذف این دو شیء $n-۱$ بسته دست‌نخورده باقی بماند، در این صورت نامساوی (۱.۳) برقرار است. در غیر این صورت، ادغام دو بسته‌ای که شامل اشیای m_j و m_k بودند، منتج به یک بسته با ارزش حداقل ۱ برای فرد i' می‌شود. این بسته به همراه $n-۲$ بسته باقی‌مانده یک تقسیم‌بندی مناسب برای $n-۱$ نفر خواهد بود. بنابراین، نامساوی (۱.۳) به ازای هر فرد i' برقرار است و این یعنی با تخصیص $S = \{m_j, m_k\}$ به فرد i نه تنها رابطه $V_i(S) \geq ۳/۴$ برقرار است، که به ازای هر $i' \neq i$ داریم $\mathsf{MMS}_{i'}^{n-۱}(\mathcal{M} \setminus \{m_j, m_k\}) \geq ۱$. این یعنی مسئله ما ۳/۴ـ کاهش‌پذیر بوده است که با فرض کاهش‌ناپذیری در تناقض است. ■

بر اساس لم ۴.۳، در هر نمونه ۳/۴ـ کاهش‌ناپذیر از مسئله، به ازای هر فرد i و اشیای m_j, m_k، یا رابطه $V_i(\{m_j, m_k\}) < ۳/۴$ برقرار است، یا یک فرد دیگر $i' \neq i$ وجود دارد، به گونه‌ای که رابطه $V_{i'}(\{m_j, m_k\}) > ۱$ برقرار است. در غیر این صورت، مسئله قابل کاهش است. به صورت کلی‌تر، فرض کنید $S = \{m_{j_۱}, m_{j_۲}, \ldots, m_{j_{|S|}}\}$ یک زیرمجموعه از اشیای $\mathcal{M}$ باشد، و $T = \{i_۱, i_۲, \ldots, i_{|T|}\}$ یک مجموعه از افراد باشد، به گونه‌ای که:

(i) $|S| = ۲|T|$

(ii) به ازای هر فرد $i_a \in T$ داشته باشیم: $V_{i_a}(\{m_{j_{2a-1}}, m_{j_{2a}}\}) \geq ۳/۴$.

(iii) به ازای هر فرد $i \notin T$ داشته باشیم: $V_i(\{m_{j_{2a-1}}, m_{j_{2a}}\}) \leq ۱$ (به ازای هر $۱ \leq a \leq |T|$).

در این صورت، مسئله ۳/۴ـ کاهش‌پذیر است.

لم ۳.۵. *در هر نمونه ۳/۴ـ کاهش‌ناپذیر از مسئله، به ازای هر مجموعه $T = \{i_1, i_2, \ldots, i_{|T|}\}$ از افراد و مجموعه $S = \{m_{j_1}, m_{j_2}, \ldots, m_{j_{|S|}}\}$ از اشیا، حداقل یکی از شرط‌های مطرح شده در بالا نقض می‌شود.*

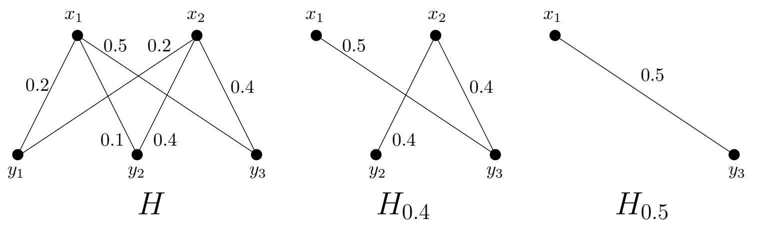
اثبات. برای اثبات این لم، ما لم ۳.۴ را $|T|$ مرتبه اعمال می‌کنیم. فرد $i \notin T$ را در نظر بگیرید. بر اساس لم ۳.۴، اگر ما اشیای m_{j_1} و m_{j_2} را به i_1 تخصیص بدهیم، فرد i می‌تواند اشیای $\mathcal{M} \setminus \{m_{j_1} m_{j_2}\}$ را در $n-1$ بسته با ارزش حداقل ۱ برای خودش تقسیم کند. این یعنی $\mathsf{MMS}_i^{n-1}(\mathcal{M} \setminus \{m_{j_1}, m_{j_2}\}) \geq ۱$. با همین استدلال، بعد از تخصیص m_{j_3} و m_{j_4} به فرد i_2 داریم $\mathsf{MMS}_i^{n-2}(\mathcal{M} \setminus \{m_{j_1}, m_{j_2}, m_{j_3}, m_{j_4}\}) \geq ۱$. با تکرار استدلال بالا برای $|T|$ مرتبه، داریم $\mathsf{MMS}_i^{n-|T|}(\mathcal{M} \setminus S) \geq ۱$. از سوی دیگر، بر اساس شرط دوم، هر فرد i_k با اشیای $m_{j_{2k-1}}$ و $m_{j_{2k}}$ راضی می‌شود. این یعنی این که ما می‌توانیم با تخصیص این اشیا، نمونه را کاهش دهیم که این با فرض کاهش‌ناپذیری در تناقض است. ■

۳.۴ مدل کردن مسئله با گراف‌های دوبخشی

ما در الگوریتم خود برای تخصیص اشیا به طور مکرر از الگوریتم‌های کلاسیک در زمینه گراف‌های دوبخشی استفاده می‌کنیم. برای این کار، نیاز داریم که ابتدا مسئله را با یک گراف دو بخشی مدل کنیم. فرض کنید $G = \langle V(G), E(G) \rangle$ یک گراف باشد، به گونه‌ای که $V(G) = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ مجموعه راس‌های گراف است، که در آن $\mathcal{Y}$ اشاره به افراد و $\mathcal{X}$ اشاره به اشیا دارد. به بیان دقیق‌تر، به ازای هر فرد i ما یک راس $y_i \in \mathcal{Y}$ و به ازای هر شیء m_j یک راس $x_j \in \mathcal{X}$ در نظر می‌گیریم. همچنین، به ازای هر جفت از راس‌های $y_i \in \mathcal{Y}$ و $x_j \in \mathcal{X}$، یال (x_j, y_i) در $E(G)$ با وزن $w(x_j, y_i) = V_i(\{m_j\})$ قرار دارد. این گراف را گراف مطلوبیت می‌نامیم.

در طول این بخش، ما نیاز به انجام عملیاتی بر روی گراف مطلوبیت داریم که از آن با نام فیلتر کردن یاد می‌کنیم. به بیان ساده، فیلتر کردن عملیاتی است که طی آن یک گراف وزن دار به عنوان ورودی داده می‌شود و همه یال‌هایی که دارای وزن کمتر از یک حد مشخصی هستند را حذف می‌کند. در ادامه، تمام راسهای تنها [1]

[1] یک راس تنها است، اگر به هیچ یالی متصل نباشد



شکل ۱.۳: یک مثال از βـ فیلتر بر روی یک گراف. بعد از حذف یال‌های با ارزش کمتر از β ممکن است تعدادی از راس‌ها تنها شوند. تمام چنین راس‌هایی از گراف فیلتر شده حذف خواهند شد.

را نیز حذف و گراف باقی‌مانده را به عنوان گراف فیلتر شده به خروجی می‌دهد. در تعریف ۶.۳ ، این عملیات را به صورت رسمی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶.۳. یک βـ *فیلتر از گراف وزن دار* $H\langle V(H), E(H)\rangle$ *که با* $H_\beta\langle V_\beta(H), E_\beta(H)\rangle$ *نشان داده می‌شود، یک زیرگراف از* H *است که در آن* $V_\beta(H)$ *مجموعه تمام راس‌های* $V(H)$ *است که حداقل با یک یال با وزن* β *یا بیشتر همسایه هستند و همچنین* $E_\beta(H) = \{(u,v) \in E(H) | w(u,v) \geq \beta\}$.

شکل ۱.۳ یک گراف H به همراه $H_{۰/۴}$ و $H_{۰/۵}$ را نشان می‌دهد. دقت کنید که هیچ‌کدام ازراس‌های این گراف‌ها تنها نیستند. برای گراف مطلوبیت، ما با نمادهای $\mathcal{X}_\beta$ و $\mathcal{Y}_\beta$، مجموعه افراد و اشیائی را نشان می‌دهیم که در $V_\beta(G)$ حضور دارند.

تطابق وزن دار بیشینه و عدم وجود چرخه رشک

ما در الگوریتم خود، افراد را در دو مرحله راضی می‌کنیم. به بیان دقیق‌تر، به هر فرد دو مجموعه از اشیا را اعطا می‌کنیم که در مجموع برای او ارزش ۳/۴ دارد. ما مجموعه اول اشیا به که فرد i داده می‌شود را با f_i و مجموعه دوم را با g_i نشان می‌دهیم. به علاوه، به هر کدام از افراد، یک از حالات راضی، ناراضی، و نیمه‌راضی را بر اساس قوانین زیر اعطا می‌کنیم:

۱. یک فرد i راضی است، اگر و تنها اگر $V_i(f_i \cup g_i) \geq ۳/۴$.

۲. یک فرد i نیمه‌راضی است، اگر $f_i \neq \emptyset$، اما $g_i = \emptyset$. در این حالت، قرار می‌دهیم $\epsilon_i = ۳/۴ - V_i(f_i)$.

۳. یک فرد i ناراضی است، اگر $f_i = g_i = \emptyset$.

همان‌طور که خواهیم دید، الگوریتم ما به گونه‌ای عمل می‌کند که به ازای هر فرد نیمه‌راضی i رابطه $V_i(f_i) \geq ۱/۲$ برقرار باشد. این نتیجه می‌دهد که به ازای هر فرد i داریم $\epsilon_i < ۱/۴$. ما همچنین جهت تعیین اولویت در بین افراد، از مفهوم رشک ورزیدن استفاده می‌کنیم.

تعریف ۷.۳. *فرض کنید T یک مجموعه از افراد نیمه‌راضی باشد. ما یک فرد $i \in T$ را برنده T می‌نامیم، اگر فرد i به هیچ فرد دیگری در T رشک نورزد. به طور مشابه، یک فرد i را بازنده T می‌نامیم، اگر هیچ فرد دیگری از T به فرد i رشک نورزد.*

دقت کنید که ممکن است حالت‌هایی وجود داشته باشد که در آن یک فرد i هم برنده و هم بازنده باشد. بر اساس این تعریف، ما مفهوم دیگری به نام عدم وجود چرخه رشک را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸.۳. *یک مجموعه T از افراد نیمه‌راضی فاقد چرخه رشک است، اگر هر زیرمجموعه ناتهی از T شامل حداقل یک برنده و یک بازنده باشد.*

فرض کنید C یک مجموعه فاقد چرخه رشک از افراد نیمه‌راضی باشد. گراف نمایانگر C را به صورت یک گراف جهت‌دار $G_C\langle V(G_C), \overrightarrow{E}(G_C)\rangle$ تعریف می‌کنیم، که در آن به ازای هر فرد $i \in C$ یک راس v_i در $V(G_C)$ قرار دارد. همچنین یک یال جهت‌دار از v_i به v_j در $\overrightarrow{E}(G_C)$ وجود دارد، اگر i به j رشک بورزد. در لم ۹.۳ ما نشان می‌دهیم که G_C فاقد دور است.

لم ۹.۳. *به ازای هر مجموجه فاقد چرخه رشک از افراد نیمه‌راضی C، گراف G_C یک گراف بدون دور است.*

تعریف ۱۰.۳. *یک ترتیب توپولوژیکی از یک مجموعه C شامل افراد نیمه‌راضی که فاقد چرخه رشک هستند، یک ترتیب کامل $\prec_O$ است که درواقع به ترتیب توپولوژیکی راس‌های مربوطه در گراف G_C اشاره می‌کند. به بیان رسمی‌تر، برای افراد $i, j \in C$ رابطه $i \prec_O j$ برقرار است، اگر و تنها اگر v_i در G_C قبل از v_j ظاهر شده باشد.*

دقت کنید که در ترتیب توپولوژیکی یک مجموعه فاقد چرخه رشک C اگر $i \in C$ به $j \in C$ رشک بورزد، آنگاه داریم $i \prec_O j$.

مشاهده ۱۱.۳. *فرض کنید C یک مجموعه از افراد نیمه‌راضی باشند، به طوری که تخصیص مربوط به آنها فاقد چرخه رشک است. در این صورت، به ازای هر فرد $i \in C$ به گونه‌ای که $i \prec_O j$ داریم $V_i(f_j) \leq ۳/۴ - \epsilon_i$.*

ما تطابق بیشینه وزن‌دار در یک گراف را به صورت تطابقی تعریف می‌کنیم که بیشترین تعداد یال‌ها را دارد، و از میان آنهایی که تعداد یال بیشینه را دارند، تطابقی که بیشترین وزن را دارد. برای راحتی، ما این تطابق را با عبارت MCMWM [۲] نشان می‌دهیم. در لم ۱۲.۳ نشان می‌دهیم که یک MCMWM از یک گراف وزن دار دو بخشی، خاصیت‌هایی دارد که به ما در تولید تخصیص‌های فاقد چرخه رشک کمک می‌کند.

[2] Maximum Cardinality Maximum Weighted Matching

لم ۱۲.۳. *فرض کنید $H\langle V(H), E(H)\rangle$ یک گراف دو بخشی با $V(H) = \hat{\mathcal{X}} \cup \hat{\mathcal{Y}}$ باشد و فرض کنید $M = \{(\hat{x}_۱, \hat{y}_۱), ..., (\hat{x}_k, \hat{y}_k)\}$ یک MCMWM از H باشد. در این صورت، به ازای هر زیرمجموعه $T \subseteq \{\hat{y}_۱, \hat{y}_۲, \ldots, \hat{y}_k\}$، خاصیت‌های زیر برقرار است:*

۱. *یک راس $\hat{y}_j \in T$ وجود دارد که برنده مجموعه T است. به عبارتی به ازای هر $\hat{x}_i \in M(T)$ و $(\hat{x}_i, \hat{y}_j) \in E(H)$، داریم $w(\hat{x}_j, \hat{y}_j) \geq w(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$.*

۲. *یک راس $\hat{y}_j \in T$ وجود دارد که بازنده مجموعه T است. به عبارتی به ازای هر $\hat{y}_i \in T$ و $(\hat{x}_j, \hat{y}_i) \in E(H)$، داریم $w(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \geq w(\hat{x}_j, \hat{y}_i)$.*

۳. *به ازای هر راس $\hat{y}_i \in T$ و هر راس آلوده نشده $\hat{x}_j \in \hat{\mathcal{X}}$ به گونه‌ای که $(\hat{x}_j, \hat{y}_i) \in E(H)$، داریم $w(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \geq w(\hat{x}_j, \hat{y}_i)$.*

منظور از $M(T)$ مجموعه راس‌هایی است که با راس‌های T در M مطابق شده‌اند.

به شباهت‌های شرط اول و دوم لم ۱۲.۳ و تعریف برنده و بازنده در تعریف ۷.۳ دقت کنید. در بخش ۵.۳، ما اشیا را به افراد بر اساس یک MCMWM از گراف مطلوبیت تخصیص می‌دهیم. لم ۱۲.۳ تضمین می‌کند که نتیجه چنین تخصیصی یک مجموعه فاقد چرخه رشک از افراد نیمه‌راضی خواهد بود.

۵.۳ فاز اول: ساخت خوشه‌ها

در این بخش، روش خود را برای خوشه‌بندی افراد مشخص می‌کنیم. به طور کلی، ما افراد را به سه خوشه $\mathcal{C}_۱, \mathcal{C}_۲$ و $\mathcal{C}_۳$ تقسیم می‌کنیم. همان‌طور که قبلا اشاره شد، در طول الگوریتم، دو مجموعه از اشیای f_i, g_i به هر فرد i اعطا می‌شود. در طول این بخش، تعدادی از لم‌ها را با برچسب *لم ارزشی* مشخص می‌کنیم. در این لم ها، حد بالایی برای ارزش f_i و g_i را برای هر فرد $i \neq j$ مشخص می‌کنیم. خلاصه‌ای ازاین لم‌ها را می‌توانید در جدول‌های ۲.۳، ۳.۳ و ۴.۳ مشاهده کنید.

بعد از ساختن هر خوشه، آنها را اصلاح می‌کنیم. در مرحله اصلاح هر خوشه، ما یک مجموعه از اشیای باقی‌مانده را در نظر می‌گیریم. اگر هر شیء ی از این مجموعه می‌توانست به تنهایی یک فرد از یک خوشه تازه ایجاد شده را راضی کند، این شیء را به آن فرد اعطا و او را راضی می‌کنیم. هدف مرحله اصلاح این است که تضمین کند که اشیای باقی‌مانده برای افراد حاضر در خوشه ساخته شده به اندازه کافی کم‌ارزش هستند.

در طول الگوریتم، با استفاده از $\mathcal{S}$ مجموعه افراد راضی شده را نشان می‌دهیم. به علاوه، با استفاده از $\mathcal{S}_۱, \mathcal{S}_۲$ و $\mathcal{S}_۳$، زیرمجموعه‌هایی از افراد $\mathcal{S}$ را نشان می‌دهیم که در آن $\mathcal{S}_i$ اشاره به افرادی از $\mathcal{S}$ دارد که قبلا به $\mathcal{C}_i$ تعلق داشته‌اند. به علاوه، از $\mathcal{S}_۱^r$ و $\mathcal{S}_۲^r$ جهت اشاره به افراد $\mathcal{S}_۱$ و $\mathcal{S}_۲$ که در مرحله اصلاح خوشه‌های $\mathcal{C}_۱$ و $\mathcal{C}_۲$ راضی شده‌اند، استفاده می‌کنیم.

خوشه اول

گراف فیلتر شده $G_{۱/۲}\langle V_{۱/۲}(G), E_{۱/۲}(G)\rangle$ از گراف ارزش G را در نظر بگیرید، و فرض کنید که M یک MCMWM از $G_{۱/۲}$ باشد. ما خوشه $\mathcal{C}_۱$ را معادل مجموعه افرادی تعریف می‌کنیم که راس مربوطه آنها در $N(F_{G_{۱/۲}}(M, \mathcal{X}_{۱/۲}))$ قرار دارد. برای راحتی، با نماد $V_{\mathcal{C}_۱}$ مجموعه راس‌هایی از $V(G)$ را نشان می‌دهیم که به افراد داخل $\mathcal{C}_۱$ اشاره می‌کنند. به بیان دیگر، $V_{\mathcal{C}_۱} = N(F_{G_{۱/۲}}(M, \mathcal{X}_{۱/۲}))$.

همچنین، فرض کنید $U_۱$ مجموعه راس‌های آلوده نشده در $F_{G_{۱/۲}}(M, \mathcal{X}_{۱/۲})$ و $S_۱$ مجموعه راس‌های آلوده شده در آن باشد. به ازای هر یال $(x_j, y_i) \in M$، به گونه‌ای که $x_j \in S_۱$ باشد، ما شیء m_j را به فرد i تخصیص می‌دهیم. به بیان دقیق‌تر، قرار می‌دهیم $f_i = \{m_j\}$. از آنجا که $w(x_j, y_i) \geq ۱/۲$، به ازای هر فرد $k \in \mathcal{C}_۱$ داریم $V_k(f_k) \geq ۱/۲$. به علاوه، بر اساس تعریف ϵ_i، به ازای هر فرد $k \in \mathcal{C}_۱$ داریم $\epsilon_k \leq ۱/۴$.

همچنین بر اساس تعریف $F_{G_{۱/۲}}$، به ازای هر فردی که در $\mathcal{C}_۱$ نیست، شرایط لم ۱۳.۳ برقرار است. دقت داشته باشید که همه افرادی که در $\mathcal{C}_۱$ نیستند، بعدا در یکی از خوشه‌های $\mathcal{C}_۲$ یا $\mathcal{C}_۳$ قرار می‌گیرند.

لم ۱۳.۳ (لم ارزشی)**.** *به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}_۳$ و هر فرد $j \in \mathcal{C}_۱$ داریم $V_i(f_j) < ۱/۲$.*

به ازای هر راس $y_i \in V_{\mathcal{C}_۱}$، با استفاده از نماد N_{y_i} مجموعه راس‌هایی از $x_j \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{۱/۲}$ را نشان می‌دهیم که $w(x_j, y_i) \geq \epsilon_i$. قرار دهید

$$W_۱ = U_۱ \cup \bigcup_{y_i \in V_{\mathcal{C}_۱}} N_{y_i}.$$

دقت کنید که با توجه به تعریف، به ازای هر راس $x_j \in U_۱$ و $y_i \notin V_{\mathcal{C}_۱}$، هیچ یالی بین x_j و y_i در $G_{۱/۲}$ وجود ندارد و در نتیجه داریم: $w(x_j, y_i) < ۱/۲$. به علاوه، از آنجا که سایر راس‌های داخل $W_۱$ متعلق به $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{۱/۲}$ هستند، به ازای هر راس y_i و $x_j \in (W_۱ \setminus U_۱)$ رابطه $w(x_j, y_i) < ۱/۲$ برقرار است. بنابراین، مشاهده زیر برقرار است.

مشاهده ۱۴.۳. *به ازای هر شیء m_j که $x_j \in W_۱$ و هر فرد i که $y_i \notin V_{\mathcal{C}_۱}$، رابطه $V_i(\{m_j\}) < ۱/۲$ برقرار است.*

حال $\mathcal{X}'$ و $\mathcal{Y}'$ را به این صورت تعریف کنید:

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus (W_1 \cup S_1),$$

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \setminus V_{\mathcal{C}_1}.$$

فرض کنید $G'\langle V(G'), E(G')\rangle$ یک زیرگراف القایی از G و با راس‌های $V(G') = \mathcal{Y}' \cup \mathcal{X}'$ باشد. ما از G' برای ساخت خوشه $\mathcal{C}_2$ استفاده می‌کنیم.

اصلاح خوشه اول

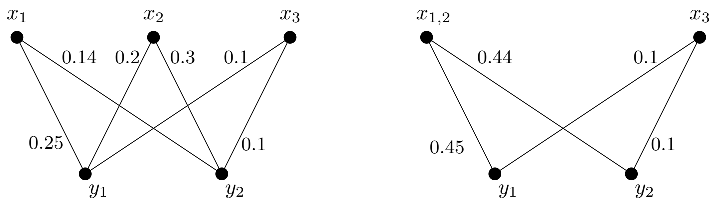
قبل از ساخت خوشه $\mathcal{C}_2$، ما تعدادی از افراد حاضر در $\mathcal{C}_1$ را با اشیایی که مربوط به راس‌های حاضر در W_1 می‌شود، راضی می‌کنیم. زیر گراف $G_1\langle V(G_1), E(G_1)\rangle$ از G با $V(G_1) = W_1 \cup V_{\mathcal{C}_1}$ را در نظر بگیرید. در گراف G_1، یک یال بین $y_i \in V_{\mathcal{C}_1}$ و $x_j \in W_1$ وجود دارد، اگر $V_i(\{m_j\}) \geq \epsilon_i$. دقت کنید که $G_1\langle V(G_1), E(G_1)\rangle$ لزوما یک زیرگراف القایی از G نیست. با استفاده از G_1، یک مجموعه از افراد داخل $\mathcal{C}_1$ را راضی می‌کنیم. برای این کار، در ابتدا نشان می‌دهیم که G_1 نوع خاصی از تطابق که در لم ۱۵.۳ تعریف می‌کنیم را دارا است.

لم ۱۵.۳. *یک تطابق M_1 در G_1 وجود دارد که تمام راس‌های موجود در W_1 را آلوده می‌کند، و به ازای هر $(x_i, y_j) \in M_1$ و هر راس آلوده نشده $y_k \in N(x_i)$، فرد k به فرد j رشک نمی‌ورزد.*

فرض کنید M_1 تطابقی از G_1 باشد که خاصیت‌های گفته شده در لم ۱۵.۳ را دارا است. به ازای هر یال $(y_i, x_j) \in M_1$، ما شیء m_j را به فرد i تخصیص می‌دهیم. به عبارت دیگر، قرار می‌دهیم $g_i = \{m_j\}$. با توجه به تعریف، فرد i در اثر این تخصیص راضی می‌شود. بنابراین، فرد i را از $\mathcal{C}_1$ حذف و به $\mathcal{S}$ اضافه می‌کنیم. دقت کنید که بعد از اصلاح $\mathcal{C}_1$، هیچ‌کدام از اشیایی که راس مربوط به آنها در $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ قرار دارد، نمی‌توانند افراد باقی‌مانده در $\mathcal{C}_1$ را به تنهایی راضی کنند. بنابراین، مشاهده ۱۶.۳ برقرار است.

مشاهده ۱۶.۳. *به ازای هر شیء m_j به گونه‌ای که $x_j \in \mathcal{X}'$ باشد، یا $x_j \in \mathcal{X}'_{1/2}$ و یا به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_1$ داریم* $V_i(\{m_j\}) < \epsilon_i$.

تا این نقطه، همه افراد $\mathcal{S}$ متعلق به $\mathcal{S}_1^r$ هستند. هر کدام از این افراد با دو شیء راضی شده‌اند. در واقع، به ازای هر فرد $j \in \mathcal{S}_1^r$ داریم $|f_j| = |g_j| = 1$. در لم ۱۷.۳، ما یک حد بالا روی $V_i(g_j)$ به ازای هر فرد $j \in \mathcal{S}_1^r$ و هر فرد i در $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ ارائه می‌دهیم.



شکل ۲.۳: ادغام $x_۱$ و $x_۲$

لم ۱۷.۳ (لم ارزشی)**.** *به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}_۳$ و هر فرد $j \in \mathcal{S}_۱^r$ داریم $V_i(g_j) < ۱/۲$.*

لم‌های ۱۷.۳ و ۱۳.۳ نشان می‌دهند که به ازای هر $i \in \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}_۳$ و هر فرد $j \in \mathcal{S}_۱^r$، مقدار $V_i(f_j)$ و $V_i(g_j)$ کمتر از ۱/۲ است. این به همراه این واقعیت که $|f_j| = |g_j| = ۱$ است، منتج به لم ۱۸.۳ می‌شود.

لم ۱۸.۳. *به ازای هر $i \notin \mathcal{C}_۱$ داریم:*

$$\mathsf{MMS}_{V_i}^{|s \setminus \mathcal{S}_۱^r|}(\mathcal{M} \setminus \bigcup_{y_j \in \mathcal{S}_۱^r} f_j \cup g_j) \geq ۱.$$

خوشه دوم

گراف $G'\langle V(G'), E(G')\rangle$ را همان‌گونه که در انتهای بخش ۵.۳ تعریف شد به یاد آورید، و فرض کنید $G'_{۱/۲}\langle V_{۱/۲}(G'), E_{۱/۲}(G')\rangle$ یک ۱/۲ــ فیلتر از G' است. لم ۱۲.۲ نشان می‌دهد که اندازه تطابق بیشینه بین $\mathcal{X}'_{۱/۲}$ و $\mathcal{Y}'_{۱/۲}$ برابر با $|\mathcal{X}'_{۱/۲}|$ است. به علاوه، بر اساس نتیجه ۱۴.۲، به ازای هر تطابق بیشینه M' از $G'_{۱/۲}$ مجموعه $F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})$ خالی است. در آنچه که در ادامه می‌آید، ما اندازه تطابق بیشینه در $G'_{۱/۲}$ را با ادغام کردن راس‌های $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$، آن‌طور که در تعریف ۱۹.۳ آمده است، افزایش می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۳. *برای ادغام دو راس x_i, x_j از $G'(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$، ابتدا یک راس جدید با برچسب $x_{i,j}$ ایجاد می‌کنیم. در ادامه، راس $x_{i,j}$ را به $\mathcal{X}'$ اضافه می‌کنیم و به ازای هر راس $y_k \in \mathcal{Y}'$، یک یال از y_k به $x_{i,j}$ با وزن $w(y_k, x_i) + w(y_k, x_j)$ اضافه می‌کنیم. در نهایت، راس‌های x_i و x_j را از $\mathcal{X}$ حذف می‌کنیم (تصویر ۲.۳ را ببینید).*

در لم‌های ۲۰.۳ و ۲۱.۳، ما حدود بالایی بر روی ارزش جفت اشیای مربوط به یک راس ادغام شده برای سایر افراد تعیین می‌کنیم. ابتدا در لم ۲۰.۳ نشان می‌دهیم که ارزش یک راس ادغام شده برای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۱$ کمتر از $۲\epsilon_i$ است. این واقعیت نتیجه مستقیم مشاهده ۱۶.۳ است. همچنین، در لم ۲۱.۳ نشان می‌دهیم که ارزش اشیای مربوط به یک راس ادغام شده کمتر از ۳/۴ برای هر فرد دیگری است. لم ۲۱.۳

نتیجه ۳/۴ـ کاهش ناپذیری مسئله است. در واقع، نشان می‌دهیم که اگر شرایط لم ۲۱.۳ بر قرار نباشد، آنگاه مسئله می‌تواند کاهش یابد.

لم ۲۰.۳. *به ازای هر فرد $k \in \mathcal{C}_1$ و هر جفت راس $x_i, x_j \in \mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$، داریم $V_k(\{m_i, m_j\}) < 2\epsilon_k$.* *به طور خاص، ارزش کل اشیایی که به یک راس ادغام شده تعلق دارند برای هر فرد k کمتر از $2\epsilon_k$ است.*

لم ۲۱.۳. *به ازای هر جفت راس $x_i, x_j \in \mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ و هر راس $y_k \in \mathcal{Y}$، داریم $V_k(\{m_i, m_j\}) < 3/4$.*

نتیجه ۲۲.۳ (لم ۲۱.۳). *به ازای هر فرد i با $y_i \in \mathcal{Y}$ حداکثر یک شیء m_j که $x_j \in \mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ وجود دارد که $V_i(\{m_j\}) \geq 3/8$.*

راس‌های در $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ را در نظر بگیرید. یک جفت (x_i, x_j) از راس‌های مجزا از $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ را برای $y_k \in \mathcal{Y}'$ قابل قبول می‌نامیم، اگر رابطه $w(y_k, x_i) + w(y_k, x_j) \geq 1/2$ برقرار باشد. با توجه به این تعریف، پروسه‌ای که در الگوریتم ۱ تعریف شده است را در نظر بگیرید.

در هر مرحله از این پروسه، ما یک MCMWM از $G'_{1/2}$ را پیدا می‌کنیم. فرض کنید M' این تطبق باشد. دقت کنید که M' بعد از هر مرحله از این الگوریتم تغییر می‌کند. سپس، یک جفت (x_i, x_j) از راس‌های $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ را که برای حداقل یک فرد از $T = \mathcal{Y}' \setminus N(F_{G'_{1/2}}(M', \mathcal{X}'_{1/2}))$ مناسب است را پیدا می‌کنیم. اگر چنین جفتی وجود نداشت، کار ما تمام است. در غیر این صورت، یکی از این جفت‌ها را به دلخواه انتخاب و با هم ادغام می‌کنیم. فرض کنید جفت انتخاب شده (x_i, x_j) و راس ایجاد شده بعد از ادغام $x_{i,j}$ باشد. بر اساس تعریف T در الگوریتم ۱، ادغام جفت (x_i, x_j) منتج به یک مسیر افزایشی در $G'_{1/2}$ خواهد شد. بنابراین، اندازه تطابق بیشینه در $G'_{1/2}$ به اندازه یک واحد افزایش خواهد یافت. دقت کنید که بعد از تمام شدن الگوریتم ۱ یا $T = \emptyset$ است و یا هیچ‌کدام از جفت راس‌های $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ برای هیچ راسی در T قابل قبول نیست.

لم ۲۳.۳. *بعد از اجرای الگوریتم ۱، داریم* $|F_{G'_{1/2}}(M', \mathcal{X}'_{1/2})| = |N(F_{G'_{1/2}}(M', \mathcal{X}'_{1/2}))|$.

ما خوشه $\mathcal{C}_2$ را معادل مجموعه افرادی تعریف می‌کنیم که راس‌های مربوط به آنها در $N(F_{G'_{1/2}}(M', \mathcal{X}'_{1/2}))$ قرار دارند. به علاوه، مجموعه $V_{\mathcal{C}_2}$ را معادل راس‌های در $N(F_{G'_{1/2}}(M', \mathcal{X}'_{1/2}))$ تعریف می‌کنیم. به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_2$ ما شیء مربوط به $M'(y_i)$ را به فرد i تخصیص می‌دهیم (دو شیء ، در صورتی که راس $M'(y_i)$ ادغام شده باشد).

دقت کنید که ما سایر افراد را داخل خوشه $\mathcal{C}_3$ قرار می‌دهیم. بنابراین، لم ۲۴.۳ به ازای همه افراد داخل خوشه $\mathcal{C}_3$ برقرار است.

لم ۲۴.۳ (لم ارزشی). *به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_3$ و $j \in \mathcal{C}_2$ داریم $V_i(f_j) < 1/2$.*

الگوریتم ۱: ادغام راس‌ها در G'

```
Data: G'(V(G'), E(G'))
while True do
    M' = MCMWM of G'_{1/2}
    Find F_{G'_{1/2}}(M', X'_{1/2})
    T = Y' \ N(F_{G'_{1/2}}(M', X'_{1/2}))
    Q = Set of all desirable pairs in X' \ X'_{1/2} for the agents in T
    if Q = ∅ then
        STOP
    else
        Select an arbitrary pair x_i, x_j from Q
        Merge(x_i, x_j)
```

اصلاح خوشه دوم

مرحله اصلاح خوشه دوم شبیه اصلاح خوشه اول است. در این مرحله، یک مجموعه از افراد داخل خوشه $\mathcal{C}_2$ را با اشیایی که راس آنها در $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ قرار دارد، راضی می‌کنیم. دقت کنید که هیچ‌کدام از راس‌هایی که در $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{1/2}$ قرار دارند ادغام شده نیستند.

مراحل اصلاح خوشه دوم در الگوریتم ۲ نشان داده شده است. فرض کنید که $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ترتیب توپولوژیکی افراد حاضر در $\mathcal{C}_2$، همان‌گونه که در بخش ۴.۳ تعریف شد باشد. در الگوریتم ۲ ما با فرد y_{i_1} و $W_2 = \emptyset$ شروع می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که آیا راس $x_j \in \mathcal{X}' \setminus (\mathcal{X}'_{1/2} \cup W_2)$ وجود دارد، به گونه‌ای که رابطه $V_{i_1}(\{m_j\}) \geq \epsilon_{i_1}$ برقرار باشد؟ اگر این‌گونه بود، x_j را به W_2 اضافه و فرد i_1 را با تخصیص m_j به i_1 راضی می‌کنیم. در ادامه، ما همین پروسه را برای y_{i_2} انجام و این کار را تا y_{i_k} ادامه می‌دهیم. دقت کنید که در انتهای این پروسه، W_2 اشاره به راس‌هایی دارد که اشیای مربوط به آن به افرادی تخصیص داده شده‌اند که در طول بخش اصلاح $\mathcal{C}_2$ راضی شده‌اند. برای راحتی، تعریف کنید $S_2 = F_{G'_{1/2}}(M', \mathcal{X}'_{1/2})$ و $\mathcal{X}''$ و $\mathcal{Y}''$ را نیز به این صورت تعریف کنید:

$$\mathcal{X}'' = \mathcal{X}' \setminus (W_2 \cup S_2) \qquad \mathcal{Y}'' = \mathcal{Y}' \setminus V_{\mathcal{C}_2}.$$

فرض کنید $G''\langle V(G''), E(G'')\rangle$ زیر گراف القایی G' با $V(G'') = \mathcal{X}'' \cup \mathcal{Y}''$ باشد. ما از G'' برای ساخت خوشه $\mathcal{C}_3$ استفاده می‌کنیم.

مشاهده ۲۵.۳. *بعد از اجرای الگوریتم ۲، به ازای هر شیء m_j با $x_j \in \mathcal{X}'' \setminus \mathcal{X}''_{1/2}$ و هر فرد $i \in \mathcal{C}_2$، داریم $V_i(\{m_j\}) < \epsilon_i$.*

الگوریتم ۲: اصلاح خوشه $\mathcal{C}_2$

```
Data: G'(V(G'), E(G'))
Data: i_1, i_2, ..., i_k = Topological ordering of agents in C_2
for l : 1 → k do
    if ∃x_j ∈ X' \ (X'_{1/2} ∪ W_2) s.t. V_{i_1}({m_j}) ≥ ε_{i_l} then
        g_{i_l} = m_j
        W_2 = W_2 ∪ x_j
        C_2 = C_2 \ i_l
        S = S ∪ i_l
```

در دو لم آتی، ما یک حد بالا بر روی ارزش g_i برای هر $i \in \mathcal{S}_2^r$ ارائه می‌دهیم. ابتدا، در لم ۲۶.۳ نشان می‌دهیم که به ازای هر فرد $j \in \mathcal{C}_1$، مقدار $V_j(g_i)$ دارای حد بالای ϵ_j است. به علاوه، با توجه به این واقعیت که افرادی که در خوشه $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ نیستند، متعلق به خوشه $\mathcal{C}_3$ هستند، نشان می‌دهیم که مقدار $V_j(g_i)$ برای هر $j \in \mathcal{C}_3$ از بالا محدود به ۱/۲ است.

لم ۲۶.۳ (لم ارزشی)**.** *فرض کنید $i \in \mathcal{S}_2^r$ یک فرد باشد که در مرحله اصلاح خوشه $\mathcal{C}_2$ راضی شده است و j یک فرد در $\mathcal{C}_1$ باشد. در این صورت، $V_j(g_i) < \epsilon_j$.*

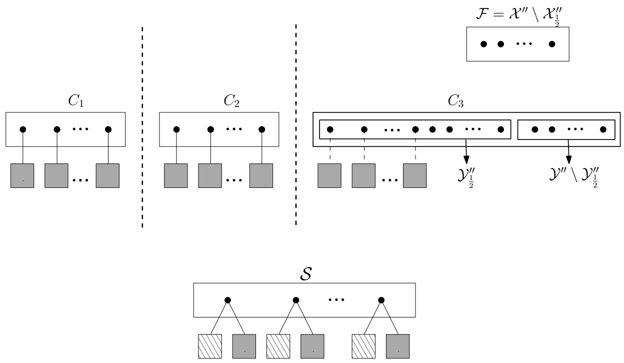
لم ۲۷.۳ (لم ارزشی)**.** *فرض کنید $i \in \mathcal{S}_2^r$ یک فرد باشد که در مرحله اصلاح خوشه $\mathcal{C}_2$ راضی شده است و j یک فرد دلخواه از $\mathcal{C}_3$ باشد. در این صورت، $V_j(g_i) < 1/2$.*

خوشه سوم.

در نهایت، خوشه $\mathcal{C}_3$ به صورت افرادی تعریف می‌شود که اشاره به راس‌های حاضر در $\mathcal{Y}''$ دارند. فرض کنید M'' یک MCMWM از $G''_{1/2}$ باشد. دقت کنید که با توجه به لم ۱۲.۲، همه راس‌های داخل $\mathcal{X}''_{1/2}$ با M'' آلوده شده‌اند. به ازای هر راس y_i که با M'' آلوده شده است، شیء (یا جفت اشیا، اگر $M''(y_i)$ یک راس ادغام شده باشد) مربوط به $M''(y_i)$ را به فرد i اعطا می‌کنیم. بر خلاف خوشه‌های قبلی، این تخصیص موقتی است. یک فرد نیمه‌راضی i در $\mathcal{C}_3$ ممکن است اشیای موجود در f_i خود را به سایر افراد داخل $\mathcal{C}_3$ قرض دهد. بنابراین، افراد حاضر در $\mathcal{C}_3$ یکی از سه نوع زیر هستند:

۱. **افراد نیمه‌راضی**: این مجموعه افراد را با $\mathcal{C}_3^s$ نشان می‌دهیم.

۲. **افراد قرض گیرنده**: افرادی که ممکن است در آینده یک شیء را از یک فرد نیمه‌راضی بگیرند. یک فرد j در $\mathcal{C}_3$ یک قرض گیرنده است، اگر $j \notin \mathcal{C}_3^s$ و $\max_{i \in \mathcal{C}_3^s} V_j(f_i) \geq 1/2$. ما مجموعه افراد قرض گیرنده در $\mathcal{C}_3$ را با $\mathcal{C}_3^b$ نشان می‌دهیم.



شکل ۳.۳: نگاه کلی به وضعیت الگوریتم در پایان فاز اول

۳. **افراد آزاد**: افراد باقی‌مانده در $\mathcal{C}_۳$. ما این افراد را با $\mathcal{C}_۳^f$ نشان می‌دهیم.

در حال حاضر، افراد مربوط به راس‌های آلوده نشده در $\mathcal{Y}''_{۱/۲}$ متعلق به $\mathcal{C}_۳^b$ هستند و افرادی که مربوط به راس‌های در $\mathcal{Y}'' \setminus \mathcal{Y}''_{۱/۲}$ هستند، به $\mathcal{C}_۳^f$ تعلق دارند. همان‌طور که خواهیم دید، در طول فاز دوم، افراد در $\mathcal{C}_۳$ ممکن است نوع خود را عوض کنند. برای مثال، یک فرد متعلق به $\mathcal{C}_۳^s$ ممکن است به $\mathcal{C}_۳^f$ انتقال پیدا کند و یا برعکس. برای راحتی، به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۳^b$ ما مقدار ϵ_i را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$۳/۴ - \max_{j \in \mathcal{C}_۳^s} V_i(f_j). \qquad (۲.۳)$$

دقت کنید که با توجه به تعریف، رابطه $\epsilon_i \leq ۱/۴$ به ازای هر فرد عضو $\mathcal{C}_۳^b$ برقرار است.

در لم ۲۸.۳ ما نشان می‌دهیم که اشیای باقی‌مانده برای افراد داخل خوشه $\mathcal{C}_۳$ ارزش زیادی ندارد. دلیل اصلی برقراری لم ۲۸.۳ این است که هیچ جفتی از راس‌ها برای افراد حاضر در $\mathcal{C}_۳$ در پایان الگوریتم ۱ مناسب نبوده‌اند.

لم ۲۸.۳. *به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۳$ و راس‌های $x_j, x_k \in \mathcal{X}'' \setminus \mathcal{X}''_{۱/۲}$، داریم:* $V_i(\{m_j, m_k\}) < ۱/۲$.

نتیجه ۲۹.۳ (لم ۲۸.۳)**.** *به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۳$، حداکثر یک راس $x_j \in \mathcal{X}'' \setminus \mathcal{X}''_{۱/۲}$ وجود دارد که* $V_i(\{m_j\}) \geq ۱/۴$.

۶.۳ فاز دوم: راضی کردن افراد

قبل از توضیح فاز دوم، اجازه دهید یک مرور کلی بر روی شرایط فعلی الگوریتم داشته باشیم. در شکل ۳.۳ به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{S}$، مجموعه f_i با استفاده از مربع خاکستری و به ازای هر فرد $i \in \mathcal{S}$، مجموعه g_i با استفاده از مربع هاشور خورده مشخص شده است.

	$\forall_i \in \mathcal{C}_1$	$\forall_i \in \mathcal{C}_2$	$\forall_i \in \mathcal{C}_3$
$\forall_j \in \mathcal{C}_1$	–	$(\star)\ V_i(f_j) < 1/2$	$(\star)\ V_i(f_j) < 1/2$
$\forall_j \in \mathcal{C}_2$	$(\ddagger)\ V_i(f_j) < 3/4$	–	$(\dagger)\ V_i(f_j) < 1/2$
$\forall_j \in \mathcal{C}_3^s$	$(\ddagger) V_i(f_j) < 3/4$	$(\ddagger) V_i(f_j) < 3/4$	–

$\star$: لم ۱۳.۳ $\dagger$: لم ۲۴.۳ $\ddagger$: لم ۳۰.۳

جدول ۲.۳: خلاصه نتایج لم های ارزشی در رابطه با f_i

	$\forall_i \in \mathcal{C}_1$	$\forall_i \in \mathcal{C}_2$	$\forall_i \in \mathcal{C}_3$
$\forall_j \in \mathcal{S}_1^r$	–	$(\star)\ V_i(g_j) < 1/2$	$(\star)\ V_i(g_j) < 1/2$
$\forall_j \in \mathcal{S}_2^r$	$V_i(g_j) < \epsilon_i (\dagger)$	–	$(\ddagger)\ V_i(g_j) < 1/2$

$\star$: لم ۱۷.۳ $\dagger$: لم ۲۶.۳ $\ddagger$: لم ۲۷.۳

جدول ۳.۳: خلاصه لم های ارزشی در رابطه با افراد در $\mathcal{S}_i^r$

در حال حاضر، ما می‌دانیم که هر فرد در $\mathcal{S}$ متعلق به یکی از $\mathcal{S}_1^r$ یا $\mathcal{S}_2^r$ است. این افراد در طول مرحله اصلاح $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ راضی شده‌اند. سایر افراد باقی‌مانده در مرحله دوم راضی خواهند شد. برای راحتی، برای $i \leq 2$ ما از $\mathcal{S}_i^s$ برای اشاره به افرادی از $\mathcal{S}_i$ استفاده می‌کنیم که در فاز دوم راضی شده‌اند. به بیان رسمی‌تر، به ازای $i = 1, 2$ داریم $\mathcal{S}_i^s = \mathcal{S}_i \setminus \mathcal{S}_i^r$.

از آنجا که ما خوشه $\mathcal{C}_3$ را اصلاح نکردیم، افراد در خوشه $\mathcal{C}_3$ همگی در طول فاز دوم راضی خواهند شد. همان‌طور که در بخش قبل نیز به آن اشاره شد، تخصیص اشیا به افراد حاضر در $\mathcal{C}_3$ موقتی است. به این معنی که ممکن است در طول مرحله دوم این تخصیص تغییر یابد. بنابراین، در شکل ۳.۳ این تخصیص با خطچین مشخص شده است.

در این بخش، ما مجموعه اشیای آزاد (اشیایی که اشاره به راسهای $\mathcal{X}'' \setminus \mathcal{X}''_{1/2}$ در انتهای فاز اول دارند) را با $\mathcal{F}$ نشان می‌دهیم. با توجه به مشاهده‌های ۱۶.۳ و ۲۵.۳ و نتیجه ۲۹.۳، ما می‌دانیم که اشیای حاضر در $\mathcal{F}$ خاصیت‌های زیر را دارا می‌باشند:

۱. به ازای هر فرد i در $\mathcal{C}_1$ و $m_j \in \mathcal{F}$، رابطه $V_i(\{m_j\}) < \epsilon_i$ برقرار است (مشاهده ۱۶.۳).

۲. به ازای هر فرد i در $\mathcal{C}_2$ و $m_j \in \mathcal{F}$، رابطه $V_i(\{m_j\}) < \epsilon_i$ برقرار است (مشاهده ۲۵.۳).

۳. به ازای هر فرد i در $\mathcal{C}_3$، حداکثر یک شیء $m_j \in \mathcal{F}$ وجود دارد که $V_i(\{m_j\}) \geq 1/4$ (نتیجه ۲۹.۳).

به طور خلاصه، اشیای داخل $\mathcal{F}$ به اندازه کافی کوچک هستند و لذا ما می‌توانیم یک روال مانند پر کردن کیف که قبلا به آن اشاره شد بر روی اشیا و افراد باقی‌مانده اجرا کنیم. به خاطر داشته باشید که روش ما برای خوشه‌بندی و اصلاح خوشه‌ها خاصیت‌های اشاره شده در لم‌های ۱۳.۳، ۱۷.۳، ۲۴.۳، ۲۶.۳ و ۲۷.۳ را دارد. به علاوه، ما نشان می‌دهیم که لم ۳۰.۳ نیز برقرار است.

لم ۳۰.۳ (لم ارزشی)**.** *به ازای هر فرد* $i \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3^s$ *و* $j \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$، *داریم* $V_j(f_i) < ۳/۴$.

یک خلاصه کوتاه از لم‌های ۱۳.۳، ۱۷.۳، ۲۴.۳، ۲۶.۳، ۲۷.۳ و ۳۰.۳ در جدول‌های ۲.۳ و ۳.۳ نشان داده شده است. به علاوه، از آنجا که مجموعه‌های $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3^s$ فاقد چرخه رشک هستند، مشاهده ۱۱.۳ برای این مجموعه‌ها برقرار است.

فاز دوم: پر کردن کیف

ما این بخش را با تعدادی تعریف آغاز می‌کنیم. در ابتدا، ما مجموعه قابل قبول را تعریف می‌کنیم و بر اساس آن، برای یک مجموعه قابل قبول S از اشیا، $\phi(S)$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳۱.۳. *مجموعه* S *از اشیا در* $\mathcal{F}$ *قابل قبول است، اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:*

۱. *یک فرد* $i \in \mathcal{C}_3^f$ *وجود داشته باشد که* $V_i(\{S\}) \geq ۱/۲$.

۲. *یک فرد* $i \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3^s \cup \mathcal{C}_3^b$ *وجود داشته باشد که* $V_i(\{S\}) \geq \epsilon_i$.

تعریف ۳۲.۳. *برای یک مجموعه قابل قبول* S، *ما عبارت* $\Phi(S)$ *را به صورت مجموعه افرادی تعریف می‌کنیم که* S *برای آنها قابل قبول است.*

خاصیت عدم وجود چرخه رشک و ترتیب توپولوژیکی افراد در یک تخصیص فاقد چرخه رشک را به یاد آورید. بر این اساس، ما یک ترتیب کامل $\prec_{pr}$ جهت اولویت دهی به افراد در مرحله پر کردن کیف تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳۳.۳. *ترتیب کامل* $\prec_{pr}$ *بر روی افراد* $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ *با قوانین زیر تعریف می‌شود:*

۱. *به ازای هر* $i_1 \in \mathcal{C}_1, i_2 \in \mathcal{C}_2, i_3 \in \mathcal{C}_3^s, i_4 \in \mathcal{C}_3^b, i_5 \in \mathcal{C}_3^f$ *داریم:*

$$i_5 \prec_{pr} i_1 \prec_{pr} i_2 \prec_{pr} i_3 \prec_{pr} i_4.$$

۲. *به ازای هر $i, j \in \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}_۳^s$، به گونه‌ای که iو j در خوشه‌های یکسان باشند داریم:*

$$i \prec_{pr} j \Leftrightarrow i \prec_o j.$$

۳. *به ازای هر i و j، به گونه‌ای که هر دو یا به $\mathcal{C}_۳^b$ و یا به $\mathcal{C}_۳^f$ تعلق داشته باشند، داریم:*

$$i \prec_{pr} j \Leftrightarrow i < j.$$

به خاطر داشته باشید که $\prec_o$ اشاره به ترتیب توپولوژیکی مجموعه افراد نیمه‌راضی دارد. به بیان ساده، برای یک مجموعه از افراد حاضر در یک خوشه، $\prec_{pr}$ رفتاری مشابه با $\prec_o$ دارد. به علاوه، برای افرادی که در خوشه‌های مختلف هستند، داریم: $\mathcal{C}_۳^f \prec_{pr} \mathcal{C}_۱ \prec_{pr} \mathcal{C}_۲ \prec_{pr} \mathcal{C}_۳^s \prec_{pr} \mathcal{C}_۳^b$. در نهایت، ترتیب افراد داخل $\mathcal{C}_۳^b$ و $\mathcal{C}_۳^f$ بر اساس اندیسشان تعیین می‌شود.

فاز دوم الگوریتم، دارای تعدادی مرحله است و هر مرحله، دارای دو گام است که ما هر کدام از این دو گام را تعریف می‌کنیم. ما این مراحل را تا زمانی که همه افراد راضی شوند ادامه می‌دهیم.

- **گام اول**: در گام اول، ما یک روال مشابه با پر کردن کیف انجام می‌دهیم. به این صورت که یک مجموعه قابل قبول $S \subseteq \mathcal{F}$، به گونه‌ای که اندازه S مینیمال است را پیدا می‌کنیم.

- **گام دوم**: در مرحله دوم، ما یک فرد را جهت تخصیص مجموعه S انتخاب می‌کنیم. بر خلاف روال پر کردن کیف، ما این انتخاب را به صورت دلخواه انجام نمی‌دهیم. به جای این، ما فردی از $\Phi(S)$ را انتخاب می‌کنیم که پایین‌ترین اولویت را با توجه به $\prec_{pr}$ دارد (کوچکترین عضو). فرض کنید i فرد انتخاب شده باشد. ما سه حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم:

  ۱. $i \in \mathcal{C}_۳^f$: موقتا S را به i تخصیص می‌دهیم. به عبارتی قرار می‌دهیم $f_i = S$.

  ۲. $i \in \mathcal{C}_۳^b$: فرض کنید j فردی است که $V_i(f_j) = ۳/۴ - \epsilon_j$. در این صورت f_j را از j پس گرفته و $S \cup f_j$ را به i تخصیص می‌دهیم. به عبارتی قرار میدهیم: $f_i = f_j$ و $f_j = \emptyset$ و $g_i = S$. همچنین i را از $\mathcal{C}_۳$ حذف و او را به S اضافه می‌کنیم.

  ۳. $i \in \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}_۳^s$: فرد i را با S راضی می‌کنیم. یعنی قرار می‌دهیم $g_i = S$ و i را از خوشه مربوطه حذف و آن را به S اضافه می‌کنیم.

با توجه به ساختار $\mathcal{C}_3^s, \mathcal{C}_3^b$ و $\mathcal{C}_3^f$، روال بالا ممکن است باعث شود که افراد حاضر در $\mathcal{C}_3$ بین $\mathcal{C}_3^s, \mathcal{C}_3^b$ و $\mathcal{C}_3^f$ جابه‌جا شوند. برای مثال، اگر حالت اول رخ دهد، در این صورت فرد i از $\mathcal{C}_3^f$ به $\mathcal{C}_3^s$ منتقل می‌شود. به علاوه، همه افرادی که در $\mathcal{C}_3^f$ هستند و S برای آنها قابل قبول است به $\mathcal{C}_3^b$ می‌روند. برای حالت دوم، فرد j بر اساس مقدار $V_j(f_k)$ برای هر $k \in \mathcal{C}_3^s$، به یکی از $\mathcal{C}_3^f$ یا $\mathcal{C}_3^b$ می‌رود؛ در واقع، اگر یک فرد $k \in \mathcal{C}_3^s$ وجود داشته باشد که $V_j(f_k) \geq ۱/۲$باشد، در این صورت j به $\mathcal{C}_3^b$ میرود. در غیر این صورت، j به $\mathcal{C}_3^f$ منتقل می‌شود. برای هر دو حالت دوم و سوم، تعدادی از افراد $\mathcal{C}_3^b$ ممکن است به $\mathcal{C}_3^f$ بروند۲.

فاز دوم الگوریتم، زمانی تمام می‌شود که تمام افراد راضی شوند.

در هر مرحله از فاز دوم، یا یک فرد راضی می‌شود، و یا این که یک فرد حاضر در $\mathcal{C}_3^f$ نیمه‌راضی می‌شود. در لم ۳.۳۴ ما نشان می‌دهیم که اگر یک فرد $i \in \mathcal{C}_3^f$ در مرحله‌ای از فاز دوم انتخاب شود، در این صورت $V_j(f_i)$ برای هر $j \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1^s \cup \mathcal{C}_1^b$ از بالا محدود به $۲\epsilon_j$ است. به عنوان یک نتیجه از لم ۳.۳۴ در لم ۳.۳۵ نشان می‌دهیم که مجموعه $\mathcal{C}_1$،$\mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3$، در طول فاز دوم فاقد چرخه رشک باقی می‌مانند. برای راحتی، ما از عبارت $\mathbb{R}_z$ برای اشاره به مرحله z ام از فاز دوم اشاره می‌کنیم.

لم ۳.۳۴. *فرض کنید $\mathbb{R}_z$ مرحله‌ای از فاز دوم باشد که در آن $i \in \mathcal{C}_3^f$ انتخاب شده است. در این صورت به ازای هر فرد $j \in \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1^s \cup \mathcal{C}_1^b$ داریم* $V_j(f_i) < ۲\epsilon_j < ۳/۴$.

لم ۳.۳۵. *در طول فاز دوم الگوریتم، خوشه‌های $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3^s$ خاصیت عدم وجود چرخه رشک را حفظ می‌کنند.*

در انتها، در مورد مرحله‌ای که فرد i راضی می‌شود، لم های ۳.۳۶ و ۳.۳۷ یک حد بالا بر روی مقدار g_i برای سایر افراد می‌دهد.

لم ۳.۳۶ (لم ارزشی)**.** *فرض کنید $i \in S$ فردی باشد که در فاز دوم راضی شده است. در این صورت، به ازای هر فرد دیگر $j \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ داریم:*

۱. *اگر $i \prec_{pr} j$، آنگاه* $V_j(g_i) < \epsilon_j$.

۲. *اگر $j \prec_{pr} i$، آنگاه* $V_j(g_i) < ۲\epsilon_j$.

لم ۳.۳۷ (لم ارزشی)**.** *فرض کنید i یک فرد متعلق به $S_2^s \cup S_1^s$ باشد. در این صورت، به ازای هر فرد $j \in \mathcal{C}_3$ داریم:* $V_j(g_i) < ۱/۲$.

نتایج مربوط به لم‌های ۳.۳۶ و ۳.۳۷ در جدول ۳.۴ خلاصه شده‌اند.

	$\forall_i \in \mathcal{C}_1$	$\forall_i \in \mathcal{C}_2$	$\forall_i \in \mathcal{C}_3$
$\forall_j \in \mathcal{S}_1^s$	–	$V_i(g_j) < 2\epsilon_i(\star)$	$V_i(g_j) < 1/2(\dagger)$
$\forall_j \in \mathcal{S}_2^s$	$V_i(g_j) < \epsilon_i(\star)$	–	$V_i(g_j) < 1/2(\dagger)$
$\forall_j \in \mathcal{S}_3$	$V_i(g_j) < \epsilon_i(\star)$	$V_i(g_j) < \epsilon_i(\star)$	–

$\star$: لم ۳.۳۶ $\dagger$: لم ۳.۳۷

جدول ۳.۴: خلاصه لم‌های ارزشی مربوط به g_i

۳.۷ روش ما یک تخصیص MMS $- 3/4$ پیدا می‌کند

در ادامه این بخش، ما اثبات می‌کنیم که الگوریتم ما یک تخصیص MMS $- 3/4$ پیدا می‌کند. فرض کنید که فاز دوم به پایان رسیده است، به این معنی که $\mathcal{F}$ دیگر برای هیچ فرد باقی‌مانده‌ای قابل قبول نیست. یک فرد راضی نشده را در نظر بگیرید. این فرد به یکی از خوشه‌های $\mathcal{C}_1$ یا $\mathcal{C}_2$ یا $\mathcal{C}_3$ تعلق دارد. در لم‌های ۳.۳۸، ۳.۳۹ و ۳.۴۰ ما به طور جداگانه هر کدام از این حالت‌ها را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که وقوع هیچ‌کدام امکان‌پذیر نیست. نتیجه آن که همه افراد در پایان الگوریتم راضی شده‌اند. اثبات کامل این لم‌ها در پیوست رساله موجود است. در این‌جا، به شرح مختصری از روش اثبات اکتفا می‌کنیم.

این کار را با خوشه $\mathcal{C}_3$ شروع می‌کنیم.

لم ۳.۳۸. *در پایان الگوریتم، در خوشه سوم هیچ فردی وجود ندارد.*

برای اثبات لم ۳.۳۸ ما دو حالت را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم. اگر $\mathcal{C}_3 \neq \emptyset$ باشد، یا یک فرد در $\mathcal{C}_3^s \cup \mathcal{C}_3^b$ حضور دارد، و یا همه افراد باقی‌مانده در $\mathcal{C}_3^f$ هستند. اگر حالت اول رخ داده باشد، ما نشان می‌دهیم که $\mathcal{C}_3^s$ خالی نیست و بنابراین فرض می‌کنیم i برنده $\mathcal{C}_3^s$ است. ما حد بالای ارزش تمام اشیای دیگر که به سایر افراد تخصیص داده شده است را برای فرد i محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که ارزش اشیای باقی‌مانده $\mathcal{F}$ برای او حداقل ϵ_i است. این نشان می‌دهد که مجموعه $\mathcal{F}$ برای فرد i قابل قبول است که این با فرض اتمام الگوریتم در تناقض است. در حالتی هم که تمام افراد داخل $\mathcal{C}_3^f$ هستند، فرض کنید i یک فرد دلخواه از $\mathcal{C}_3^f$ باشد. با یک گزاره مشابه نشان می‌دهیم که ارزش اشیای باقی‌مانده برای فرد i حداقل $3/4$ است، که نتیجه می‌دهد که $\mathcal{F}$ برای i قابل قبول است. این دوباره با فرض اتمام الگوریتم در تناقض است.

لم ۳.۳۹. *در پایان الگوریتم در خوشه اول هیچ فردی وجود ندارد.*

اثبات لم ۳.۳۹ با استفاده از یک استدلال رنگ‌آمیزی است. فرض کنید i برنده افراد حاضر در $\mathcal{C}_1$ باشد. ما همه اشیا را به یکی از دو رنگ آبی و سفید رنگ می‌کنیم. به بیان ساده، اشیای آبی آنهایی هستند که ممکن

است برای فرد i ارزش زیادی داشته باشند، در حالی که اشیای سفید همگی برای فرد i ارزش کمی دارند. سپس، با استفاده از روش دوگونه شماری نشان می‌دهیم که ارزش اشیای باقی‌مانده در $\mathcal{F}$ برای فرد i حداقل به میزان ϵ_i است و بنابراین، $\mathcal{F}$ برای فرد i قابل قبول است. این، با فرض $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$ در تناقض است و نشان می‌دهد که در پایان الگوریتم، همه افراد $\mathcal{C}_1$ راضی شده‌اند.

لم ۴۰.۳. *در پایان الگوریتم در خوشه دوم هیچ فردی وجود ندارد.*

اثبات لم ۴۰.۳ مشابه هر دو اثبات قبلی است. فرض کنید فرد i برنده خوشه $\mathcal{C}_2$ باشد. ما دو حالت مختلف را در نظر می‌گیریم: $\epsilon_i \geq 1/8$ و $\epsilon_i < 1/8$. در حالتی که $\epsilon_i \geq 1/8$ باشد، ما از اثباتی مشابه لم ۳۸.۳ استفاده و نشان می‌دهیم که $\mathcal{F}$ برای i قابل قبول است. اگر $\epsilon_i < 1/8$ باشد نیز از روش رنگ‌آمیزی استفاده می‌کنیم، اما این بار اشیا را به چهار رنگ مختلف رنگ‌آمیزی می‌کنیم. سپس، با استفاده از روش دوگونه شماری، نشان می‌دهیم که $\mathcal{F}$ برای فرد i قابل قبول است که این با فرض ما در تناقض است.

قضیه ۴۱.۳. *در انتهای الگوریتم، تمام افراد راضی شده‌اند.*

اثبات. با توجه به لم های ۳۸.۳، ۳۹.۳ و ۴۰.۳، در پایان الگوریتم همه افراد راضی شده‌اند که این یعنی ارزش اشیای اعطا شده به هر فرد حداقل به میزان ۳/۴ برای او بوده است. ■

۸.۳ نتیجه‌گیری

در این فصل، ما یک روش برای تخصیص اشیا به افراد ارائه کردیم که برای هر فرد نسبت ۳/۴ از سهم بیش‌کمینه او را تضمین می‌کند. با این وجود، حد ارائه شده هنوز محکم نیست و راه برای ارائه تضمین‌های بهتر کماکان باز است. همان‌طور که گفته شد، بهترین حد بالایی که برای مسئله در حالت جمعی ارائه شده است، این است که امکان تضمین سهم بیش‌کمینه لزوما وجود ندارد. با این حال، حدس ما بر این است که ۳/۴ بهترین تقریب ممکن باشد.

نکته مهم دیگر در رابطه با الگوریتم ما، این است که این روش لزوما صادفانه نیست. به عبارتی، افراد می‌توانند با اعلام نادرست توابع مطلوبیت خود، میزان سود دریافتی خود را افزایش دهند. بنابراین، سوال دیگری که باید به آن پاسخ داد این است که بهترین سازوکار منصفانه برای تخصیص اشیا به افراد، قادر به تضمین چه نسبتی از سهم بیش‌کمینه افراد است؟ این بحث به طور مقدماتی توسط آماناتیدیس و همکاران مطرح شده است [۵] ، اما هنوز هیچ تقریب اثبات شده‌ای برای توابع جمعی ارائه نشده است.

فصل ۴

توابع غیرجمعی

۱.۴ مقدمه

در این فصل به سراغ توابع مطلوبیت کلی‌تر می‌رویم و تضمین سهم بیش‌کمینه را در حالتی در نظر می‌گیریم که توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای، XOS و یا زیرجمعی باشند. با وجود این که مسئله تقسیم منصفانه در ابتدا برای توابع جمعی مطرح شده است، اما گسترش این مسئله برای سایر کلاس‌های توابع مطلوبیت نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. دلیل این امر، این است که در بسیاری از شرایط واقعی، رفتار توابع مطلوبیت به صورت جمعی نیست. برای مثال، طبیعی است که انتظار داشته باشیم که یک فرد، اگر دو کالا با ارزش ۴۰۰ دریافت کند، راضی‌تر از زمانی باشد که ۸۰۰ کالا با ارزش یک دریافت کند. چنین محدودیتی را با استفاده از توابع جمعی نمی‌توان برآورده کرد. اما توابع زیرپیمانه توانایی نشان دادن چنین محدودیتی را دارا می‌باشند. چنین گسترشی برای بسیاری از مسائل، مانند مسئله تقسیم بیش‌کمینه بابانوئل [۱] ، مسئله بیشینه‌سازی سود اجتماعی و مسئله منشی [۲] بررسی شده است [۱۱، ۳۷، ۳۸، ۵۰].

همان‌طور که در فصل دوم نیز به آن اشاره شد، معمول‌ترین کلاس‌ها از توابع مطلوبیت که تاکنون در مورد آنها مطالعات زیادی صورت گرفته است، کلاس زیرپیمانه‌ای، XOS و زیرجمعی هستند. ما مسئله تقسیم منصفانه را در حالتی که توابع مطلوبیت زیرمجموعه هر کدام از این کلاس‌ها باشد بررسی می‌کنیم. بر خلاف حالت جمعی که پیدا کردن تخصیصی که تقریبی از MMS را تضمین کند (برای مثال تقریب ۱/۲) بدیهی است، مسئله در این حالت‌ها بسیار چالش برانگیزتر است. برای مثال، الگوریتم پر کردن کیف که قبلا به آن اشاره شد، هیچ تقریب ثابتی برای هیچ‌کدام از این حالت‌ها تضمین نخواهد کرد. افزون بر این، لازم به ذکر است که پیدا کردن مقدار دقیق MMS_i یک مسئله ان‌پی‌ـسخت است. به علاوه، تا جایی که ما مطلع هستیم، هیچ روش $PTAS$ای برای محاسبه مقدار MMS در حالت‌های غیرجمعی وجود ندارد. بنابراین، هر الگوریتم تخصیص

[1] Santa claus maximin division
[2] Secretary problem

کارهای قبلی	زیرپیمانه‌ای	XOS	زیرجمعی
اثبات وجودی	۱/۱۰ − MMS [۱۰]	–	–
الگوریتم چندجمله‌ای	۱/۳۱ − MMS [۱۰]	–	–
حد بالا	–	–	–
نتایج ما	**زیرپیمانه‌ای**	**XOS**	**زیرجمعی**
اثبات وجودی	۱/۳ − MMS قضیه ۳.۴	۱/۵ − MMS قضیه ۱۴.۴	۱/۱۰ $\lceil \log m \rceil$ − MMS
الگوریتم چندجمله‌ای	۱/۳ − MMS قضیه ۹.۴	۱/۸ − MMS قضیه ۱۶.۴	–
حد بالا	۳/۴ − MMS قضیه ۵.۴	۱/۲ − MMS قضیه ۵.۴	۱/۲ − MMS قضیه ۵.۴

جدول ۱.۴: خلاصه نتایج در رابطه با سهم بیش‌کمینه در توابع مطلوبیت کلی

α − MMS در حالت غیرجمعی باید بر این سختی که مقدار MMS_i مشخص نیست نیز فائق آید. بنابراین، در این حالت‌ها میان اثبات وجودی و الگوریتم‌ها مقداری تفاوت وجود دارد. در رابطه با توابع غیرجمعی، ما یک تقریب ثابت برای حالتی که توابع مطلوبیت به صورت زیرپیمانه‌ای و یا XOS باشند و یک تقریب لگاریتمی برای حالتی که توابع مطلوبیت زیرجمعی باشند به دست آوردیم. خلاصه‌ای از نتایج ما در این رابطه را می‌توانید درجدول ۱.۴ مشاهده کنید.

به دلیل کمبود فضا، در این فصل تنها به ارائه اثبات وجودی و الگوریتم برای توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای و XOS بسنده می‌کنیم. در مقاله مربوط به این فصل [۴۵] ، ما نشان می‌دهیم که تقریب ارائه شده برای حالت توابع مطلوبیت XOS، یک تضمین لگاریتمی برای توابع زیرجمعی نیز ارائه می‌دهد.

۲.۴ تابع سقفی و سود محدود

در بطن اثبات وجود تخصیص با تضمین مناسب برای هر دو حالت توابع زیرپیمانه‌ای و XOS، ما از یک تابع کمکی به نام تابع سقفی استفاده می‌کنیم. به بیان ساده، به ازای هر تابع داده شده $f(\cdot)$، تابع سقفی f در واقع معادل همان تابع است، با این تفاوت که یک سقف مشخص برای مقدار f قائل می‌شود. اجازه دهید ابتدا به صورت رسمی این تابع را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۴. *به ازای تابع مجموعه‌ای داده شده $f(\cdot)$ ما تابع $f^x(\cdot)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$f^x(S) = \begin{cases} f(S) & \textit{if} \quad f(S) \leq x \\ x & \textit{if} \quad f(S) > x. \end{cases}$$

یک خاصیت توابع سقفی این است که خاصیت زیرپیمانه‌ای، زیرجمعی و زیرجمعی کسری را نسبت به تابع اصلی حفظ می‌کنند. در این بخش، بر حسب نیاز این خاصیت را برای توابع زیرپیمانه‌ای و XOS اثبات می‌کنیم.

لم ۲.۴. *به ازای هر عدد حقیقی $x \geq 0$ داریم:*

۱. *اگر $f(\cdot)$ زیرپیمانه‌ای باشد، $f^x(\cdot)$ نیز زیرپیمانه‌ای است.*

۲. *اگر $f(\cdot)$ زیرجمعی کسری باشد، $f^x(\cdot)$ نیز زیرجمعی کسری است.*

قبل اثبات این لم، ابتدا دو مشاهده ساده را بررسی می‌کنیم.

مشاهده ۳.۴. *به ازای هر مجموعه S داده شده، داریم $f^x(S) \leq x$.*

مشاهده ۴.۴. *به ازای هر مجموعه S داده شده، $f^x(S) \leq f(S)$.*

حال، بر اساس این دو مشاهده و همچنین تعریف توابع زیرپیمانه‌ای و XOS، به اثبات لم ۲.۴ می‌پردازیم.

اثبات.[لم ۲.۴]

ادعای اول: با توجه به تعریف تابع زیرپیمانه‌ای، به ازای دو مجموعه داده شده A و B داریم:

$$f(A \cup B) \leq f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

ما نشان می‌دهیم که $f^x(\cdot)$ نیز در سه حالتی که در ادامه می‌آید، زیرپیمانه‌ای است:

حالت اول: فرض کنید مقدار $f(A)$ و $f(B)$ هر دو حداقل برابر با x باشد. بر اساس مشاهده ۳.۴، مقدار $f^x(A \cup B)$ و $f^x(A \cap B)$ دارای حد بالای x هستند. بنابراین، $f^x(A \cup B) + f^x(A \cap B) \leq 2x$، که این یعنی:

$$f^x(A \cup B) + f^x(A \cap B) \leq f^x(A) + f^x(B).$$

حالت دوم: یکی از $f(A)$ و $f(B)$ دارای مقدار حداقل x است. در این حالت داریم $f(A \cup B) \geq x$، و همچنین $f(A \cap B)$ بیشتر از $\{f(A), f(B)\}$ نیست. در نتیجه، $f^x(A \cup B)$ و یکی از $f^x(A)$ یا $f^x(B)$ برابر با x هستند که این یعنی:

$$f^x(A \cup B) + f^x(A \cap B) \leq f^x(A) + f^x(B).$$

حالت سوم: در این حالت، هر دو $f(A)$ و $f(B)$ کمتر از x هستند، و $f(A \cap B)$ نیز کمتر از x است. چون $f^x(A) = f(A)$ و $f^x(B) = f(B)$ و $f^x(A \cap B) = f(A \cap B)$، بنا بر مشاهده ۴.۴ رابطه $f^x(A \cup B) \leq f(A \cup B)$ برقرار است. چون $f(\cdot)$ زیرپیمانه‌ای است، داریم:

$$f^x(A \cup B) \leq f^x(A) + f^x(B) - f^x(A \cap B).$$

ادعای دوم: از آنجا که $f(\cdot)$ یک تابع XOS است، بر اساس تعریف، یک مجموعه متناهی از توابع جمعی $\{f_۱, f_۲, \dots, f_\alpha\}$ وجود دارد که به ازای هر مجموعه $S \subseteq \text{ground}(f)$ داریم:

$$f(S) = \max_{i=۱}^{\alpha} f_i(S).$$

با توجه به این امر، به ازای عدد حقیقی داده شده x، یک تابع XOS با نام $g(\cdot)$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم $g(\cdot)$ معادل با $f^x(\cdot)$ است.

ما تابع $g(\cdot)$ را با دامنه یکسان با $f(\cdot)$ تعریف می‌کنیم. به علاوه، بر اساس $\{f_۱, f_۲, \dots, f_\alpha\}$، ما یک مجموعه متناهی $\{g_۱, g_۲, \dots, g_\beta\}$ از توابع جمعی تعریف می‌کنیم که g را مشخص می‌کند. به بیان دقیق‌تر، به ازای هر مجموعه S در دامنه $f(\cdot)$ ما یک تابع جمعی g_γ در $g(\cdot)$ به این صورت تعریف می‌کنیم: بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید f_δ تابعی باشد که مقدار $f(S)$ را بیشینه می‌کند. برای هر $b_i \notin S$، قرار دهید $g_\gamma(b_i) = ۰$. به علاوه، برای هر $b_i \in S$، اگر $f(S) \leq x$، قرار دهید $g_\gamma(b_i) = f_\delta(b_i)$، و در غیر این‌صورت قرار دهید $g_\gamma(b_i) = \frac{x}{f(S)} f_\delta(b_i)$.

ما ادعا می‌کنیم که $g(\cdot)$ معادل $f^x(\cdot)$ است، که این به این معنا است که $f^x(\cdot)$ نیز یک تابع XOS است. $g(\cdot)$ و $f^x(\cdot)$ دو تابع با دامنه یکسان هستند. ابتدا، نشان می‌دهیم که به ازای هر مجموعه داده شده S، رابطه $g(S) \leq f(S)$ برقرار است. بر اساس ساختار $g(\cdot)$، به ازای هر تابع جمعی g_γ در $g(\cdot)$ حداقل یک تابع جمعی در $f(\cdot)$ مانند f_δ وجود دارد، که به ازای هر $b_i \in \mathcal{M}$ داریم $g_\gamma(b_i) \leq f_\delta(b_i)$. بنابراین، به ازای هر مجموعه S داریم:

$$g(S) \leq f(S). \tag{۱.۴}$$

حال، دوباره بر اساس ساختار $g(\cdot)$، به ازای هر مجموعه داده شده S، یک تابع g_γ وجود دارد، به گونه‌ای که اگر $f(S) \leq x$ باشد، داریم $g_\gamma(S) = f(S)$، و اگر $f(S) > x$ باشد، داریم $g_\gamma(S) = x$. بنابراین،

$$g(S) \geq f^x(S). \tag{۲.۴}$$

همچنین، به ازای هر مجموعه داده شده S که $f(S) \leq x$، بنا بر تعریف $f^x(\cdot)$ داریم $f(S) = f^x(S)$، و بر اساس نامساوی‌های (۱.۴) و (۲.۴) نتیجه می‌گیریم که $f^x(S) = g(S)$. به علاوه، بر اساس ساختار $g(\cdot)$، داریم $g(S) \leq x$. بنابراین، به ازای هر مجموعه داده شده S که $f(S) > x$، بر اساس تعریف $f^x(\cdot)$ و نامساوی (۲.۴) داریم $f^x(S) = g(S) = x$. با در نظر گرفتن این دو حالت نتیجه می‌گیریم که $f^x(\cdot)$ و $g(\cdot)$ معادل یکدیگر هستند، که این یعنی $f^x(\cdot)$ یک تابع XOS است. ■

در دو بخش آینده، از این توابع سقفی جهت اثبات وجود تخصیص با تقریب‌های ثابت برای توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای و XOS استفاده خواهیم کرد.

۳.۴ توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای

در این بخش، ما مسئله تضمین سهم بیش‌کمینه را زمانی که توابع مطلوبیت افراد زیرپیمانه‌ای است مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا، کار خود را با اثبات حد بالا آغاز می‌کنیم. در بخش ۱.۳.۴ نشان می‌دهیم که بهترین تضمین ممکن در این حالت دارای حد بالای MMS − ۳/۴ است. در ادامه، وجود یک تخصیص MMS − ۱/۳ را برای این حالت اثبات می‌کنیم و برای آن یک الگوریتم چندجمله‌ای نیز ارائه خواهیم کرد. فرض ما در این الگوریتم این است که به پیشگوی پرسمان دسترسی داریم. به عبارت دیگر، به ازای هر مجموعه S از اشیا و هر فرد i، میزان $V_i(S)$ قابل محاسبه در زمان $O(۱)$ است.

۱.۳.۴ حد بالا

این بخش را با ارائه یک حد بالا شروع می‌کنیم. در قضیه ۵.۴ نشان می‌دهیم که برای بعضی از نمونه‌ها با توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای، هیچ تخصیصی بهتر از MMS − ۳/۴ نمی‌توان یافت. مثال نقضی که با استفاده از آن این امر را ثابت می‌کنیم، برای هر تعداد فرد قابل گسترش است.

قضیه ۵.۴. *به ازای هر $n \geq ۲$، یک نمونه از مسئله تخصیص منصفانه با توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای وجود دارد که هیچ تخصیصی بهتر از MMS − ۳/۴ برای آن ممکن نیست.*

اثبات. ما یک نمونه از مسئله را تولید می‌کنیم که هیچ تخصیص MMS − $(۳/۴ + \epsilon)$ ندارد. برای این کار، فرض کنید n تعداد افراد باشد و $\mathcal{M} = \{m_۱, m_۲, \ldots, m_m\}$ مجموعه اشیا باشد و داشته باشیم $m = ۲n$.

به علاوه، فرض کنید $f : ۲^{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}$ تابعی با شرایط زیر باشد:

$$f(S) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad |S| = \emptyset \\ ۱ & \text{if} \quad |S| = ۱ \\ ۲ & \text{if} \quad |S| > ۲ \\ ۲ & \text{if} \quad S = \{m_{۲i}, m_{۲i+۱}\} \\ ۳/۲ & \text{if} \quad |S| = ۲ \text{ و } S \neq \{m_{۲i}, m_{۲i+۱}\}. \end{cases}$$

توجه کنید که داریم $\mathsf{MMS}_f^n = ۲$. به علاوه، در آنچه که در ادامه می‌آید، نشان می‌دهیم که تابع f زیرپیمانه‌ای است. برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید که مجموعه‌های S و S' وجود دارند، به طوری که $S \subseteq S'$ و برای یک شئی m_i داریم:

$$f(S' \cup \{m_i\}) - f(S') > f(S \cup \{m_i\}) - f(S). \qquad (۳.۴)$$

چون f یکنوا است و $S \neq S'$، رابطه $f(S' \cup \{m_i\}) - f(S') > ۰$ برقرار است و بنابراین، S' نمی‌تواند بیش از دو شئی داشته باشد. لذا، S' حداکثر شامل دو شیء است و در نتیجه، S یا تهی است یا شامل یک شیء است. اگر S خالی باشد، آنگاه اضافه کردن همه اشیا به S بیشترین مقدار افزایش را برای S دارد و بنابراین، نامساوی (۳.۴) برقرار نیست. بنابراین، S شامل یک شیء است و S' دقیقا دو شیء دارد. لذا، $f(S) = ۱$ و $f(S') \geq ۳/۲$. بنابراین، روابط $f(S \cup \{m_i\}) - f(S) \geq ۱/۲$ و $f(S' \cup \{m_i\}) - f(S') \leq ۱/۲$ برقرار هستند که با نامساوی (۳.۴) در تناقض است.

حال برای افراد ۱ تا $n - ۱$ قرار می‌دهیم $V_i = f$ و برای فرد n قرار می‌دهیم $V_n = f(\mathsf{inc}(S))$، که در آن m_i داخل $\mathsf{inc}(S)$ قرار دارد، اگر و تنها اگر یا $i > ۱$ و $m_{i-۱} \in S$ باشد و یا $i = ۱$ و $m_m \in S$. ایده اصلی اثبات این است که به ازای هر تخصیص، حداقل یک نفر وجود دارد که ارزش سهم اول برایش حداکثر برابر با ۳/۲ است. در حالتی که یک فرد کمتر از ۲ شیء دریافت کند، مطلوبیت او برای شیء تخصیص یافته به او حداکثر ۱ است. همچنین، اگر یک فرد بیش از دو شیء دریافت کند، یک نفر دیگر مجبور است کمتر از ۲ شیء دریافت کند و اثبات کامل است. بنابراین، تنها حالتی که باید بررسی شود زمانی است که همه دقیقا دو شیء دریافت کنند. ما نشان می‌دهیم که در این حالت، $\min V_i(A_i) = ۳/۲$. اگر هر کدام از افراد $۱, ۲, \ldots, n - ۱$ دو شیء به دست بیاورند که ارزش آنها برای او دقیقا برابر با ۲ باشد، در این صورت با توجه به ساختار f، ارزش اشیای باقی‌مانده نیز دقیقا برابر با ۲ است. بنابراین، ارزش سهم فرد n برای او برابر با ۳/۲ است. ■

۲.۳.۴ اثبات وجودی

در این بخش، ما یک اثبات وجودی برای تخصیص MMS $-$ ۱/۳ ارائه می‌دهیم. ایده اصلی در اثبات وجود تخصیص MMS $-$ ۱/۳ ساده است. فرض کنید نمونه ما ۱/۳ـکاهش‌ناپذیر است و فرض کنید $\mathcal{A} = \langle A_1, A_2, \dots, A_n\rangle$ یک تخصیص اشیا به افراد باشد که عبارت زیر را بیشینه می‌کند:

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} V_i^{2/3}(A_i) \tag{۴.۴}$$

عبارت (۴.۴) را با $\mathsf{ex}^{(2/3)}(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم و اثبات می‌کنیم که در این تخصیص، به ازای هر $i \in \mathcal{N}$ داریم $V_i(A_i) \geq 1/3$.

المان‌های اصلی این اثبات، لم‌های ۳.۳، ۶.۴ و ۷.۴ هستند.

لم ۶.۴. *فرض کنید $S_1, S_2, \dots, S_k$ تعداد k مجموعه مجزا باشند و $f_1, f_2, \dots, f_k$ نیز k تابع زیرپیمانه‌ای باشند. همچنین فرض کنید عضو تصادفی e را از $\bigcup S_i$ به صورت تصادفی حذف کرده‌ایم تا به مجموعه‌های $S_1^* = S_1 \setminus \{e\}, S_2^* = S_2 \setminus \{e\}, \dots, S_k^* = S_k \setminus \{e\}$ برسیم. در این صورت خواهیم داشت:*

$$\mathbb{E}[\sum f_i(S_i^*)] \geq \sum f_i(S_i)\frac{|\bigcup S_i| - 1}{|\bigcup S_i|}.$$

اثبات. از آنجا که $f(\cdot)$ زیرپیمانه‌ای است، بر اساس تعریف این نوع توابع، به ازای هر دو مجموعه داده شده X و Y از دامنه $f(\cdot)$ به طوری که $X \subseteq Y$، و همچنین هر $x \in \mathcal{M} \setminus Y$ داریم:

$$f(X \cup \{x\}) - f(X) \geq f(Y \cup \{x\}) - f(Y). \tag{۵.۴}$$

فرض کنید به ازای هر $1 \leq j \leq \alpha$ داریم $S_i = \{e_1, e_2, \dots, e_\alpha\}$، $T_0 = \emptyset$، و $T_j = \{e_1, e_2, \dots, e_j\}$. از آنجا که به ازای هر $0 \leq j \leq \alpha$ داریم $T_j \subseteq S_i$، و همچنین f_i یک تابع زیرپیمانه‌ای است، بر اساس نامساوی (۵.۴) داریم:

$$\sum_{1\leq j\leq\alpha} f_i(S_i \setminus T_{j-1}) - f_i(S_i \setminus T_j) \geq \sum_{1\leq j\leq\alpha} f_i(S_i) - f_i(S_i - e_j) \tag{۶.۴}$$

از آنجا که

$$f_i(S_i) = \sum_{1\leq j\leq\alpha} f_i(S_i \setminus T_{j-1}) - f_i(S_i \setminus T_j),$$

می‌توانیم، نامساوی (۶.۴) را به ازای $۱ \leq i \leq k$ به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f_i(S_i) \geq \sum_{e \in S_i} f_i(S_i) - f_i(S_i - e). \tag{۷.۴}$$

همچنین به ازای هر $۱ \leq i \leq k$، می‌توانیم نامساوی (۷.۴) را به این صورت بازنویسی کنیم:

$$\sum_{e \in s_i} f_i(S_i - e) \geq (|S_i| - ۱) f_i(S_i). \tag{۸.۴}$$

با اضافه کردن $(|\bigcup S_i| - |S_i|) f_i(S_i)$ به هر دو سمت نامساوی (۸.۴) داریم:

$$\begin{aligned} (|\bigcup S_i| - |S_i|) f_i(S_i) + \sum_{e \in S_i} f_i(S_i - e) &= \sum_{e \in \bigcup S_i} f_i(S_i \setminus \{e\}) \\ &\geq (|\bigcup S_i| - ۱) f_i(S_i) \end{aligned} \tag{۹.۴}$$

از آنجا که نامساوی (۹.۴) به ازای هر $۱ \leq i \leq k$ برقرار است، می‌توانیم هر دو سمت نامساوی (۹.۴) را به صورت زیر جمع ببندیم:

$$\sum_{۱ \leq i \leq k} \sum_{e \in \bigcup S_i} f_i(S_i - e) \geq \sum_{۱ \leq i \leq k} (|\bigcup S_i| - ۱) f_i(S_i) \tag{۱۰.۴}$$

با تقسیم هر دو سمت نامساوی (۱۰.۴) بر $۱/|\bigcup S_i|$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{|\bigcup S_i|}\Big(\sum_{e \in \bigcup S_i} \sum_{۱ \leq i \leq k} f_i(S_i - e)\Big) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{۱ \leq i \leq k} f_i(S_i^*)\Big] \\ &\geq \sum_{۱ \leq i \leq k} f_i(S_i) \frac{|\bigcup S_i| - ۱}{|\bigcup S_i|}. \end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

■

لم ۷.۴. *فرض کنید f یک تابع زیرپیمانه‌ای باشد و $S_۱, S_۲, \ldots, S_k$ تعداد k مجموعه مجزا باشد به گونه‌ای که به ازای هر مجموعه S_i داشته باشیم: $f(S_i) \geq ۱$. به علاوه، فرض کنید $S \subseteq \bigcup S_i$ یک مجموعه باشد، به طوری که $f(S) < ۱/۳$. اگر عضو $\{e\}$ از $\bigcup S_i \setminus S$ را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، داریم:*

$$\mathbb{E}[f(S \cup \{e\}) - f(S)] \geq \frac{۲k/۳}{|\bigcup S_i \setminus S|}.$$

اثبات. مشابه اثبات لم ۶.۴، ما از عبارت (۵.۴) به عنوان تعریف توابع زیرپیمانه‌ای استفاده می‌کنیم. فرض کنید $S'_i = S_i \setminus S = \{e_۱, e_۲, \ldots, e_\alpha\}$، $T_۰ = S$ و به ازای $۱ \leq j \leq \alpha$ داریم $T_j = S \cup \{e_۱, e_۲, \ldots, e_j\}$.

چون $f(S) < ۱/۳$، داریم $f(S \cup S'_i) \geq ۱$. همچنین با توجه به نامساوی (۵.۴) داریم:

$$\begin{aligned} ۲/۳ &< f(S \cup S') - f(S) \\ &= \sum_{۱ \leq j \leq \alpha} f(T_{j-۱} \cup \{e_j\}) - f(T_{j-۱}) \\ &\leq \sum_{e \in S'_i} f(S \cup \{e\}) - f(S). \end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

مشابه نامساوی (۱۰.۴)، از آنجا که عبارت (۱۲.۴) به ازای هر $۱ \leq i \leq k$ برقرار است، داریم:

$$۲k/۳ < \sum_{۱ \leq i \leq k} \sum_{e \in S'_i} f(S \cup \{e\}) - f(S). \tag{۱۳.۴}$$

با تقسیم هر دو سمت نامساوی (۱۳.۴) بر $۱/|\bigcup S_i \setminus S|$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{۲k/۳}{|\bigcup S_i \setminus S|} &< \frac{۱}{|\bigcup S_i \setminus S|} \Big(\sum_{۱ \leq i \leq k} \sum_{e \in S'_i} f(S \cup \{e\}) - f(S) \Big) \\ &= \mathbb{E}[f(S \cup \{e\}) - f(S)]. \end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

■

حال، آماده هستیم که قضیه اصلی خود در این بخش را اثبات کنیم.

قضیه ۸.۴. *مسئله تخصیص منصفانه با افراد زیرپیمانه‌ای شامل یک تخصیص $\mathsf{MMS} - ۱/۳$ است.*

اثبات. یک نمونه ۱/۳ـ کاهش‌ناپذیر را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathcal{A}$ یک تخصیص باشد که مقدار $\mathsf{ex}^{(۲/۳)}$ را بیشینه می‌کند. به عنوان برهان خلف فرض کنید به ازای یک فرد i داریم $V_i(A_i) < ۱/۳$. در این حالت، شیء m_r را از $\mathcal{M} \setminus A_i$ به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و با آن تخصیص $\mathcal{A}^r$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$A^r_j = \begin{cases} A_j \setminus \{m_r\}, & \text{if} \quad i \neq j \\ A_j \cup \{m_r\} & \text{if} \quad i = j. \end{cases}$$

در ادامه نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{E}[\mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}^r)] > \mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}),$$

که این با کمینه بودن $\mathcal{A}$ در تناقض است.

توجه کنید که با در نظر گرفتن لم ۶.۴، نامساوی زیر برقرار است:

$$\mathbb{E}[\sum_{j \neq i} V_j^{۲/۳}(A^r_j)] \geq \sum_{j \neq i} V_j^{۲/۳}(A_j) \frac{|\mathcal{M} \setminus A_i| - ۱}{|\mathcal{M} \setminus A_i|}. \tag{۱۵.۴}$$

به علاوه، با توجه به لم ۷.۴ داریم:

$$\mathbb{E}[V_i(A_i^r) - V_i(A_i)] \geq \frac{۲n/۳}{|\mathcal{M} \setminus A_i|}. \tag{۱۶.۴}$$

نامساوی (۱۵.۴) به همراه نامساوی (۱۶.۴) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}^r)] &= \mathbb{E}[\sum_{j \neq i} V_j^{۲/۳}(A_j^r)] + \mathbb{E}[V_i(A_i^r)] \\
&\geq \sum_{j \neq i} V_j^{۲/۳}(A_j) \frac{|\mathcal{M} \setminus A_i| - ۱}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + \mathbb{E}[V_i(A_i^r)] \\
&\geq \sum_{j \neq i} V_j^{۲/۳}(A_j) \frac{|\mathcal{M} \setminus A_i| - ۱}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + \frac{۲n/۳}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + V_i(A_i) \\
&\geq \sum_{j \neq i} V_j^{۲/۳}(A_j) \frac{|\mathcal{M} \setminus A_i| - ۱}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + \frac{۲n/۳}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + V_i^{(۲/۳)}(A_i) \\
&\geq \sum_{j \neq i} V_j^{۲/۳}(A_j) \frac{|\mathcal{M} \setminus A_i| - ۱}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + \frac{۲n/۳}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + V_i^{(۲/۳)}(A_i) \frac{|\mathcal{M} \setminus A_i| - ۱}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} \\
&= \mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}) \frac{|\mathcal{M} \setminus A_i| - ۱}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + \frac{۲n/۳}{|\mathcal{M} \setminus A_i|}.
\end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

به یاد داشته باشید که با توجه به لم ۳.۳، ارزش فرد i برای هر شیء به تنهایی محدود به مقدار ۱/۳ است و بنابراین

$$\mathbb{E}[V_i(A_i^r) - V_i(A_i)] = \mathbb{E}[V_i^{۲/۳}(A_i^r) - V_i^{۲/۳}(A_i)].$$

با توجه به تعریف، می‌دانیم که مقدار $V_j^{(۲/۳)}$ همیشه کمتر یا مساوی با ۲/۳ است و همینطور $V_i(A_i) < ۱/۳$. بنابراین $\mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}) \leq ۲n/۳ - ۱/۳$ و لذا

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}^r)] &\geq \mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}) \frac{|\mathcal{M} \setminus A_i| - ۱}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} + \frac{۲n/۳}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} \\
&\geq \mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}) + \frac{۱/۳}{|\mathcal{M} \setminus A_i|} \\
&\geq \mathsf{ex}^{(۲/۳)}(\mathcal{A}) + ۱/۳m.
\end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

■

۳.۳.۴ الگوریتم

در این بخش، یک الگوریتم جهت پیدا کردن یک تخصیص MMS − ۱/۳ برای حالتی که توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای است ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم که الگوریتم ما در زمان چندجمله‌ای قابل پیاده‌سازی است.

برای راحتی، در این بخش فرض می‌کنیم که به ازای هر فرد i، مقدار MMS_i به عنوان ورودی داده شده است. در بخش مربوط به توابع XOS نشان خواهیم داد که این مانع با استفاده از یک ایده ترکیبیاتی قابل رفع است. روش ما در الگوریتم ۳ مشخص شده است.

الگوریتم ۳: الگوریتم یافتن یک تخصیص $\mathsf{MMS}-۱/۳$ برای توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای

Data: $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \langle V_۱, V_۲, \ldots, V_n\rangle, \langle \mathsf{MMS}_۱, \mathsf{MMS}_۲, \ldots, \mathsf{MMS}_n\rangle$

For every j، scale V_j to ensure $\mathsf{MMS}_j = ۱$

while *there exist an agent* i *and an item* m_j *such that* $V_i(\{m_j\}) \geq ۱/۳$ **do**

  Allocate $\{m_j\}$ to i

  $\mathcal{M} = \mathcal{M} \setminus m_j$

  $\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus i$

$\mathcal{A} =$ an arbitrary allocation of the items to the agents

while $\min V_j^{۲/۳}(A_j) < ۱/۳$ **do**

  $i =$ the agent who receives the lowest value in allocation $\mathcal{A}$

  Find an item m_e such that:

  $\mathsf{ex}(\langle A_۱ \setminus \{m_e\}, A_۲ \setminus \{m_e\}, \ldots, A_{i-۱} \setminus \{m_e\}, A_i \cup \{m_e\}, A_{i+۱} \setminus \{m_e\}, \ldots, A_n \setminus \{m_e\}\rangle) \geq \mathsf{ex}(\mathcal{A}) + ۱/۳m$

  $\mathcal{A} = \langle A_۱ \setminus \{m_e\}, A_۲ \setminus \{m_e\}, \ldots, A_{i-۱} \setminus \{m_e\}, A_i \cup \{m_e\}, A_{i+۱} \setminus \{m_e\}, \ldots, A_n \setminus \{m_e\}\rangle$

For every $i \in \mathcal{N}$ allocate A_i to i

با توجه به قضیه ۸.۴، می‌توان نشان داد که در هر حلقه از الگوریتم، مقدار $\mathsf{ex}^{۲/۳}(\mathcal{A})$ به اندازه حداقل $۱/۳m$ افزایش می‌یابد. به علاوه، شئی m_e با خاصیت گفته شده را می‌توان به راحتی در زمان $O(m)$ یافت. به علاوه، تعداد حلقه‌های الگوریتم با $۲nm$ محدود شده است، چون $\mathsf{ex}^{۲/۳}(\mathcal{A})$ محدود به $۲n/۳$ شده است. بنابراین، الگوریتم ۳ یک تخصیص $\mathsf{MMS}-۱/۳$ در زمان چندجمله‌ای می‌یابد.

قضیه ۹.۴. *با فرض دسترسی به پیشگوی پرسمان، می‌توان یک تخصیص $\mathsf{MMS}-۱/۳$ را در زمان چندجمله‌ای برای حالتی که توابع مطلوبیت زیرپیمانه است یافت.*

یک نتیجه از قضیه ۹.۴ این است که مسئله پیدا کردن مقدار بیش‌کمینه توابع زیرپیمانه‌ای یک تقریب ۳ دارد.

نتیجه ۱۰.۴. *برای تابع زیرپیمانه‌ای داده شده f ما می‌توانیم در زمان چندجمله‌ای اعضای مجموعه زمینه را به n مجموعه مجزای $S_۱, S_۲, \ldots, S_n$ تقسیم کنیم. به گونه‌ای که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ داشته باشیم:*

$$f(S_i) \geq \mathsf{MMS}_f^n/۳.$$

۴.۴ توابع XOS

کلاس توابع مطلوبیت جمعی نسبی یا XOS در واقع ابرکلاس توابع زیرپیمانه‌ای محسوب می‌شود. این توابع نیز موضوع تعداد زیادی مطالعه بوده است [۲۸، ۱۵، ۳۷، ۱۶، ۷۴، ۴۰، ۴۳، ۴۱، ۶۲]. مشابه توابع زیرپیمانه‌ای، در این بخش ما نشان می‌دهیم که برای توابع مطلوبیت XOS یک تخصیص MMS $- ۱/۵$ همواره امکان‌پذیر است. به علاوه، در بخش ۲.۴.۴ الگوریتمی ارائه می‌دهیم که یک تخصیص MMS $- ۱/۸$ را در زمان چندجمله‌ای پیدا کند.

در ابتدا، در نظر داشته باشید که همان مثال ارائه شده جهت اثبات حد بالا برای توابع زیرپیمانه‌ای، قابل استفاده جهت ارائه حد بالا برای توابع XOS نیز هست. برای این کار، کافی است که تابع f را با تابع زیر جایگزین کنیم:

$$g(S)=\begin{cases} ۰, & \text{if} \quad |S|=\emptyset \\ ۱, & \text{if} \quad |S|=۱ \\ ۲, & \text{if} \quad |S|>۲ \\ ۲, & \text{if} \quad S=\{m_{۲i},m_{۲i+۱}\} \text{ for some } i \\ ۱, & \text{if} \quad |S|=۲ \text{ and } S\neq\{m_{۲i},m_{۲i+۱}\} \text{ for any} i. \end{cases}$$

استدلال مشابه قسمت قبل نتیجه می‌دهد که به دست آوردن تقریب بهتر از MMS $- ۱/۲$ برای توابع XOS غیر ممکن است.

قضیه ۱۱.۴. *به ازای هر $n>۱$، یک نمونه از مسئله تخصیص منصفانه با n فرد با توابع مطلوبیت XOS وجود دارد که فاقد تخصیص MMS $- ۱/۲$ است.*

۱.۴.۴ اثبات وجودی

در این بخش، نشان می‌دهیم که هر نمونه از مسئله تخصیص منصفانه با توابع مطلوبیت XOS دارای یک تخصیص MMS $- ۱/۵$ است. برای این قسمت نیز بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که برای هر فرد i مقدار MMS_i برابر با یک است. تعریف تابع سقف را به یاد آورید. همان‌طور که در لم ۲.۴ اثبات شد، به ازای هر تابع XOS و هر مقدار حقیقی $x\geq ۰$، تابع f^x نیز XOS است.

اثبات مربوط به این بخش، شباهت‌هایی به اثبات ارائه شده در بخش ۳ دارد. با این حال، جزئیات قابل توجهی در این دو بخش متفاوت است، زیرا که توابع XOS ساختار زیبایی که مخصوص توابع زیرپیمانه‌ای است را ندارند. به ازای هر تخصیص $\mathcal{B}$ ما $\text{ex}^{۲/۵}(\mathcal{B})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{ex}^{۲/۵}(\mathcal{B})=\sum_{i\in\mathcal{N}} V_i^{۲/۵}(B_i).$$

حال، فرض کنید $\mathcal{A} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ یک تخصیص اشیا به افراد باشد، به گونه‌ای که $\mathsf{ex}^{2/5}$ را بیشینه می‌کند. با فرض این که نمونه داده شده ۱/۵ ـ کاهش‌ناپذیر است، نشان می‌دهیم که $\mathcal{A}$ یک تخصیص $\mathsf{MMS} - 1/5$ است. قبل از این که به سراغ اثبات اصلی برویم، ابتدا لم های ۱۲.۴ و ۱۳.۴ را در این رابطه بیان می‌کنیم.

لم ۱۲.۴. *فرض کنید $f(\cdot)$ یک تابع XOS باشد و به ازای یک مجموعه $S \subseteq \mathsf{ground}(f)$ داشته باشیم $f(S) = \beta$. اگر مجموعه S را به k زیرمجموعه $S_1, S_2, \ldots, S_k$ تقسیم کنیم، در این صورت داریم*

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(f(S) - f(S \setminus S_i) \Big) \leq f(S).$$

اثبات. بر اساس تعریف توابع XOS، $f(\cdot)$ یک تابع XOS شامل تعداد متناهی توابع جمعی $\{g_1, g_2, \ldots, g_\alpha\}$ است که به ازای هر مجموعه $S \in \mathsf{ground}(f)$ داریم $f(S) = \max_{i=1}^{\alpha} g_i(S)$. فرض کنید $g_j(\cdot)$ یک تابع جمعی باشد که S را بیشینه می‌کند. همچنین، فرض کنید $g_j(S_1) = \alpha_1, g_j(S_2) = \alpha_2, \ldots, g_j(S_k) = \alpha_k$، که این نتیجه می‌دهد $\beta = \sum \alpha_i$. چون $g_j(S_i) = \alpha_i$، داریم $f(S \setminus S_i) \geq \beta - \alpha_i$. بنابراین

$$\begin{aligned} \sum f(S) - f(S \setminus S_i) &\leq \sum \beta - (\beta - \alpha_i) \\ &= \beta = f(S). \end{aligned} \tag{۱۹.۴}$$

■

با توجه به لم ۳.۳ می‌دانیم که در هر نمونه ۱/۵ ـ کاهش‌ناپذیر از مسئله، ارزش هر شیء برای یک فرد دارای حد بالای ۱/۵ است. همچنین برای توابع XOS از قانون کاهش‌ناپذیری استفاده می‌کنیم تا اصل مهم دیگری را در مورد آنها ثابت کنیم.

لم ۱۳.۴. *در یک نمونه ۱/۵ ـ کاهش‌ناپذیر از مسئله تخصیص منصفانه با توابع مطلوبیت XOS، به ازای هر فرد مشخص i می‌توانیم اشیا را در $2n$ مجموعه مختلف $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ تقسیم کنیم، به گونه‌ای که به ازای هر $1 \leq i \leq 2n$، داشته باشیم $V_i(S_i) \geq 2/5$.*

اثبات. بر اساس تعریف MMS، می‌دانیم که i می‌تواند اشیا را به n مجموعه $\mathcal{P} = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$ تقسیم کند، به گونه‌ای که به ازای هر p_j داشته باشیم $V_i(P_j) \geq 1$. نکته این است که فرد i می‌تواند هر کدام از این n مجموعه را به دو مجموعه مجزا تقسیم کند که ارزش هر کدام از این مجموعه‌های جدید برای او حداقل

برابر با ۲/۵ باشد. فرض کنید $T = \{b_۱, b_۲, \dots, b_\gamma\}$ یکی از این n مجموعه باشد، و $g_j(\cdot)$ تابع جمعی باشد که مقدار $V_i(T)$ را بیشینه می‌کند. فرض کنید برای هر $۱ \leq k \leq \gamma$ داشته باشیم $T_k = \{b_۱, b_۲, \dots, b_k\}$. بر اساس لم ۳.۳، از آنجا که مسئله ۱/۵ـ کاهش‌ناپذیر است، ارزش هر شیء کمتر از ۱/۵ برای فرد i است. بنابراین، یک مجموعه T_k در میان مجموعه‌های $T_۱$ تا T_γ وجود دارد که $۲/۵ \leq g_j(T_k) < ۳/۵$. چون $g_j(\cdot)$ یکی از توابع جمعی سازنده تابع V_i است، داریم $V_i(T_k) \geq ۲/۵$. به علاوه، چون $g_j(T_k) < ۳/۵$، داریم $g_j(T \setminus T_k) \geq ۲/۵$، که این یعنی $V_i(T \setminus T_k) \geq ۲/۵$. در نتیجه، می‌توانیم هر کدام از این n مجموعه را به دو دسته با ارزش حداقل ۲/۵ برای فرد i تقسیم کنیم. ■

در ادامه، قضیه اصلی این بخش را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۴. *مسئله تخصیص منصفانه با افراد با توابع ارزش XOS دارای یک تخصیص MMS − ۱/۵ است.*

اثبات. یک نمونه ۱/۵ـ کاهش‌ناپذیر از مسئله را در نظر بگیرید و تخصیص $\mathcal{A} = \langle A_۱, A_۲, \dots, A_n \rangle$ از اشیا به افراد را که مقدار $\mathsf{ex}^{۲/۵}$ را بیشینه می‌کند را نیز در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که چنین تخصیصی، MMS − ۱/۵ است. فرض کنید که یک فرد i وجود داشته باشد که ارزش اشیای تخصیص داده شده به او برایش ارزش کمتر از ۱/۵ دارد. به بیان دقیق‌تر،

$$V_i^{۲/۵}(A_i) = V_i(A_i) < ۱/۵.$$

از آنجایی که مسئله ۱/۵ـ کاهش‌ناپذیر است، با توجه به لم ۱۳.۴ ما می‌توانیم اشیا را به $۲n$ مجموعه $S_۱, S_۲, \dots, S_{۲n}$ به گونه‌ای تقسیم کنیم که به ازای هر $۱ \leq j \leq ۲n$ داشته باشیم $V_i(S_j) \geq ۲/۵$. دقت کنید که با توجه به تعریف سود محدود، داریم: $V_i^{۲/۵}(S_j) = ۲/۵$. همچنین با فرض یکنوا بودن توابع، به ازای هر j، رابطه $V_i^{۲/۵}(S_j \cup A_i) = ۲/۵$ برقرار است. حال $۲n$ تخصیص مختلف $\mathcal{A}^۱, \mathcal{A}^۲, \dots, \mathcal{A}^{۲n}$ را در نظر بگیرید که در آنها به ازای هر $۱ \leq j \leq ۲n$ داریم $\mathcal{A}^j = \langle A^j_۱, A^j_۲ \dots, A^j_n \rangle$، که

$$A^j_k = \begin{cases} A_k \cup S_j, & \text{if} \quad k = i \\ A_k \setminus S_j, & \text{if} \quad k \neq i. \end{cases}$$

ما نشان می‌دهیم که حداقل یکی از این تخصیص‌ها منجر به مقدار بیشتری برای $\mathsf{ex}^{۲/۵}$ در مقایسه با $\mathcal{A}$ خواهد شد. از آنجا که تابع $V_i^{۲/۵}$ یک تابع XOS است، با توجه به لم ۱۲.۴، به ازای هر $k \neq i$ داریم:

$$\sum_{j=۱}^{۲n} \left(V_k^{۲/۵}(A_k) - V_k^{۲/۵}(A_k \setminus S_j) \right) \leq V_k^{۲/۵}(A_j).$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\sum_{j=۱}^{۲n} V_k^{۲/۵}(A_k^j) &= \sum_{j=۱}^{۲n} V_k^{۲/۵}(A_j \setminus S_j)\\ &\geq ۲nV_k^{۲/۵}(A_k) - V_k^{۲/۵}(A_k)\\ &= (۲n-۱)V_k^{۲/۵}(A_k).\end{aligned} \tag{۲۰.۴}$$

به علاوه، از آنجا که $V_i^{۲/۵}(A_i) < ۱/۵$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i} V_j^{۲/۵}(A_j) &> \sum_{j\in\mathcal{N}} V_j^{۲/۵}(A_j) - ۱/۵\\ &= \mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A}) - ۱/۵.\end{aligned} \tag{۲۱.۴}$$

همچنین، چون به ازای هر $۱ \leq j \leq ۲n$ رابطه $V_i^{۲/۵}(S_j \cup A_i) = ۲/۵$ برقرار است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq i} V_k^{۲/۵}(A_k^j) &= \sum_{k\in\mathcal{N}} V_k^{۲/۵}(A_k^j) - ۲/۵\\ &= \mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A}^j) - ۲/۵.\end{aligned} \tag{۲۲.۴}$$

در نهایت، با ترکیب نامساوی‌های (۲۰.۴)،(۲۱.۴) و (۲۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{j=۱}^{۲n} \mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A}^j) &= \sum_{j=۱}^{۲n}(۲/۵ + \sum_{k\neq i} V_k^{۲/۵}(A_k^j))\\ &= ۴n/۵ + \sum_{j=۱}^{۲n}\sum_{k\neq i} V_k^{۲/۵}(A_k^j)\\ &\geq ۴n/۵ + \sum_{k\neq i}(۲n-۱)V_k^{۲/۵}(A_k)\\ &\geq ۴n/۵ + (۲n-۱)(\mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A}) - ۱/۵)\\ &\geq ۲n\cdot \mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A}) + (۴n-۲n+۱)/۵ - \mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A})\\ &\geq ۲n\cdot \mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A}) + (۲n+۱)/۵ - \mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

توجه کنید که از آنجا که $V_k^{۲/۵}(A_k) \leq ۲/۵$ داریم:

$$\begin{aligned}\mathsf{ex}^{۲/۵}(\mathcal{A}) &= \sum_{k=۱}^{n} V_k^{۲/۵}(A_k)\\ &\leq \sum_{k=۱}^{n} ۲/۵\\ &\leq ۲n/۵.\end{aligned}$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n} \mathsf{ex}^{2/5}(\mathcal{A}^j) &\geq 2n \cdot \mathsf{ex}^{2/5}(\mathcal{A}) + (2n+1)/5 - \mathsf{ex}^{2/5}(\mathcal{A})\\ &\geq 2n \cdot \mathsf{ex}^{2/5}(\mathcal{A}) + (2n+1)/5 - 2n/5\\ &\geq 2n \cdot \mathsf{ex}^{2/5}(\mathcal{A}) + 1/5.\end{aligned}$$

لذا، رابطه $\mathsf{ex}^{2/5}(\mathcal{A}^j) > \mathsf{ex}^{2/5}(\mathcal{A}) + 1/10n$ برای حداقل یک $\mathcal{A}^j$ برقرار است که این با این فرض که $\mathcal{A}$ مقدار $\mathsf{ex}^{2/5}$ را بیشینه می‌کند در تناقض است. ■

۲.۴.۴ الگوریتم

در این بخش، یک الگوریتم چندجمله‌ای برای پیدا کردن یک تخصیص $\mathsf{MMS} - 1/8$ برای حالتی که توابع مطلوبیت XOS است ارائه می‌دهیم. الگوریتم ما بر اساس اثباتی است که برای قضیه ۱۴.۴ ارائه دادیم. دقت کنید که الگوریتم ارائه شده ما تنها نیاز به دسترسی به پرسمان‌های درخواست و XOS دارد و نیاز به هیچ اطلاع قبلی در رابطه با مقدار سهم بیش‌کمینه افراد ندارد. در ابتدا، ما یک ایده کلی از الگوریتم خود را شرح می‌دهیم. شبه کدی که در الگوریتم ۴ ارائه شده است را در نظر بگیرید.

الگوریتم ۴: الگوریتم جهت یافتن تخصیص $\mathsf{MMS} - 1/8$

Data: $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle$
1 **for** *every* j **do**
2   scale V_j to ensure $\mathsf{MMS}_j = 1$
3 **while** *there exist an agent* i *and an item* m_j *such that* $V_i(\{m_j\}) \geq 1/8$ **do**
4   Allocate $\{m_j\}$ to i
5     $\mathcal{M} = \mathcal{M} \setminus m_j$
6     $\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus i$
7 $\mathcal{A}$ = an arbitrary allocation of the items to the agents
8 **while** $\min V_j^{1/4}(A_j) < 1/8$ **do**
9   i = the agent who receives the lowest value in allocation $\mathcal{A}$
10   Find a set S such that:
      $\mathsf{ex}^{1/4}(\langle A_1 \setminus S, A_2 \setminus S, \ldots, A_{i-1} \setminus S, A_i \cup S, A_{i+1} \setminus S, \ldots, A_n \setminus S\rangle) \geq \mathsf{ex}^{1/4}(\mathcal{A}) + 1/12n$
11     $\mathcal{A} = \langle A_1 \setminus S, A_2 \setminus S, \ldots, A_{i-1} \setminus S, A_i \cup S, A_{i+1} \setminus S, \ldots, A_n \setminus S\rangle$
12 **for** *every* $i \in \mathcal{N}$ **do**
13   allocate A_i to i

همان‌گونه که در بخش بعد نشان می‌دهیم، دستور ۱۰ از الگوریتم همواره موفق به یافتن مجموعه مناسب

خواهد شد. به بیان دقیق‌تر، همیشه یک مجموعه S وجود دارد که شرایط دستور ۱۰ در مورد آن برقرار است. دقت کنید که در هر مرحله از الگوریتم، $\mathsf{ex}^{۱/۴}(\mathcal{A})$ به میزان حداقل $۱/۱۲n$ افزایش می‌یابد و این مقدار دارای حد بالای $n/۴ = n \cdot ۱/۴$ است. بنابراین، بعد از حداکثر $۳n^۲$ مرحله، تخصیص ارائه شده یک تخصیص $\mathsf{MMS} - ۱/۸$ است.

دو مانع محاسباتی در اجرای الگوریتم ۴ وجود دارد. اول این که پیدا کردن مجموعه S که شرایط دستور ۱۰ را داشته باشد آسان نیست. دوم این که این فرض که توابع مطلوبیت افراد به گونه‌ای است که $\mathsf{MMS}_i = ۱$ باشد نیز فرضی است که نیاز به محاسبه MMS دارد و این در زمان چندجمله‌ای قابل انجام نیست. برای حل مشکل اول، یک الگوریتم ارائه می‌دهیم که در زمان چندجمله‌ای مجموعه S را محاسبه کند. سپس، یک ایده ترکیبیاتی برای اجرای الگوریتم در زمان چندجمله‌ای و بدون نیاز به دسترسی به مقدار دقیق سهم بیش‌کمینه افراد مختلف ارائه می‌دهیم. این ایده برای هر دو حالت توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای و XOS قابل پیاده‌سازی است.

اجرای دستور ۱۰ در زمان چندجمله‌ای

در این بخش، یک الگوریتم برای اجرای دستور ۱۰ از الگوریتم ۴ در زمان چندجمله‌ای ارائه می‌دهیم. همچنین، نشان می‌دهیم که این روال می‌تواند با استفاده از پیشگوی درخواست پیاده‌سازی شود.

به ازای هر $m_j \notin A_i$ فرض کنید c_j میزان تاثیری باشد که شیء m_j بر مقدار $\mathsf{ex}^{۱/۴}(\mathcal{A})$ دارد. قرار می‌دهیم $p_e = ۳(n/(n-۱))c_e$ و به پیشگوی درخواست، مقدار V_i را می‌دهیم تا مجموعه S که مقدار $V_i(S) - \sum_{m_j \in S} p_j$ را بیشینه می‌کند به ما بدهد. با استفاده از محاسبات ساده، می‌توانیم نشان دهیم که حداقل به ازای یک دسته از اشیا، رابطه $V_i(S) - \sum_{m_j \in S} p_j \geq ۱/۴$ برقرار است. دلیل درستی این ادعا، این است که می‌توانیم اشیا را به n دسته تقسیم کنیم، به گونه‌ای که ارزش هر دسته برای فرد i حداقل برابر با ۱ باشد. به علاوه، مجموع قیمت‌ها برای اشیا محدود به

$$۳n/(n-۱) \cdot (\sum_{j \neq i} V_j^{۱/۴}(A_j)) \leq ۳n/۴$$

است. بنابراین، به ازای حداقل یکی از این دسته‌ها، مقدار $V_i(S) - \sum_{m_j \in S} p_j$ حداقل برابر با ۱/۴ است. بنابراین، مجموعه‌ای که پیشگو برای ما بازمی‌گرداند، دارای ارزش حداقل ۱/۴ برای فرد i خواهد بود.

حال، فرض کنید S^* مجموعه پاسخ‌های پیشگو باشد و به ازای هر $m_j \in S^*$ عبارت c_j^* میزان مشارکت m_j در مقدار $V_i(S^*)$ باشد. ما اشیای داخل S^* را بر اساس $c_j^* - p_j$ به صورت غیر صعودی مرتب می‌کنیم. در ادامه، با یک کیف خالی شروع می‌کنیم و اشیا را بر اساس ترتیبشان به کیف اضافه می‌کنم، تا زمانی که ارزش کل اشیای داخل کیف برای فرد i به مقدار ۱/۴ برسد. از آنجا که ارزش هر شیء به تنهایی حداکثر برابر با ۱/۸

است، ارزش کل اشیای داخل کیف برای فرد i حداکثر برابر با ۳/۸ است. بنابراین، میزان مشارکت آن اشیا در مقدار $\mathsf{ex}^{۱/۴}(\mathcal{A})$ حداکثر برابر با $(۳/۸)/(۳n/(n-۱)) \leq ۱/۸ - ۱/(۱۰n)$ است. در نتیجه، حذف اشیای داخل کیف از تخصیص و اضافه کردن آنها به A_i مقدار $\mathsf{ex}^{۱/۴}(\mathcal{A})$ را حداقل به میزان $۱/۱۰n$ افزایش می‌دهد. دقت داشته باشید که می‌توان این گزاره را به طور مشابه حتی برای زمانی که $\mathsf{MMS}_i \geq ۱/(۱ + ۱/۱۰n)$ است نیز اثبات کرد.

اجرای الگوریتم ۴ در زمان چندجمله‌ای

همان طور که اشاره شد، محاسبه مقدار سهم بیش‌کمینه افراد، یک مسئله ان‌پی‌ـسخت است و بنابراین، محاسبه مقدار دقیق آن در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر نیست، مگر این که داشته باشیم $P = NP$ [۶۵]. با این حال، در الگوریتم فرض شده است که برای هر فرد، مقدار سهم بیش‌کمینه او برابر با یک است. در این بخش، روشی برای رفع این مشکل ارائه خواهیم داد.

فرض کنید یک پیشگو داریم که در زمان چندجمله‌ای، مقدار سهم بیش‌کمینه افراد را به ما می‌دهد. با فرض این که دستور ۱۰ از الگوریتم ۴ را می‌توان در زمان چندجمله‌ای اجرا کرد، ما می‌توانیم یک تخصیص $\mathsf{MMS} - ۱/۸$ را در زمان چندجمله‌ای به دست آوریم. بنابراین، در حالتی که پیشگو مقدار حقیقی سهم بیش‌کمینه افراد را اعلام کند، مسئله ما حل است. اما، اگر پیشگو مقدار مشخصی خطا در محاسبه خود داشته باشد چطور؟ دو حالت وجود دارد: اول این که الگوریتم ۴ پایان یافته و یک تخصیص برمی‌گرداند که در واقع یک تخصیص $\mathsf{MMS} - ۱/۸$ با توجه به مقدارهای اعلام شده توسط پیشگو است. دوم این که الگوریتم موفق به اجرای دستور ۱۰ نمی‌شود، زیرا که هیچ مجموعه S مناسبی که شرایط گفته شده در دستور ۱۰ را داشته باشد پیدا نمی‌کند. در این بخش نشان می‌دهیم که این اتفاق تنها در زمانی می‌افتد که مقدار سهم بیش‌کمینه اعلام شده برای فرد i بیش از مقدار حقیقی او باشد. دقت کنید که فرد i کسی است که کمترین مقدار را در آخرین حلقه از اجرا به دست آورده است.

مشاهده ۱۵.۴. *فرض کنید $\langle d_۱, d_۲, \ldots, d_n\rangle$ یک تخمین از مقدار سهم بیش‌کمینه افراد باشد. اگر الگوریتم ۴ موفق به اجرای دستور ۱۰ برای یک فرد i نشود، در این صورت داریم:*

$$d_i \geq (۱ + ۱/۱۰n)\mathsf{MMS}_i.$$

اثبات مشاهده ۱۵.۴ نتیجه گزاره‌هایی است که در بخش قبل به آنها اشاره کردیم. همان‌طور که در این بخش گفته شد، مجموعه مناسب S وجود دارد، اگر $\mathsf{MMS}_i \geq ۱/(۱ + ۱/۱۰n)$. بنابراین، با فرض این که روالی که تعریف شد موفق به پیدا کردن چنین مجموعه‌ای نشود، می‌توانیم نتیجه بگیریم که مقدار اعلام

شده برای MMS_i حداقل به اندازه ضریب $(۱/(۱+۱/۱۰n))$ از مقدار حقیقی آن بیشتر است. بر اساس مشاهده ۱۵.۴، ما از الگوریتم ۵ برای پیاده سازی پیشگوی بیش‌کمینه استفاده می‌کنیم. دقت کنید که در ابتدای

الگوریتم ۵: پیاده‌سازی پیشگوی بیش‌کمینه

```
Data: 𝒩, ℳ, ⟨V۱, V۲, ..., Vn⟩
for every i ∈ 𝒩 do
    d_i ← V_i(ℳ)
while true do
    Run Algorithm ۴ assuming maxmin values are d۱, d۲, ..., dn
    if the Algorithm fails to run Command ۱۰ for an agent i then
        d_i ← d_i/(۱ + ۱/۱۰n)
    else
        Report the allocation and terminate the algorithm
```

الگوریتم، قرار می‌دهیم $d_i = V_i(\mathcal{M})$ که در واقع مقداری بیشتر مساوی با مقدار سهم بیش‌کمینه افراد است. بر اساس لم ۱۵.۴ هر بار که مقدار d_i را برای یک فرد i کم می‌کنیم، شرط $d_i \geq \mathsf{MMS}_i$ را برای او حفظ می‌کنیم. بنابراین، در هر مرحله از الگوریتم داریم $d_i \geq \mathsf{MMS}_i$، و بنابراین، تخصیص ارائه شده که یک تخصیص $\mathsf{MMS} - ۱/۸$ با توجه به مقادیر d_i است، یک تخصیص $\mathsf{MMS} - ۱/۸$ بر اساس سهم بیش‌کمینه افراد نیز هست. بنابراین، تخصیص ارائه شده توسط الگوریتم قابل قبول است. تنها این باقی می‌ماند که نشان دهیم که زمان اجرای الگوریتم چمد جمله‌ای است.

دقت کنید که هر زمانی که مقدار d_i را برای فرد i کاهش می‌دهیم، این مقدار را با ضریب $۱/(۱+۱/۱۰n)$ کاهش می‌دهیم. بنابراین، تعداد چنین تکرارهایی بر حسب n چندجمله‌ای است. از آنجایی که فرض ما این است که مقادیر ورودی با $\mathsf{poly}(n)$ بیت قابل نمایش است، تعداد چنین تکرارهایی $\mathsf{poly}(n)$ است و بنابراین الگوریتم بعد از تعداد چندجمله‌ای مرحله تمام می‌شود.

قضیه ۱۶.۴. *با فرض دسترسی به پیشگوهای درخواست و XOS، یک الگوریتم چندجمله‌ای وجود دارد که یک تخصیص $\mathsf{MMS} - ۱/۸$ را در زمان چندجمله‌ای پیدا می‌کند.*

یک نتیجه جالب توجه از قضیه ۱۶.۴، یک الگوریتم با تقریب ۸ برای پیدا کردن تقسیم‌بندی بهینه توابع مطلوبیت XOS به r دسته است.

نتیجه ۱۷.۴. *به ازای تابع XOS داده‌شده و مقدار r و دسترسی به پیشگوهای درخواست و XOS، یک الگوریتم چندجمله‌ای با تقریب ۸ برای محاسبه MMS_f^r وجود دارد.*

اثبات. ما یک نمونه از مسئله تخصیص با r فرد را ایجاد می‌کنیم، که در آن توابع مطلوبیت همه افراد برابر با f است. برای این نمونه، یک تخصیص $\mathsf{MMS} - ۱/۸$ را در زمان چندجمله‌ای پیدا می‌کنیم. سپس کمترین مقداری که یک فرد در این تخصیص دریافت می‌کند را به خروجی اعلام می‌کنیم. با توجه به این که الگوریتم ما تخصیص $\mathsf{MMS}_i - ۱/۸$ را تضمین می‌کند، مقدار بازگشت داده شده حداقل به میزان $\mathsf{MMS}_f^r/۸$ خواهد بود. ■

۵.۴ نتیجه‌گیری

روش‌های ارائه شده در این فصل، نشان می‌دهد که برای توابع مطلوبیت زیرپیمانه‌ای و XOS، همواره یک تخصیص وجود دارد که نسبت ثابتی از سهم بیش‌کمینه را برای همه افراد رعایت می‌کند. هیچ کدام از تقریب‌های ارائه شده، محکم نبودند. بنابراین، پیدا کردن بهترین تضمین ممکن در هر کدام از این حالت‌ها کماکان مشخص نیست.

همان‌طور که در ابتدای مقاله به آن اشاره شد، با استفاده از تقریب ارائه شده برای توابع XOS، می‌توان یک تقریب با ضریب لگاریتمی برای توابع ارزش زیرجمعی نیز ارائه داد که جزئیات آن در [۴۵] شرح داده شده است. با این حال، اثبات ارائه شده برای حالت زیرجمعی تنها وجودی است و هیچ الگوریتمی برای پیدا کردن تخصیص مناسب ارائه نشده است. یک مسیر آتی در این زمینه، ارائه الگوریتم تخصیص با ضریب مناسب در حالت توابع مطلوبیت زیرجمعی است.

در پایان، مانند توابع جمعی، هیچ‌کدام از روش‌های ارائه شده در این فصل نیز صادقانه نیستند. به دست آوردن روش‌های صادقانه جهت تخصیص منصفانه اشیا به افراد، در حالتی که توابع ارزش زیرپیمانه‌ای و XOS است می‌تواند ارزشمند باشد.

فصل ۵

تقسیم منصفانه نامتقارن

یک گسترش طبیعی مسئله تخصیص منصفانه حالتی است که افراد دارای سهم‌های متفاوت باشند. در بعضی از نمونه‌های واقعی، افراد حاضر در مسئله تقسیم ادعاهای متفاوتی نسبت به منبع دارند. برای مثال، در ادیان مختلف، سهم افراد در تقسیم ارث برابر نیست. در دین اسلام، در مسئله تقسیم ارث، سهم مردان دو برابر سهم زنان است. مثال دیگر، تقسیم منابع مشترک در بین کشورها است که معمولا بر اساس وضعیت جغرافیایی، اقتصادی و سیاسی آنها با سهم‌های مختلف تقسیم می‌شود. همچنین، اموال یک شرکت ورشکسته معمولا بر اساس سهام افراد در میان آنها تقسیم می‌شود. در زمینه علوم کامپیوتر، تقسیم منابع در مراکز داده، خوشه‌ها و ابرها معمولا متناسب با نمایه درخواست متقاضیان است [۷۷، ۵۴].

برای تقسیم منصفانه اشیای گسسته با سهم‌های نابرابر تاکنون دو روش توسط برامز و همکاران [۲۲] ارائه شده است. روش اول بر اساس حراجی مهر و موم شده ناستر است. در این روش، یک حراجی برای فروش هر شیء استفاده می‌شود. بنابراین، همه افراد باید مقدار کافی پول داشته باشند که این بزرگترین مشکل این راه حل است. روش دوم که توسط برامز [۲۲] ارائه شد، به حرکت ماژیک‌ها مشهور است. این روش از لحاظ نوع ساختار بسیار شبیه روش حرکت چاقو است که در تقسیم متناسب کیک استفاده می‌شود. مشکل اصلی روش حرکت ماژیک‌ها این است که بهینگی تخصیص نهایی به شدت وابسته به ترتیبی است که اشیا را قرار می‌دهیم، و البته پیدا کردن ترتیب مناسب در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر نیست.

یک ایده برای مواجهه با سهم‌های نابرابر، کپی کردن افراد است. به عبارت دقیق‌تر، زمانی که همه سهم‌ها مقدارهای گویا هستند، می‌توانیم هر فرد i را به تعداد مناسب تکثیر کنیم. هدف تکثیر کردن هر فرد این است که مسئله را به حالت افراد با سهم‌های برابر تقلیل دهیم. بعد از تخصیص، هر فرد تمام سهم تخصیص یافته به افرادی که تکثیری از آن هستند را به دست می‌آورند. برای مثال، فرض کنید که سه فرد داریم که سهم آنها به ترتیب ۱/۲، ۲/۵ و ۱/۱۰ است. در این حالت، فرد اول را به پنج نمونه تکثیر می‌کنیم و فرد دوم را به ۴

نمونه تکثیر می‌کنیم که سهم هر کدام برابر با ۱/۱۰ است. در نتیجه، مسئله تبدیل به یک نمونه با سهم‌های برابر می‌شود. با وجود این که تکثیر افراد ممکن است در حالتی که اشیا زیاد و کم ارزش هستند عملی باشد، اما در حالت اشیای تقسیم‌ناپذیر این روش همیشه امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال، اگر با تکثیر افراد، تعداد آنها بیشتر از تعداد اشیای موجود بشود، سهم تعدادی از افراد ممکن است صفر شود. مشکل دیگر این است که این روش تنها برای سهم‌های گویا مناسب است.

در این فصل، ما مسئله تقسیم منصفانه اشیا بین افراد با سهم‌های مختلف را با استفاده از مدلی که مشکلات اشاره شده را رفع کند بررسی می‌کنیم. معیار انصافی که در این بخش استفاده می‌کنیم، از ایده کلی مدل بودیش در تعریف سهم بیش‌کمینه الهام می‌گیرد. مشابه پیشنهاد بودیش، برای تعریف سهم بیش‌کمینه برای فرد i، این سوال را می‌پرسیم: فرد i چقدر انتظار دارد که از یک تقسیم منصفانه به دست بیاورد، اگر مجبور بودیم تقسیم را بر اساس تابع ارزش او انجام دهیم؟ اگر فرد i انتظار دارد که سود p از تخصیص به دست آورد، در این صورت باید سود حداقل $p \cdot e_j/e_i$ را برای هر فرد j نیز به رسمیت بشناسد، به طوری که نسبت سود به سهم خودش حدپایینی برای همه افراد باشد. بنابراین یک پاسخ منصفانه به این سوال بیشترین مقدار p است، به گونه‌ای که یک تخصیص وجود دارد که نسبت سود بر سهم فرد i قابل تضمین برای سایر افراد نیز باشد. بر اساس این، ما سهم بیش‌کمینه هر فرد را تعریف می‌کنیم. در بخش بعد، به طور مفصل راجع به این مدل و معیار ارائه شده صحبت می‌کنیم.

لازم به ذکر است که نتایج این فصل، بخش‌هایی از نتایج مربوط به مقاله ما [۳۶] است. به علت کمبود فضا، در این فصل تنها به ذکر نتایج تئوری به دست آمده در این مقاله بسنده می‌کنیم. این نتایج در مقاله با آزمایش‌های عملی نیز همراه شده است.

۱.۵ مدل ارائه شده

فرض ما در این فصل، این است که توابع ارزش جمعی هستند. به علاوه هر فرد i یک سهم e_i دارد، به گونه‌ای که مجموع سهم افراد برابر با یک است: $\sum e_i = ۱$. از آنجا که مدل ما در واقع گسترشی از سهم بیش‌کمینه است، یک بار دیگر تعریف سهم بیش‌کمینه را مرور می‌کنیم. فرض کنید $\Pi(\mathcal{M})$ مجموعه همه روش‌های تقسیم اشیا به n دسته باشد. در این صورت، سهم بیش‌کمینه نفر i را به صورت

$$\mathsf{MMS}_i = \max_{\langle A_۱, A_۲, \ldots, A_n\rangle \in \Pi(\mathcal{M})} \min_{j\in[n]} V_i(A_j) \qquad (۱.۵)$$

تعریف می‌شود. یک تفسیر از سهم بیش‌کمینه، در واقع سود بیش‌کمینه یک فرد در بازی تقسیم و انتخاب است [۲۴]. حالتی را در نظر بگیرید که یک فرد محتاط، از تابع مطلوبیت خود آگاه است، اما از تابع مطلوبیت سایر افراد بی‌خبر است. اگر ما از این فرد بخواهیم که در بازی تقسیم و انتخاب شرکت کند، او سعی می‌کند که تقسیم‌بندی اشیا را به گونه‌ای انجام دهد که کم‌ارزش‌ترین بسته تا جایی که ممکن است، ارزشمند باشد.

زمانی که افراد دارای سهم‌های متفاوت باشند، تفسیر فوق دیگر مناسب نیست. مسئله این است که تفاوت سهم افراد باید به گونه‌ای در این روال تقسیم و انتخاب در نظر گرفته شود.

اجازه دهید دوباره به حالت سهم‌های برابر برگردیم. یک روش دیگر برای تفسیر سهم بیش‌کمینه این است: فرض کنید از فرد i بخواهیم که اشیا را به صورت منصفانه بین n فرد، بر اساس تابع ارزش خود تقسیم کند. در یک حالت ایده‌آل (تمام اشیا تقسیم‌پذیر باشند)، انتظار داریم که فرد i سهمی برابر با $V_i(\mathcal{M})/n$ را به هر فرد تخصیص دهد. اما چون اشیا تقسیم‌پذیر نیستند، این کار ممکن نیست. برای این حالت، انتظار داریم که فرد i بهترین تقسیم ممکن را ارائه دهد. MMS_i در واقع یک پارامتر است که نشان می‌دهد که تضمین چه مقدار انصاف توسط فرد i، با توجه به تابع مطلوبیتش ممکن است.

به بیان رسمی، برای اندازه‌گیری میزان منصفانه بودن تخصیص فرد i، مقدار F^i_A را برای تخصیص $A = \langle A_۱, A_۲, \ldots, A_n\rangle$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$F^i_A = \frac{\min_j V_i(A_j)}{V_i(\mathcal{M})/n}.$$

در واقع، می‌خواهیم فرد i یک تخصیص A^* را ارائه دهد که مقدار $F^i_{A^*}$ تا حد ممکن به ۱ نزدیک کند. بنابراین، سهم بیش‌کمینه فرد i به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mathsf{MMS}_i = F^i_{A^*}(V_i(\mathcal{M})/n). \qquad (۲.۵)$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که روابط (۱.۵) و (۲.۵) معادل یکدیگر هستند، زیرا که منصفانه‌ترین تقسیم‌بندی در حالتی که سهم‌ها برابر است، تقسیمی است که ارزش بسته با ارزش کمینه را بیشینه کند:

$$\begin{aligned}\mathsf{MMS}_i &= F^i_{A^*}(V_i(\mathcal{M})/n) \\ &= \frac{\min_j V_i(A^*_j)}{V_i(\mathcal{M})/n}(V_i(\mathcal{M})/n) = \min_j V_i(A^*_j).\end{aligned}$$

حال، حالتی از مسئله را در نظر بگیرید که افراد دارای سهم‌های نابرابر هستند و فرض کنید e_i سهم نفر i باشد. مشابه تفسیر دوم ارائه شده برای MMS_i، از فرد i بخواهید که اشیا را به صورت منصفانه بین افراد، با در نظر گرفتن سهم‌ها تقسیم کند. در یک شرایط ایده‌آل (حالتی که تمام اشیا تقسیم‌پذیر باشند)، انتظار داریم

که میزان تخصیص یافته به هر فرد دقیقا متناسب با سهم او باشد. به عبارتی، ارزش بسته تخصیص یافته به فرد j دقیقا برابر با $V_i(\mathcal{M})e_j$ باشد. اما دوباره، به دلیل این که اشیا تقسیم‌ناپذیر هستند، چنین انتظاری به دور از واقع است. مشابه حالت MMS، میزان انصاف تخصیص $A = \langle A_۱, A_۲, \dots, A_n \rangle$ را به صورت

$$F_A^i = \min_j \frac{V_i(A_j)}{V_i(\mathcal{M})e_j} \tag{۳.۵}$$

تعریف کنید. فرض کنید $A^* = \langle A^*_۱, A^*_۲, \dots, A^*_n \rangle$ یک تقسیم‌بندی توسط فرد i باشد که مقدار $F^i_{A^*}$ را بیشینه می‌کند. سهم بیش‌کمینه وزن‌دار فرد i به طور مشابه به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mathsf{WMMS}_i = F^i_{A^*} V_i(\mathcal{M}) e_i = e_i \min_j \frac{V_i(A^*_j)}{e_j}.$$

به طور خلاصه، مقدار WMMS_i برای هر فرد i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathsf{WMMS}_i = \max_{\langle A_۱, A_۲, \dots, A_n \rangle \in \Pi(\mathcal{M})} \min_{j \in [n]} V_i(A_j) \frac{e_i}{e_j}.$$

جهت درک بهتر، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱.۵. *مثالی را در نظر بگیرید که شامل دو فرد است و داریم $e_۱ = ۱/۳$ و $e_۲ = ۲/۳$. به علاوه، فرض کنید که این نمونه شامل ۵ شیء $m_۱, m_۲, m_۳, m_۴, m_۵$ با ارزش‌های زیر برای فرد اول است:*

$$V_۱(\{m_۱\}) = V_۱(\{m_۲\}) = V_۱(\{m_۳\}) = ۴, V_۱(\{m_۴\}) = ۳, V_۱(\{m_۵\}) = ۹.$$

برای تخصیص $A = \langle \{m_۵\}, \{m_۱, m_۲, m_۳, m_۴\} \rangle$ داریم:

$$F_A = \min(\frac{۹}{۲۴ \cdot (۱/۳)}, \frac{۱۵}{۲۴ \cdot (۲/۳)})$$

که این یعنی $F_A = ۱۵/۱۶$. به علاوه، برای تخصیص $A' = \langle \{m_۱, m_۲\}, \{m_۳, m_۴, m_۵\} \rangle$ داریم:

$$F_{A'} = \min(\frac{۸}{۲۴ \cdot (۱/۳)}, \frac{۱۶}{۲۴ \cdot (۲/۳)})$$

که این یعنی $F_{A'} = ۱$. بنابراین تخصیص A' در مقایسه با تخصیص A منصفانه‌تر است. در واقع، A' منصفانه‌ترین تخصیص ممکن است و بنابراین

$$\mathsf{WMMS}_۱ = ۱ \cdot ۲۴ \cdot ۱/۳ = ۸.$$

مثال ۱.۵ همچنین یک ایده کلی راجع به این که چرا تکثیر افراد (همان‌طور که در مقدمه به آن اشاره شد) روش مناسبی نیست ارائه می‌دهد. برای این مثال، اگر فرد ۲ را تکثیر کنیم، با سه فرد با سهم‌های برابر مواجه می‌شویم. اما در هر تقسیم‌بندی اشیا به سه دسته، سهم نفر اول برای بسته با ارزش کمینه حداکثر ۷ است.

در نهایت، یک تخصیص اشیای $\mathcal{M}$ به افراد حاضر در $\mathcal{N}$ یک تخصیص $\alpha - \mathsf{WMMS}$ است، اگر مجموع ارزش سهمی که به هر فرد i در این تخصیص تعلق می‌گیرد، برای او حداقل به میزان $\alpha\mathsf{WMMS}_i$ باشد.

۲.۵ حد محکم $۱/n$ بر روی تخصیص بهینه

به یاد بیاورید که در حالتی که تمام سهم‌ها برابر است، یک تخصیص $\mathsf{WMMS} - ۳/۴$ همواره وجود دارد. در این بخش، نشان می‌دهیم که برای سهم‌های نابرابر، هیچ تضمینی بهتر از $۱/n$ ممکن نیست. همچنین، این نتیجه را با نشان دادن این واقعیت که امکان تضمین $\mathsf{WMMS} - ۱/n$ همیشه ممکن است تکمیل می‌کنیم. خاصیت اصلی مثال نقض ما فاصله زیاد بین ارزش اشیا برای افراد مختلف است.

قضیه ۲.۵. *زمانی که سهم افراد متفاوت باشد، هیچ تضمینی بهتر از $\mathsf{WMMS} - ۱/n$ ممکن نیست.*

اثبات. برای اثبات، یک مثال نقض ارائه می‌دهیم که هیچ تخصیصی بهتر از $\mathsf{WMMS} - ۱/n$ برای آن ممکن نیست. برای این کار، یک نمونه با n فرد و $۲n - ۱$ شیء را در نظر بگیرید و فرض کنید به ازای هر فرد $i < n$، داشته باشیم $e_i = \epsilon$ و همینطور داشته باشیم $e_n = ۱ - (n - ۱)\epsilon$.

توابع ارزش $n - ۱$ نفر اول مشابه یکدیگر است. به ازای هر فرد $i < n$، مقدار $V_i(\{m_j\})$ به این صورت تعیین می‌شود:

$$V_i(\{m_j\}) = \begin{cases} \epsilon & \text{if } j \leq n - ۱ \\ ۱ - (n - ۱)\epsilon & \text{if } j = n \\ ۰ & \text{if } j > n. \end{cases}$$

به علاوه، برای فرد n داریم:

$$V_n(\{m_j\}) = \begin{cases} \frac{۱-(n-۱)\epsilon}{n} & \text{if } j \leq n \\ \epsilon & \text{if } j > n. \end{cases}$$

در ابتدا، دقت کنید که برای هر $i \leq n - ۱$ داریم $\mathsf{WMMS}_i = \epsilon$ و همینطور:

$$\mathsf{WMMS}_n = ۱ - (n - ۱)\epsilon.$$

همچنین، برای $n - ۱$ فرد اول، تقسیم‌بندی بهینه این است که هر شیء m_i به فرد i تخصیص یابد. به علاوه، تخصیص بهینه فرد n این است که اشیای $m_{n+۱}, m_{n+۲}, \ldots, m_{۲n-۱}$ به $n - ۱$ فرد اول تخصیص یابد و n

الگوریتم ۶: $1/n-$ WMMS تخصیص

Input: $\mathcal{N},\mathcal{M}$, valuation functions $V_1,\ldots,V_n$, and entitlements $e_1,\ldots,e_n$ (without loss of generality، sorted in descending order).

Output: Allocation $A = A_1,\ldots,A_n$.

for $i : 1 \to |\mathcal{M}|$ **do**
  assign an unassigned item m_j to agent $i \bmod |\mathcal{N}|$ where $V_{i \bmod |\mathcal{N}|}(\{m_j\})$ is maximum among unassigned items

شیء ابتدایی نیز به خود او برسد. در این حالت،

$$V_n(\{m_1, m_2, ..., m_n\}) = 1-(n-1)\epsilon$$

و به ازای $1 \le i < n$ داریم:

$$V_n(\{m_{n+i}\}) = \epsilon$$

بنابراین، $\mathrm{WMMS}_n = 1-(n-1)\epsilon$. از طرف دیگر، در هر تخصیصی که یک نسبت ناصفر از WMMS را برای همه افراد تضمین کند، حداکثر یکی از اشیای $m_1, m_2, \ldots, m_n$ به نفر n ام می‌رسد، زیرا که سایر اشیا برای $n-1$ نفر اول ارزش ۰ دارند. بنابراین مجموع ارزش اشیای تخصیص داده شده به فرد n حداکثر به میزان

$$\frac{1-(n-1)\epsilon}{n} + (n-1)\epsilon = 1/n + \epsilon(n-1-\frac{n-1}{n}) \le 1/n + n\epsilon.$$

است. بنابراین، بهترین نسبت WMMS که می‌توان تضمین کرد برابر است با

$$\frac{1/n+n\epsilon}{1-(n-1)\epsilon}. \tag{۴.۵}$$

عبارت (۴.۵) می‌تواند با انتخاب ϵهای کوچک به میزان دلخواه به $1/n$ نزدیک شود. ■

قضیه ۲.۵ حد بالای $1/n-$ WMMS را برای حالت سهم‌های نابرابر اثبات می‌کند. حال در قضیه ۳.۵ نشان می‌دهیم که این حد محکم است. الگوریتم ۶ از یک روش حریصانه ساده که در باطن شبیه روش ارائه شده توسط آماناتیدیس [۴] است استفاده می‌کند. روش کلی این الگوریتم به این صورت است که افراد را بر اساس سهم هایشان مرتب می‌کنیم و سپس از هر فرد سوال می‌کنیم که از مجموعه اشیای باقی مانده، شیء با ارزش بیشینه را برای خود انتخاب کند و این کار را تا زمانی که هیچ شیء ی باقی نماند ادامه می‌دهیم.

قضیه ۳.۵. *الگوریتم ۶ یک تخصیص $1/n-$ WMMS را تضمین می‌کند.*

اثبات. اگر تعداد اشیا کمتر از تعداد افراد باشد، قضیه بدیهی است. بنابراین، فرض کنید $m \geq n$. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که افراد بر اساس ترتیب نزولی سهم‌های خود مرتب شده‌اند. یعنی $e_۱ \geq e_۲ \ldots \geq e_n$. هدف، این است که نشان دهیم که به ازای هر فرد i، او حداقل به اندازه $۱/n - \mathsf{WMMS}_i$ توسط الگوریتم ۶ دریافت می‌کند. فرض کنید که تخصیص بهینه برای فرد i برابر با $B^* = \langle B^*_۱, \ldots, B^*_n \rangle$ باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که اشیا بر اساس ترتیب نزولی ارزششان برای فرد i مرتب شده‌اند، یعنی

$$V_i(\{m_۱\}) \geq V_i(\{m_۲\}) \geq \ldots \geq V_i(\{m_{|\mathcal{M}|}\}).$$

ما اشیای $m_۱$، $m_۲$، ...و $m_{i-۱}$ را اشیای سنگین برای فرد i می‌نامیم. فرض کنید H مجموعه اشیای سنگین برای فرد i باشند. از آنجا که سهم افراد به صورت مرتب شده است، به ازای فرد j و j' با فرض $e_j > e_{j'}$ خواهیم داشت:

$$V_i(B^*_j) \geq V_i(B^*_{j'}). \tag{۵.۵}$$

حال، هدف این است که نشان دهیم $V_i(B^*_i) \leq V_i(\mathcal{M} \setminus H)$ و سپس با استفاده از این نامساوی، تضمین الگوریتم را اثبات کنیم. چون $B^*_i \subseteq \mathcal{M}$، اگر $B^*_i \cap H = \emptyset$ باشد، داریم $V_i(B^*_i) \leq V_i(\mathcal{M} \setminus H)$. بنابراین فرض کنید $B^*_i \cap H \neq \emptyset$. حال فرد k' را که $۱ \leq k' < i$ و $B^*_{k'} \cap H = \emptyset$ است در نظر بگیرید. با توجه به نامساوی (۵.۵)، فرد k' میزان سهم بیشتری نسبت به فرد i دارد و بنابراین $V_i(B^*_{k'}) \geq V_i(B^*_i)$. این نتیجه می‌دهد که $B^*_{k'}$ دارای ارزش حداقل $V_i(\{m_k\})$ برای فرد i است، در حالی که همه اشیای $B^*_{k'}$ داخل $\mathcal{M} \setminus H$ هستند. بنابراین، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $V_i(B^*_i) \leq V_i(\mathcal{M} \setminus H)$. همچنین، اشیا بر اساس ارزششان برای فرد i به صورت نزولی از $m_۱$ تا $m_{|\mathcal{M}|}$ مرتب شده‌اند که این یعنی

$$V_i(\{m_i\}) + V_i(\{m_{n+i}\}) + V_i(\{m_{۲n+i}\}) + \ldots \geq V_i(\mathcal{M} \setminus H)/n.$$

ارزش شیء l ام تخصیص یافته به فرد i توسط الگوریتم حداقل به میزان $V_i(\{m_{(l-۱)n+i}\})$ است. بنابراین، اشیای تخصیص یافته به فرد i دارای ارزش حداقل

$$V_i(\{m_i\}) + V_i(\{m_{n+i}\}) + V_i(\{m_{۲n+i}\}) + \ldots$$

برای او هستند که این مقدار حداقل برابر با

$$V_i(\mathcal{M} \setminus H)/n \geq V_i(B^*_i)/n \geq ۱/n - \mathsf{WMMS}_i$$

خواهد بود. ■

۳.۵ یک تخصیص برای حالت خاص

در بخش ۲.۵ حد محکم $1/n-$ WMMS را برای مسئله تخصیص منصفانه در حالت سهم‌های نابرابر ارائه دادیم. با این وجود، بعید است که در واقعیت با چنین مثال‌هایی مواجه شویم. در این بخش، یک حالت محدودتر را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که در این حالت محدود، تخصیص $1/2-$ WMMS امکان‌پذیر است. در این حالت محدود، فرض ما بر این است که ارزش هر شیء m_j برای هر فرد i حداکثر به میزان WMMS_i است. مشاهده ۴.۵ نشان می‌دهد که این فرض می‌تواند ارزشمند باشد.

مشاهده ۴.۵. *اگر $V_i(m_j) \geq \text{WMMS}_i$ باشد، به سود فرد i است که مطلوبیت خود را برای این شیء برابر با بینهایت اعلام کند. این به خاطر این است که مقدار WMMS ممکن است در این حالت افزایش یابد و اشیای بیشتری را در این حالت دریافت کند. زیرا مقدار WMMS او افزایش می‌یابد، و این فرد تنها با دریافت این شیء راضی خواهد شد.*

در این بخش، یک الگوریتم برای تخصیص $1/2-$ WMMS برای حالت محدود معرفی شده ارائه خواهیم کرد. به یاد بیاورید که برای حالتی که سهم‌ها برابر است، روش پر کردن کیف که در بخش قبل معرفی شد، سهم $1/2-$ WMMS را برای همه افراد تضمین خواهد کرد. در این بخش، یک نوع هوشمندانه‌تر از روش پر کردن کیف را ارائه می‌کنیم. در این روش، با یک کیف خالی شروع می‌کنیم. در هر مرحله، الگوریتم ما اشیایی را به افراد مختلف تخصیص می‌دهد. در واقع یک شیء را به یک نفر در هر مرحله از الگوریتم تخصیص می‌دهیم و این کار را تا زمانی که هر فرد i سهمی به اندازه حداقل $1/2-\text{WMMS}_i$ ببرد ادامه می‌دهیم. برای این کار، در هر مرحله از الگوریتم، ابتدا هر فرد i یک مجموعه نماینده از اشیا تولید می‌کند، به طوری که m_j داخل مجموعه نماینده فرد i است، اگر مقدار $V_i(\{m_j\})/V_i(\mathcal{M})F^i_{A^*}$ بیشترین مقدار ممکن بین تمام افراد راضی نشده باشد. سپس الگوریتم یک فرد راضی نشده i و شیء m_j متعلق به اشیای نماینده این فرد را که مقدار $V_i(\{m_j\})/V_i(\mathcal{M})F^i_{A^*}$ را بین تمام افراد ناراضی و اشیای داخل مجموعه نماینده‌شان بیشینه می‌کند را انتخاب و آن شیء را به آن فرد تخصیص می‌دهد.

قبل از این که اثبات کنیم که الگوریتم ۷ یک تخصیصی $1/2-$ WMMS را تضمین می‌کند، در ابتدا یک لم کمکی اثبات می‌کنیم که نشان می‌دهد در الگوریتم ۷ هیچ فرد i بیشتر از WMMS_i دریافت نمی‌کند.

لم ۵.۵. *الگوریتم ۷ به هیچ فرد i بیش از مقدار WMMS_i تخصیص نمی‌دهد.*

اثبات. اولا دقت کنید که الگوریتم، به هیچ فرد راضی شده‌ای شیء ی تخصیص نمی‌دهد. بنابراین، هر فرد راضی شده i کمتر از $1/2-\text{WMMS}_i$ از اشیا داخل A_i را قبل از آن که شیء آخر را بگیرد در اختیار دارد.

الگوریتم ۷: تخصیص $\mathsf{WMMS} - ۱/۲$

Input: $\mathcal{N}$، $\mathcal{M}$، valuation functions $V_۱, \ldots, V_n$، and entitlements $e_۱, \ldots, e_n$ (without loss of generality، sorted in descending order).
Output: Allocation $A = A_۱, \ldots, A_n$.

while $\mathcal{M} \neq \emptyset$ *and* $\exists A_i$ *where* $V_i(A_i) < ۱/۲ - \mathsf{WMMS}_i$ **do**
  define candidate set $C_i = \emptyset$ for each agent i. **for** $m_j \in \mathcal{M}$ **do**
    add m_j to C_i where $V_i(\{m_j\})/V_i(\mathcal{M})F^i_{A^*}$ is maximum among all of the unsatisfied agents.
  Choose unsatisfied agent i and item m_j in its candidate set which maximize $V_i(\{m_j\})/V_i(\mathcal{M})F^i_{A^*}$ among all of the unsatisfied agents and items in their candidate sets.
  Assign item m_j to agent i

حال، با برهان خلف، فرض کنید که الگوریتم به فرد i بیش از WMMS_i اعطا کند. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که آخرین شیء ی که به فرد i تعلق گرفته m_j باشد. از آنجا که قبل از تخصیص m_j به فرد i، ارزش اشیای متعلق به او کمتر از $\mathsf{WMMS}_i - ۱/۲$ بوده است، ارزش شیء m_j برای فرد i بیشتر از $\mathsf{WMMS}_i - ۱/۲$ است. چون $V_i(m_j) \leq \mathsf{WMMS}_i$ است، قبل از تخصیص m_j به فرد i داریم $A_i \neq \emptyset$. از آنجا که $V_i(m_j)$ بیشتر از ارزش همه اشیای تخصیص یافته به فرد i است، زمانی که سایر اشیا را به فرد i تخصیص می‌دادیم، m_j شیء نماینده برای فرد i نبوده است. بنابراین، m_j شیء نماینده هیچ فرد i' دیگری نیز نبوده است. بنابراین،

$$V_{i'}(\{m_j\})/V_{i'}(\mathcal{M})F^{i'}_{A^*} \geq V_i(\{m_j\})/V_i(\mathcal{M})F^i_{A^*}.$$

چون این مقدار بیشتر از ارزش مجموع سایر اشیا در A_i است، الگوریتم ابتدا m_j را به فرد i' تخصیص می‌دهد. ■

حال، با استفاده از لم ۵.۵ نشان می‌دهیم که الگوریتم ما یک تخصیص $\mathsf{WMMS} - ۱/۲$ را تضمیم می‌کند.

قضیه ۶.۵. *در حالتی که به ازای هر فرد i و هر شیء m_j داشته باشیم $V_i(m_j) \leq \mathsf{WMMS}_i$، الگوریتم ۷ یک تخصیص $\mathsf{WMMS} - ۱/۲$ را تضمین می‌کند.*

اثبات. مشخص است که اگر الگوریتم تمام افراد را راضی کند، تقریب مورد نظر تضمین می‌شود. حال، برای فرض خلف تصور کنید که یک فرد i در انتهای الگوریتم باقی‌مانده است. به ازای هر شیء m_j تعریف می‌کنیم

$$v'_{m_j} = V_{i'}(m_j)/V_{i'}(\mathcal{M})F^{i'}_{A^*}$$

که در آن فرد i' گیرنده شیء m_j در تخصیص است. چون با توجه به الگوریتم، v'_{m_j} بیشینه است، و فرد i راضی

نشده است، داریم

$$V_i(m_j)/V_i(\mathcal{M})F^i_{A^*} \leq V_{i'}(m_j)/V_{i'}(\mathcal{M})F^{i'}_{A^*}. \tag{۶.۵}$$

لم ۵.۵ نتیجه می‌دهد که $\sum_{m_j} v'_{m_j} \leq ۱$. به علاوه، چون حداقل یک فرد راضی نشده باقی‌مانده است، داریم:

$$\sum_{m_j} v'_{m_j} < ۱. \tag{۷.۵}$$

نامساوی (۶.۵) به همراه نامساوی (۷.۵) نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{m_j} V_i(m_j)/V_i(\mathcal{M})F^i_{A^*} < ۱. \tag{۸.۵}$$

نهایتا، نامساوی (۸.۵) نتیجه می‌دهد: $\sum_{m_j} V_i(m_j) < V_i(\mathcal{M})F^i_{A^*}$ که تناقض است. ■

۴.۵ حالت تصادفی

در بخش ۲.۵ با استفاده از یک مثال نقض نشان دادیم که هیچ تخصیصی بهتر از $۱/n-$WMMS را نمی‌توان تضمین کرد. با این وجود، بعید است که ساختاری که در این مثال نقض ارائه شد در دنیای واقعی رخ دهد [۳۶]. در این بخش نشان می‌دهیم که در حالتی که مقدار کمی از پارامترها تصادفی باشند، تخصیص WMMS با احتمال بالایی وجود دارد.

در نظر گرفتن توابع ارزش تصادفی در مسائل مربوط به تخصیص منصفانه کاری رایج است، زیرا که بسیاری از نمونه‌های واقعی رفتاری مشابه توزیع‌های تصادفی دارند [۲۴، ۵۵، ۴، ۳۱]. مدل احتمالاتی که در کارهای قبلی مورد استفاده قرار گرفته به این صورت است: هر فرد i یک توریع احتمالاتی $\mathcal{D}_i$ بر روی $[۰,۱]$ دارد و به ازای هر شیء m_j، مقدار $V_i(\{m_j\})$ به صورت تصادفی از $\mathcal{D}_i$ انتخاب می‌شود. . آمانیتیدیس و همکاران [۴] وجود تخصیص MMS برای حالت خاصی که $\mathcal{D}_i = U(۰,۱)$ باشد را اثبات کردند، که در آن $U(۰,۱)$ تابع استاندارد یکنواخت با کمینه صفر و بیشینه ۱ است.

کروکاوا، پروکاچیا و ونگ [۵۵] تضمین سهم بیش‌کمینه را برای حالتی که $\mathcal{D}_i$ یک توزیع دلخواه با این شرط که به ازای یک ثابت c داشته باشیم $\mathbb{V}[\mathcal{D}_i] \geq c$، بررسی کردند. بخش اصلی از اثبات آنها مشابه روش دیکرسون و همکاران [۳۱] است، که در مقاله خود وجود یک تخصیص بدونِ رشک برای هر توزیع دلخواه را اثبات کرده‌اند.

در این رابطه، دو مدل مختلف احتمالاتی را در [۳۶] در نظر گرفته‌ایم. مدل اول ما مشابه مدلی است که توسط کروکاوا و همکاران ارائه شد [۵۵] ، با این تفاوت که محدودیت $\mathbb{V}[\mathcal{D}_i] \geq c$ را حذف می‌کنیم. این مدل را مدل افراد تصادفی نام گذاری می‌کنیم. در مدل دوم، هر شیء m_i یک توزیع تصادفی $\mathcal{D}_i$ دارد و به ازای هر فرد j، مقدار $V_j(\{m_i\})$ به صورت تصادفی از $\mathcal{D}_i$ گرفته شده است. برای مدل دوم، نام اشیای تصادفی را انتخاب می‌کنیم. باور ما این است که این مدل نسبت به مدل افراد تصادفی واقع بینانه‌تر است، زیرا که مدل اول هیچ تفاوتی بین اشیا قائل نمی‌شود. هیچ‌کدام از کارهای قبلی که در بالا به آن اشاره شد این مدل را در نظر نگرفته‌اند. به دلیل کمبود فضا، در این رساله ما تنها مدل اشیای تصادفی را تحلیل می‌کنیم. برای مشاهده تحلیل مربوط به مدل افراد تصادفی، به نسخه اصلی مقاله [۳۶] مراجعه نمایید.

برای اثبات وجود تخصیص WMMS، از نامساوی هافدینگ [1] استفاده می‌کنیم. قضیه ۷.۵ یک فرم کلی از این نامساوی را نشان میدهد [۵۲].

قضیه ۷.۵ (فرم کلی قضیه هافدینگ (۱۹۶۳))**.** *فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی باشند که از بازه $[0, 1]$ انتخاب شده‌اند. میانگین تجربی این متغیرها را با $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ نشان می‌دهیم. در این صورت، نامساوی زیر برقرار است:*

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - E(\bar{X})| \geq t) \leq 2e^{-2nt^2} \tag{۹.۵}$$

با توجه به قضیه ۷.۵، فرض کنید $X = n\bar{X} = \sum_i X_i$ و فرض کنید $\mu = n \times E(\bar{X})$. با توجه به نامساوی (۹.۵) داریم:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq nt) \leq 2e^{-2nt^2}. \tag{۱۰.۵}$$

با قرار دادن $nt = \delta\mu$ می‌توانیم عبارت (۱۰.۵) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \delta\mu) \leq 2e^{\frac{-2(\delta\mu)^2}{n}} \tag{۱۱.۵}$$

مدل اشیای تصادفی

همان‌طور که اشاره شد، در مدل اشیای تصادفی، هر شیء m_i یک توزیع تصادفی $\mathcal{D}_i$ دارد و ارزش هر فرد j برای شیء m_i به صورت تصادفی از توزیع $\mathcal{D}_i$ انتخاب می‌شود. برای این مدل، ما قضیه ۸.۵ را اثبات می‌کنیم. این قضیه بیان می‌کند که برای مقدار به اندازه کافی بزرگ m با احتمال بسیار بالا یک تخصیص $(1-\epsilon)$ − WMMS وجود دارد.

[1] Hoeffding Inequality

قضیه ۸.۵. *فرض کنید به ازای هر فرد i داشته باشیم $\mathbb{E}(\mathcal{D}_i) > c$، که درآن c یک مقدار ثابت است. در این صورت، به ازای هر $0 < \epsilon < 1$، یک مقدار $m' = m'(c, \epsilon, n, e_1, ..., e_n)$ وجود دارد که اگر $m \geq m'$ باشد، آنگاه یک تخصیص $(1-\epsilon) - \mathsf{WMMS}$ با احتمال زیاد وجود دارد.*

در ادامه این بخش، قضیه ۸.۵ را ثابت می‌کنیم. در ابتدا، در لم ۷.۶ وجود یک تخصیص را ثابت می‌کنیم که به هر فرد i یک مجموعه اشیا با ارزش حداقل $\mathsf{WMMS}_i - M_i$ اعطا می‌کند، که در آن

$$M_i = \max_j(V_i(\{m_j\})).$$

ایده اصلی در اثبات این قضیه از [۱۴] الهام گرفته شده است. ما مسئله تخصیص منصفانه با سهم‌های نابرابر را می‌توانیم با استفاده از برنامه صحیح زیر نشان دهیم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_j \in \mathcal{M}} V_i(\{m_j\}) \cdot f_{i,j} \geq V(\mathcal{M}) \cdot e_i && \forall_{i \in \mathcal{N}} \\
&\sum_{i \in \mathcal{N}} f_{i,j} = 1 && \forall_{m_j \in \mathcal{M}} \\
&f_{i,j} \in \{0, 1\}
\end{aligned} \tag{۱۲.۵}$$

در برنامه خطی (۱۲.۵) متغیر $f_{i,j}$ تعیین می‌کند که آیا شیء m_j به فرد i تعلق گرفته است یا خیر. با در نظر گرفتن این واقعیت که $V_i(\mathcal{M}) \cdot e_i$ یک حد بالای بدیهی برای مقدار WMMS_i است، هر پاسخ برای برنامه صحیح ۱۲.۵ یک پاسخ قابل قبول برای مسئله تخصیص با سهم‌های نابرابر است. با سست کردن محدودیت دوم و سوم، می‌توانیم برنامه صحیح ۱۲.۵ را تبدیل به برنامه خطی ۱۳.۵ کنیم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_j \in \mathcal{M}} V_i(\{m_j\}) \cdot f_{i,j} \geq V(\mathcal{M}) \cdot e_i && \forall_{i \in \mathcal{N}} \\
&\sum_{i \in \mathcal{N}} f_{i,j} \leq 1 && \forall_{m_j \in \mathcal{M}} \\
&f_{i,j} \geq 0
\end{aligned} \tag{۱۳.۵}$$

به ازای هر پاسخ قابل قبول $\mathcal{A}$ برای برنامه خطی ۱۳.۵ یک گراف دوبخشی $G_{\mathcal{A}}\langle I, J, E\rangle$ می‌سازیم که در آن $I = \{1, 2, ..., n\}$ و $J = \{1, 2, .., m\}$ اشاره به مجموعه افراد و اشیا دارند. یک یال i, j در این گراف وجود دارد، اگر $f_{i,j} > 0$ باشد. حال مشابه روش بزاکوا و دانی [۱۴]، ما لم زیر را اثبات می‌کنیم:

لم ۹.۵. *یک پاسخ $\mathcal{A}'$ برای برنامه خطی ۱۳.۵ وجود دارد، که در آن $G_{\mathcal{A}}$ یک شبه جنگل است (یعنی هر مولفه از آن یا درخت است و یا یک درخت با یک یال اضافی).*

اثبات. فضای محدب مربوط به پاسخ‌های قابل قبول برنامه خطی ۱۳.۵ توسط $mn+m+n$ نامساوی تعریف می‌شود. همچنین mn متغیر $f_{i,j}$ داریم و بنابراین هر پاسخی که در یک راس از این ناحیه محدب قرار گرفته

باشد، حداقل mn عدد از این نامساوی‌ها را به صورت مساوی برقرار می‌کند و حداکثر $m+n$ متغیر ناصفر در این پاسخ‌ها وجود دارد. با استفاده از همان روشی که در [۱۴] استفاده شده است، به راحتی می‌توان نشان داد که اگر A' اشاره به یک پاسخ در راس این فضای محدب داشته باشد، آنگاه $G_{A'}$ یک شبه درخت است. ■

راه حل با خصوصیات لم ۹.۵ را با نام راه حل محدود نام‌گزاری می‌کنیم. در [۱۴] نشان داده شده است که هر راه حل محدود برای برنامه خطی ۱۳.۵ می‌تواند تبدیل به یک راه حل برای برنامه صحیح ۱۲.۵ شود، که در آن هر فرد i حداکثر یک شیء m_j را که $f_{i,j} > ۰$ است، از دست بدهد.

لم ۱۰.۵. *یک تخصیص وجود دارد که در آن هر فرد i حداقل به میزان $\mathsf{WMMS}_i - \max_j V_i(\{m_j\})$ سود می‌برد.*

اثبات. ناحیه جواب‌های قابل قبول برای برنامه خطی ۱۳.۵ ناتهی است، چرا که حداقل یک پاسخ در آن وجود دارد: $f_{i,j} = \frac{۱}{e_i}$ به ازای هر فرد a_i و شیء m_j. بنابراین، یک پاسخ محدود نیز برای برنامه خطی ۱۳.۵ وجود دارد، و با استفاده از روش مشابه [۱۴] این پاسخ می‌تواند تبدیل به یک پاسخ برای برنامه صحیح ۱۲.۵ شود، به گونه‌ای که هر فرد حداکثر یک شیء را از دست دهد. ■

حال نشان می‌دهیم که مقدار $m'_i = m'_i(c, \epsilon, n, e_۱, ..., e_n)$ وجود دارد، به‌گونه‌ای که اگر $m \geq m'_i$ باشد، آنگاه با احتمال حداقل $۱ - \frac{۱}{mn}$ خواهیم داشت $\mathsf{WMMS}_i \geq \frac{۱}{\epsilon}$. در نتیجه، هر زمان $m \geq \max(m'_۱, m'_۲, ..., m'_n)$ باشد، با احتمال حداقل

$$(۱ - \frac{۱}{mn})^n \geq ۱ - \frac{n}{nm} = ۱ - \frac{۱}{m}$$

به ازای هر فرد i داریم: $\mathsf{WMMS}_i \geq \frac{۱}{\epsilon}$.

با توجه به لم ۷.۶ ، یک تخصیص وجود دارد که در آن هر فرد i حداقل به میزان

$$\begin{aligned}\mathsf{WMMS}_i - \max_j V_j(\{m_j\}) &\geq \mathsf{WMMS}_i - ۱ \\ &\geq \mathsf{WMMS}_i(۱ - \frac{۱}{\mathsf{WMMS}_i}) \\ &\geq \mathsf{WMMS}_i(۱ - \epsilon)\end{aligned}$$

سود می‌برد. بنابراین، با احتمال حداقل $۱ - \frac{۱}{m}$، یک تخصیص $\mathsf{WMMS} - (۱ - \epsilon)$ وجود خواهد داشت.

لم ۱۱.۵. *فرض کنید که به ازای هر فرد j داشته باشیم $\mathbb{E}(\mathcal{D}_j) > c$، که در آن c یک ثابت مثبت است. در*

این صورت به ازای هر $1 > \epsilon > 0$، یک $m'_i = m'_i(c, \epsilon, n, e_1, ..., e_n)$ وجود دارد که اگر $m \geq m'_i$ باشد، آنگاه با احتمال حداقل $1 - \frac{1}{mn}$ داشته باشیم $\mathsf{WMMS}_i \geq \frac{1}{\epsilon}$.

اثبات. اگر یک تقسیم‌بندی $\pi = m_1, m_2, ..., m_n$ از اشیای $\mathcal{M}$ وجود دادشته باشد، به گونه‌ای که به ازای هر فرد j داشته باشیم $V_i(m_j) \geq \frac{1}{\epsilon e_i}$ آنگاه:

$$\mathsf{WMMS}_i \geq e_i \cdot \min(\frac{1}{\epsilon e_i e_1}, ..., \frac{1}{\epsilon e_i e_n}) \geq \min(\frac{1}{\epsilon e_1}, ..., \frac{1}{\epsilon e_n}) \geq \frac{1}{\epsilon}. \quad (۱۴.۵)$$

قرار دهید $m = \frac{\alpha}{\epsilon}$. آنگاه به ازای هر شیء m_k و هر فرد j، این شیء را به این فرد با احتمال e_j اعطا می‌کنیم. فرض کنید $X_{j,k}$ یک متغیر تصادفی باشد که با احتمال e_j مقدار $V_i(\{m_k\})$ و در غیر این صورت مقدار ۰ می‌گیرد. داریم $\mathbb{E}[X_{j,k}] > \frac{c}{e_j}$. فرض کنید $X_j = \sum_{k=1}^{m} X_{j,k}$. با قرار دادن $nt = \gamma$ می‌توانیم عبارت (۱۰.۵) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \gamma) \leq 2e^{\frac{-2\gamma^2}{n}} \quad (۱۵.۵)$$

مقدار $\mathbb{E}(X_j)$ حداقل به میزان $\frac{\alpha c}{\epsilon e_j}$ خواهد بود. با توجه به نامساوی (۱۵.۵) خواهیم داشت:

$$P(|X_j - \mathbb{E}(X_j)| \geq \frac{\alpha c}{\epsilon e_j} - \frac{1}{\epsilon e_i}) \leq 2e^{\frac{-2\epsilon}{\alpha}(\frac{\alpha c}{\epsilon e_j} - \frac{1}{\epsilon e_i})^2}$$
$$\Rightarrow P(|X_j - \mathbb{E}(X_j)| \geq \frac{\alpha c}{\epsilon e_j} - \frac{1}{\epsilon e_i}) \leq 2e^{\frac{-2}{\epsilon\alpha}(\frac{\alpha c}{e_j} - \frac{1}{e_i})^2}$$

فرض کنید α_j مقداری باشد که $P(|X_j - \mathbb{E}(X_j)| \geq \frac{\alpha_j c}{\epsilon e_j} - \frac{1}{\epsilon e_i}) \leq \frac{1}{mn^2}$. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
&2e^{\frac{-2}{\epsilon\alpha_j}(\frac{\alpha_j c}{e_j} - \frac{1}{e_i})^2} \leq \frac{1}{mn^2} \\
&\Rightarrow 2e^{\frac{-2}{\epsilon\alpha_j}(\frac{\alpha_j c}{e_j} - \frac{1}{e_i})^2} \leq \frac{\epsilon}{\alpha_j n^2} \\
&\Rightarrow \frac{2}{\epsilon\alpha_j}(\frac{\alpha_j c}{e_j} - \frac{1}{e_i})^2 \geq ln(\frac{2\alpha_j n^2}{\epsilon}) \\
&\Rightarrow \frac{2\alpha_j c^2}{\epsilon e_j^2} + \frac{2}{\epsilon\alpha_j e_i^2} - \frac{4c}{\epsilon e_i e_j} \geq \ln(\frac{2\alpha_j n^2}{\epsilon}) \\
&\Rightarrow \frac{2\alpha_j c^2}{\epsilon e_j^2} + \frac{2}{\epsilon\alpha_j e_i^2} - ln(\alpha_j) \geq \frac{4c}{\epsilon e_i e_j} + \ln(\frac{2n^2}{\epsilon})
\end{aligned}$$

چون بخش سمت راست نامساوی مقدار ثابتی است، و سمت چپ یک تابع صعودی (بر روی دامنه خود) است، ما می‌توانیم یک مقدار α'_j پیدا کنیم، به گونه‌ای که هر زمان $\alpha_j \geq \alpha'_j$ باشد، این رابطه برقرار باشد. بنابراین، هر زمان که $\alpha_j \geq \alpha'_j$ باشد، با احتمال حداقل $\frac{۱}{mn^۲} - ۱$ داریم $V_i(m_j) \geq \frac{۱}{\epsilon e_i}$. بنابراین، با انتخاب یک مقدار مناسب α به گونه‌ای که به ازای همه $j \in \mathcal{N}$ داشته باشیم $\alpha \geq \alpha'_j$، مقدار WMMS_i با احتمال حداقل $\frac{۱}{mn} - ۱ \geq ^n(\frac{۱}{mn^۲} - ۱)$ کمتر از $\frac{۱}{\epsilon}$ نخواهد بود. ■

۵.۵ نتیجه گیری

در این بخش، به بررسی مسئله تقسیم منصفانه، زمانی که افراد سهم‌های متفاوتی دارند پرداختیم. تعریف اصلی معیار سهم بیش‌کمینه، برای حالتی طراحی شده است که همه افراد دارای سهم‌های برابر هستند و ما تعریف آن را برای حالت سهم‌های نابرابر گسترش دادیم. همچنین نشان دادیم که بر خلاف حالت متقارن، زمانی که سهم‌ها نابرابر باشد، پیدا کردن یک تخصیص که تقریبا WMMS باشد همیشه امکان پذیر نیست. به بیان دیگر، نشان دادیم که بهترین تقریبی که می‌توان در این حالت تضمین کرد، $۱/n -$ WMMS است و این تخصیص با استفاده از یک روش ساده به دست آورد.

با توجه به نتایج تجربی که حاکی از این است که در واقعیت، با احتمال زیاد می‌توان یک تخصیص WMMS پیدا کرد، طبیعی است که مسئله را در حالت‌های محدود که شامل مثال‌های نقض ارائه شده نیست بررسی کنیم. به همین خاطر، مسئله را با در نظر گرفتن دو محدودیت بررسی کردیم و نشان دادیم که در این حالت‌ها، تضمین‌های بسیار بهتری ممکن است. در ابتدا نشان دادیم که اگر حداکثر ارزش اشیا برای افراد محدود به میزان سهم بیش‌کمینه آنها باشد، با استفاده از یک روش حریصانه می‌توان $۱/۲ -$ WMMS را تضمین کرد. در ادامه آن، حالتی را در نظر گرفتیم که ارزش اشیا برای افراد از یک توزیع مشخصی به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. برای این حالت، نشان دادیم که با احتمال بالایی یک تخصیص WMMS وجود دارد.

فصل ۶

ساز و کارهای بدونِ رشک با تعداد برش کم

در این بخش، به سراغ حالتی می‌رویم که با یک منبع تقسیم‌پذیر مواجه هستیم و هدف تقسیم بدون‌ِرشک کیک است. معیار بدون‌رشک بودن، یکی از مهم‌ترین معیارها برای سنجش میزان انصاف در این حالت است [۶۶]. به یاد آورید که یک تقسیم کیک بدونِ رشک است، اگر هر بازیکن [۱] سهم متعلق به خود را به سهم دیگران ترجیح دهد. این معیار به صورت گسترده در ادبیات تقسیم منصفانه مورد مطالعه قرار گرفته است. بسیاری از این مطالعات، در صدد این هستند که علاوه بر رعیات معیار بدون‌رشک بودن، معیارهای دیگری را نیز رعایت کنند. به عنوان نمونه، کم بودن تعداد برش‌ها، صادقانه بودن تقسیم، بیشینه کردن سود اجتماعی، بهینه پرتو بودن تخصیص، اندازه قطعات و پیوستگی قطعات از جمله معیارهایی بوده‌اند که در کنار بدون‌رشک بودن مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۲۷، ۷۲، ۷۳، ۸، ۷]. از میان این خصوصیات، دو معیار تعداد برش و صادقانه بودن دو مفهومی هستند که در این فصل، در کنار معیار بدون‌رشک بودن مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا به صورت خلاصه در مورد اهمیت این دو معیار صحبت می‌کنیم.

یافتن روش‌های تقسیم کیک با تعداد برش کم به طور متعدد در مطالعات مختلف بررسی شده است [۷۲، ۹، ۷۳، ۱۲]. در برخی از شرایط، اعمال برش می‌تواند همراه با هزینه باشد. برای نمونه، فرض کنید که کیک مدلی از زمان پردازش است که باید به طور منصفانه در بین کارهای مختلف تقسیم شود. در این حالت، هر تغییر کار یک سربار به سیستم تحمیل می‌کند و کمینه کردن تعداد تغییر کارها معادل کمینه کردن تعداد برشها بر روی کیک است. به علاوه، ممکن است بازیکن‌ها برای قطعات بسیار کوچکی که در اثر ازدیاد تعداد برش‌ها ایجاد می‌شوند ارزشی قائل نشوند. کاراگیانیس و همکاران [۲۵] این چالش را با مثالی از تبلیغات مطرح کرده‌اند: تصور کنید که کیک به زمان تبلیغات اشاره دارد و مسئله تخصیص این زمان به تبلیغ محصولات مختلف است. در این حالت، تعداد زیاد برش‌ها می‌تواند منجر به بازه‌های بسیار کوچک زمان شود که مناسب تبلیغات نیست.

[۱] در این فصل، به خاطر رفتار راهبردی افراد از اصطلاح بازیکن استفاده می‌کنیم.

در تخصیص‌هایی که شامل تعداد کمی برش هستند، احتمال وقوع چنین شرایطی کمتر است.

معیار دیگری که می‌تواند در تعیین کیفیت یک تقسیم‌بندی اثرگذار باشد، صادقانه بودن روش تقسیم است. در یک سازوکار تقسیم‌بندی صادقانه، بازیکن‌هایی که در تقسیم‌بندی مشارکت دارند، انگیزه‌ای برای اعلام غیرصادقانه توابع مطلوبیت خود ندارند. رفتار صادقانه بازیکنان، باعث شفاف شدن پارامترهای مسئله شده و امکان تحلیل آن را ایجاد می‌کند. مسئله طراحی سازوکارهای صادقانه تقسیم کیک، به وفور در سال‌های اخیر مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۷، ۸، ۲۰، ۶۱]. مشابه انصاف، معیارهای مختلفی برای سنجش صادقانه بودن الگوریتم‌ها ارائه شده است. این معیارها شامل صادقانه ضعیف، صادقانه قوی یا ضد استراتژی بودن و صادقانه‌گروهی بودن است. تمرکز ما در این فصل، بر روی معیار صادقانه قوی است.

تعریف ۱.۶. *یک الگوریتم تقسیم‌بندی صادقانه است، اگر برای هر فرد i، ارائه صادقانه تابع ارزشش برای او استراتژی غالب باشد. به عبارتی، مستقل از تابع ارزش سایر بازیکنان، بهترین رویکرد از طرف یک ارائه مقدار واقعی تابع مطلوبیتش باشد.*

به عنوان جمع‌بندی، در این بخش، به دنبال یافتن روشی برای تقسیم کیک هستیم، که خاصیت های زیر را به طور همزمان داشته باشد.

- روش تقسیم معیار بدون رشک بودن را تضمین کند.
- روش تقسیم صادقانه باشد. به عبارتی، هیچ بازیکنی نتواند با اعلام نادرست تابع مطلوبیت خود، میزان سود خود را افزایش دهد.
- تعداد برش‌هایی که روش ما بر روی کیک می‌زند، کم باشد.

دقت کنید که در حالت کلی، تضمین کردن هر کدام از این خواص به صورت مجزا نیز امری ساده نیست. در حال حاضر، بهترین حد بالایی که برای تقسیم بدون‌رشک کیک برای n نفر در حالت کلی ارائه شده است، حد $n^{n^{n^{n^{n^{n}}}}}$ است که توسط عزیز و مکنزی در سال ۲۰۱۶ ارائه شده است [۶]. همچنین، با وجود این که استرومکوئیست در سال ۱۹۸۰، وجود یک تقسیم بدون رشک کیک را در میان n بازیکن و با استفاده از $n-1$ برش ثابت کرد [۷۲]، ثابت شده است که پیدا کردن چنین تخصیصی در حالت کلی پی‌پد-سخت است [۵۸]. به علاوه، هیچ الگوریتم صادقانه‌ای برای حالت کلی توابع ارزش تا کنون ارائه نشده است. بنابراین، طبیعی است که مسئله خود را برای حالت محدودی از توابع مطلوبیت در نظر بگیریم. در این فصل، فرض ما این است که توابع مطلوبیت به صورت ثابت قطعه‌ای و تنها با یک پله هستند.

نتایج به دست آمده در این بخش

همان‌طور که اشاره شد، ما مسئله یافتن یک سازوکار تقسیم بدونِ رشک و صادقانه کیک با تعداد کمی برش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. منظور از صادقانه بودن، این است که بازیکن‌ها مستقل از توابع مطلوبیت بازیکن‌های دیگر، نباید با اعلام نادرست توابع مطلوبیت خود، سود بیشتری کسب کنند. همچنین منظور از تعداد کم برش، این است که تعداد برش‌ها $O(nm)$ باشد، که در آن m پیچیدگی (تعداد پله‌های) تابع مطلوبیت هر بازیکن است.

ایده اصلی روش ما یک روال ساده اما هوشمندانه است که *روال انبساط* نام دارد. بعد از شرح کامل این روال، مسئله را با حالتی شروع می‌کنیم که تابع مطلوبیت هر بازیکن ثابت قطعه‌ای و دارای تنها یک پله است و همچنین دارای یک خاصیت است که از آن با خاصیت ترتیبی یاد می‌کنیم. برای این حالت، الگوریتم EFISM را ارائه می‌کنیم، که یک الگوریتم چندجمله‌ای، بدونِ رشک و صادقانه است که کیک را با $n-۱$ برش تقسیم می‌کند (قضیه ۹.۶).

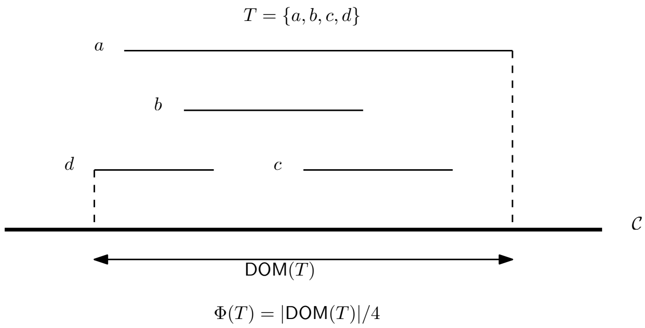
سپس، روال انبساط را با یک روال دیگر با نام *باز کردن قفل* همراه می‌کنیم. بر این اساس، روش EFSC را ارائه می‌کنیم، که یک الگوریتم چندجمله‌ای تقسیم بدونِ رشک است که کیک را حداکثر در $۲n-۲$ نقطه برش می‌دهد (قضیه ۱۸.۶). تا جایی که ما از آن مطلع هستیم، هیچ کار قبلی سعی در تقریب تعداد برش‌ها در یک مسئله تقسیم منصفانه نکرده است. به علاوه، با استفاده از نوع پیچیده‌تری از روش انبساط و باز کردن قفل، الگوریتم EFGISM را ارائه می‌دهیم که یک الگوریتم بازگشتی و چندجمله‌ای است که کیک را به صورت صادقانه و بدونِ رشک و با حداکثر $۲n-۲$ برش در بین بازیکن‌ها تقسیم می‌کند (قضیه ۲۵.۶).

نتایج اشاره شده در بالا، بخشی از نتایج مقاله ما در این رابطه [۶۸] است. در این مقاله، همچنین روش انبساط و باز کردن قفل‌ها را در عمل نیز ارزیابی می‌کنیم. برای ارزیابی، تعداد برش‌هایی که با استفاده از روش ما بر روی کیک تولید می‌شود را با جواب بهینه $(n-۱)$ مقایسه می‌کنیم. نکته جالب این است که تعداد برش‌های الگوریتم ما بسیار نزدیک به تعداد برش‌های بهینه است.

همچنین در این مقاله نشان می‌دهیم که روال انبساط و همچنین روال باز کردن قفل را می‌توان در زمان چندجمله‌ای پیاده‌سازی کرد.

۱.۶ پیش نیازهای این فصل

در طول این بخش، از عبارت بازه برای دو هدف استفاده می‌کنیم: توابع مطلوبیت و سهمی که به هر بازیکن تعلق می‌گیرد. برای وضوح بیشتر، نوع اول از بازه‌ها را با $\mathcal{I}$ و نوع دوم را با I نشان می‌دهیم. بنابراین، فرض این است



شکل ۱.۶: دامنه و چگالی

که بازه مربوط به تابع مطلوبیت فرد i برابر با $\mathcal{I}_i$ است. همچنین، برای راحتی، فرض می‌کنیم $\mathcal{I}_i = [\alpha_i, \beta_i]$ و به ازای هر بازه سهم I_i داریم $I_i = [a_i, b_i]$.

در این فصل، با $\mathcal{T}$ مجموعه بازه‌های مطلوبیت را نشان می‌دهیم. به عبارتی داریم $\mathcal{T} = \{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n\}$. برای یک مجموعه X از بازه‌ها، $\text{DOM}(X)$ را به عنوان کوچکترین بازه‌ای که شامل همه اعضای X است تعریف می‌کنیم. برای حالتی که هر تابع مطلوبیت شامل تنها یک بازه است، برای هر $T \subseteq \mathcal{T}$ داریم:

$$\text{DOM}(T) = [\min_{\mathcal{I}_j \in T} \alpha_j, \max_{\mathcal{I}_i \in T} \beta_i].$$

به علاوه، چگالی X را که با $\Phi(X)$ نشان می‌دهیم، به صورت $\lambda(X)/|X|$ تعریف می‌کنیم، که $\lambda(X)$ مقدار طولی از $\text{DOM}(X)$ است که حداقل با یک بازه از X پوشانده شده است. یک مجموعه X از بازه‌ها محکم است، اگر به ازای هر نقطه $x \in \text{DOM}(X)$، یک بازه I در X باشد، به گونه‌ای که $x \in I$.

به عنوان نمونه، در شکل ۱.۶ مجموعه T محکم است. برای یک مجموعه محکم T داریم:

$$\lambda(T) = |\text{DOM}(T)| = \max_{\mathcal{I}_i \in T} \beta_i - \min_{\mathcal{I}_j \in T} \alpha_j.$$

فرض این است که هر قطعه از کیک برای حداقل یک نفر ارزشمند است. به راحتی می‌توان نشان داد که این فرض بدون از دست دادن کلیت است.

این بخش را با ارائه یک مشاهده ساده پایان می‌دهیم.

مشاهده ۲.۶. *اگر رابطه $\frac{a+b}{c+d} = \frac{e}{f}$ برای مقدارهای مثبت و حقیقی a, b, c, d, e و f برقرار باشد، داریم:*

$$\frac{a}{c} \leq \frac{e}{f} \iff \frac{b}{d} \geq \frac{e}{f}.$$

بر اساس مشاهده ۲.۶ ، اگر T محکم نباشد، یک زیرمجموعه $T' \subset T$ وجود دارد که محکم است، و به علاوه $\Phi(T') \leq \Phi(T)$. از مشاهده ۲.۶ در اثبات لم‌های ۲۲.۶ و ۲۳.۶ استفاده خواهیم کرد.

۲.۶ روال انبساط

ابزار اصلی روش ما برای تقسیم کیک یک روال به نام روال انبساط است. این روال، تعدادی بازه که هر کدام متعلق به یک بازیکن است را به طور همزمان و در داخل بازه مطلوبیت آنها منبسط می‌کند. برای نشان دادن روال انبساط بر روی مجموعه T از بازه‌های ارزش، از $\mathsf{exp}(T)$ استفاده می‌کنیم. روال انبساط $\mathsf{exp}(T)$ با تخصیص یک بازه I_i با طول صفر و نقطه شروع a_i به هر کدام از $\mathcal{I}_i \in T$ آغاز می‌شود. به عبارت بهتر، به ازای هر $\mathcal{I}_i$ قرار می‌دهیم: $I_i = [a_i = \alpha_i, b_i = \alpha_i]$.

فرض کنید S مجموعه بازه‌ها باشد. ما بازه‌های متعلق به S را به صورت همزمان و از نقطه انتهایی منبسط می‌کنیم. این انبساط به گونه‌ای انجام می‌شود که دو خاصیت برای بازه‌ها برقرار بماند:

- انبساط برای همه بازه‌ها دارای سرعت یکسان باشد، به گونه‌ای که طول همه بازه‌ها یکسان بماند.
- بازه I_i همیشه داخل بازه $\mathcal{I}_i$ باقی بماند.

در طول انبساط، نقطه پایانی بازه I_i ممکن است با نقطه ابتدایی یک بازه I_j تصادم پیدا کند. در این حالت I_i نقطه ابتدایی بازه I_j را در طول انبساط به جلو هُل می‌دهد. این هُل دادن تا آخر روال ادامه پیدا می‌کند. اگر I_i بازه I_j را هُل دهد، می‌گوییم I_i به بازه I_j متصل شده است. دقت کنید که با شرایطی که روال را آغاز می‌کنیم، بازه‌ها با توجه به نقاط ابتدایی خود مرتب می‌مانند. در حالت خاصی که α_i برای دو بازیکن برابر است، بازیکنی که مقدار β_i کمتری دارد، زودتر ظاهر می‌شود.

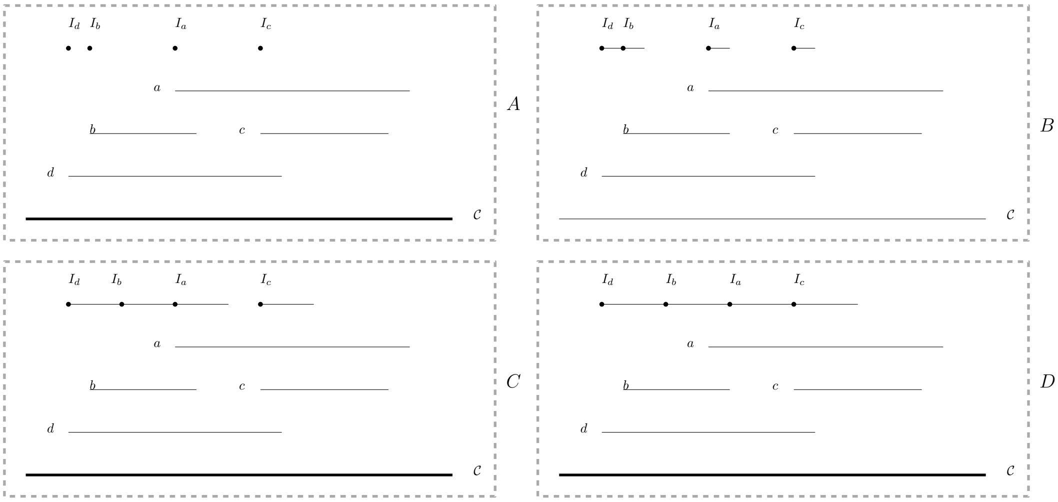
تعریف ۳.۶. *در طول انبساط، می‌گوییم بازه I_i قفل شده است، اگر نقطه انتهایی I_i به نقطه β_i برسد.*

تعریف ۴.۶. *یک زنجیر، دنباله‌ای از بازه‌های $I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, \ldots, I_{\sigma_k}$ است، با این خاصیت که به ازای هر $1 \le i < k$ بازه I_{σ_i} به بازه $I_{\sigma_{i+1}}$ متصل شده باشد. یک زنجیر قفل است، اگر I_{σ_k} قفل شده باشد.*

طول یک زنجیر معادل تعداد بازه‌هایی است که در آن زنجیر ظاهر شده‌اند. با توجه به تعریف، یک بازه تنها، یک زنجیر با طول یک است.

روال انبساط زمانی که یک بازه قفل شود متوقف می‌شود. این شرط تضمین می‌کند که خاصیت دوم همیشه برقرار است. در شکل ۲.۶ یک مثال از این روال را می‌توانید ببینید.

تعریف ۵.۶. *روال انبساط برای یک مجموعه T کامل است، اگر بازه‌های مربوط به این روال کل $\mathsf{DOM}(T)$ را بپوشانند. اگر روال قبل از پوشاندن کامل $\mathsf{DOM}(T)$ در اثر یک بازه قفل شده متوقف شود، انبساط ناکامل است.*



شکل ۲.۶: یک مثال از روال انبساط: (A) بازه‌ها در ابتدا هر کدام یک نقطه هستند، (B) I_d شروع به هُل دادن I_b می‌کند، (C) I_b شروع به هُل دادن I_a می‌کند و (D) I_b قفل می‌شود و روال انبساط پایان می‌یابد.

دقت کنید که از آنجا که طول بازه‌ها در طول انبساط برابر است، اگر یک روال انبساط به طور کامل پایان یابد، برای هر بازه I_i مربوط به انبساط داریم $|I_i| = \Phi(T)$.

مشاهده ۶.۶. *در طول روال انبساط، هر بازه I_i یا با یک بازه دیگر هُل داده می‌شود، یا نقطه ابتدایی آن کماکان بر روی α_i است.*

۳.۶ الگوریتم EFISM

در این بخش، فرض ما این است که توابع مطلوبیت هر بازیکن یک بازه است و بازه‌ها خاصیت زیر را دارند:

$$\forall i, j \qquad \alpha_i \leq \alpha_j \iff \beta_i \leq \beta_j. \tag{۱.۶}$$

به بیان دیگر، هیچ بازه‌ای زیربازه بازه دیگری نیست، به جز این که نقطه شروع و پایان آنها یکی باشد. به عنوان مثال، زمانی که همه توابع مطلوبیت دارای طول یکسان باشند، این خاصیت برقرار است. برای این حالت، یک الگوریتم چندجمله‌ای، بدونِ رشک و صادقانه ارائه می‌دهیم که کیک را در $n-۱$ نقطه برش می‌دهد. این الگوریتم را EFISM [۲] می‌نامیم.

ایده اصلی الگوریتم EFISM این است که به صورت مستمر بازه‌ها را منبسط و زنجیرهای قفل شده را حذف کنیم. فرض کنید $\mathcal{T}$ توابع مطلوبیتی باشد که اشاره به بازیکن‌های $\mathcal{N}$ دارد. الگوریتم را با صدا کردن $\exp(\mathcal{T})$ شروع می‌کنیم. همان‌طور که در بخش ۲.۶ گفته شد، این روال یا به صورت کامل و یا به صورت ناکامل پایان

[2] Envy-Free Interval Scheduling Mechanism

می‌یابد. در حالت اول، کار تمام است. در غیر این صورت، حداقل یک زنجیر قفل شده است. فرض کنید $\mathcal{C} = I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, \ldots, I_{\sigma_k}$ یک زنجیر قفل شده با طول بیشینه در S باشد. از آنجا که $\mathcal{C}$ بیشینه است، هیچ بازه‌ای I_{σ_1} را هُل نمی‌دهد. با توجه به مشاهده ۶.۶، نقطه a_{σ_1} دقیقا بر روی α_{σ_1} است. فرض کنید $\mathcal{T}$ مجموعه توابع مطلوبیتی باشد که اشاره به بازه‌های داخل $\mathcal{C}$ دارد.

لم ۷.۶. $\mathsf{DOM}(\mathcal{T}) = [\alpha_{\sigma_1}, \beta_{\sigma_k}]$.

اثبات. با توجه به ساختار روال انبساط، می‌دانیم که رابطه $a_{\sigma_1} \leq a_{\sigma_2} \leq \ldots \leq a_{\sigma_k}$ برقرار است. به علاوه، با توجه به عبارت (۱.۶) داریم:

$$b_{\sigma_1} \leq b_{\sigma_2} \leq \ldots \leq b_{\sigma_k}.$$

با توجه به این واقعیت که I_{σ_k} قفل شده است و با در نظر گرفتن تعریف زنجیر، داریم: $a_{\sigma_1} = \alpha_{\sigma_1}$ و $b_{\sigma_k} = \beta_{\sigma_k}$. بنابراین،

$$\mathsf{DOM}(\mathcal{C}) = [\min_{1\leq j\leq k} a_{\sigma_j}, \max_{1\leq l\leq k} b_{\sigma_l}] = [\alpha_{\sigma_1}, \beta_{\sigma_k}].$$

■

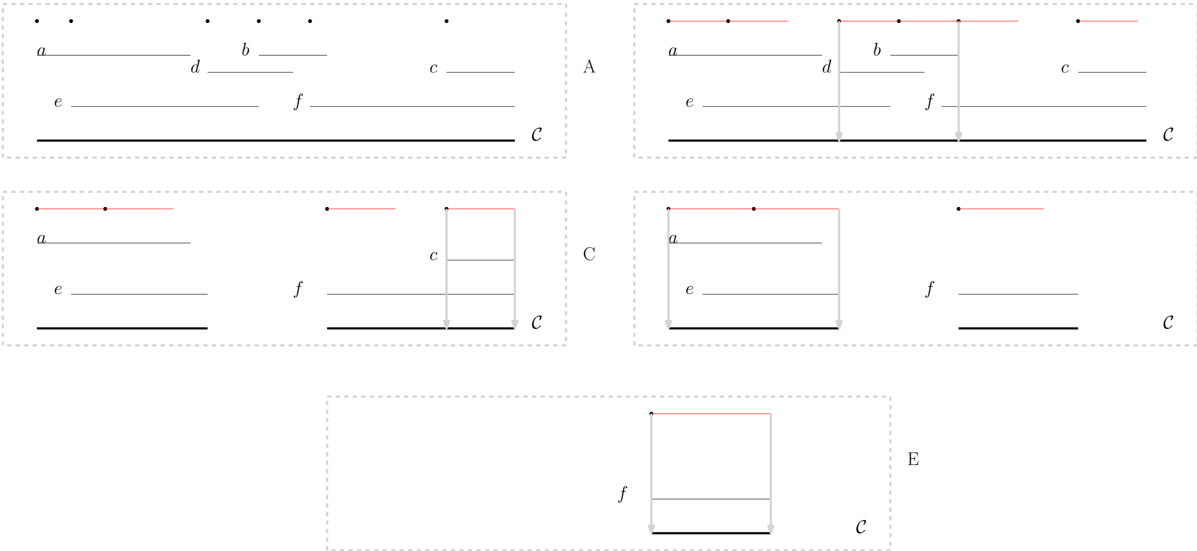
حال، هر کدام از I_{σ_i} ها را به بازیکن σ_i اختصاص می‌دهیم. لم ۸.۶ تضمین می‌کند که چنین تخصیصی برای بازیکن‌های $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ بدونِ رشک است.

لم ۸.۶. *به ازای هر بازه I_{σ_i} و I_{σ_j} در $\mathcal{C}$، داریم* $V_{\sigma_i}(I_{\sigma_i}) \geq V_{\sigma_i}(I_{\sigma_j})$.

اثبات. با توجه به خاصیت دوم روال انبساط، می‌دانیم که I_{σ_i} کاملا داخل $\mathcal{I}_{\sigma_i}$ است. سایر بازه‌ها در $\mathcal{C}$ دارای طول برابر با I_{σ_i} هستند و بنابراین، ارزش آنها برای بازیکن σ_i نمی‌تواند بیشتر از I_{σ_i} باشد.

■

در ادامه، بازیکن‌های $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ را از $\mathcal{N}$ حذف می‌کنیم. همچنین $\mathsf{DOM}(\mathcal{T})$ را از $\mathcal{C}$ حذف می‌کنیم. با حذف $\mathsf{DOM}(\mathcal{T})$، کیک به دو کیک کوچکتر تقسیم می‌شود: قسمتی که سمت راست $\mathsf{DOM}(\mathcal{T})$ است و قسمتی که سمت چپ $\mathsf{DOM}(\mathcal{T})$ است. این دو کیک را به ترتیب $\mathcal{C}_r$ و $\mathcal{C}_l$ می‌نامیم. فرض کنید $\mathcal{N}_l$ و $\mathcal{N}_r$ بازیکن‌هایی باشند که سهم آنها به ترتیب داخل $\mathcal{C}_l$ و $\mathcal{C}_r$ است. همچنین، فرض کنید $\mathcal{T}_l$ و $\mathcal{T}_r$ مجموعه بازه‌های ارزش مربوط به بازیکن‌های $\mathcal{N}_l$ و $\mathcal{N}_r$ است. حال، توابع مطلوبیت بازیکن‌های داخل $\mathcal{N}_l$ و $\mathcal{N}_r$ را به



شکل ۳.۶: یک مثال از روش EFISM: (A) شروع انبساط (B) I_b قفل شده و زنجیر I_d, I_b حذف می‌شود. (C) انبساط تا زمانی که I_c قفل شود ادامه می‌یابد (D) I_a, I_e قفل شده و حذف می‌شوند. (E) I_f قفل شده و حذف می‌شود و پروسه تمام می‌شود.

روز می‌کنیم. مشخصا، به ازای هر بازیکن $i \in \mathcal{N}_l$ با $\beta_i > \alpha_{\sigma_1}$ مقدار β_i را به α_{σ_1} تغییر می‌دهیم. به طور مشابه، به ازای هر بازیکن $j \in \mathcal{N}_r$ با $\alpha_j < \beta_{\sigma_k}$ مقدار α_j را به β_{σ_k} تغییر می‌دهیم.

بعد از حذف بخش تخصیص یافته کیک و بازیکن‌های مربوطه و به‌روز رسانی توابع مطلوبیت، این روال انبساط و حذف را به صورت جداگانه برای هر دو $\mathcal{T}_l$ و $\mathcal{T}_r$ اعمال می‌کنیم. این کار تا زمانی که همه بازیکن‌ها حذف بشوند ادامه می‌دهیم. در شکل ۳.۶ یک مثال همراه با جزئیات برای EFISM آورده شده است.

قضیه ۹.۶. *الگوریتم EFISM بدونِ رشک و صادقانه است و کیک را دقیقا در $n - 1$ نقطه برش می‌دهد.*

اثبات. بدونِ رشک بودن: با استفاده از استقرا بر روی تعداد بازیکن‌ها این امر را اثبات خواهیم کرد. برای $n = 1$ ادعای ما به صورت بدیهی برقرار است. برای $n > 1$، اولین روال انبساط را در نظر بگیرید. اگر این روال به طور کامل انجام شود، با توجه به لم ۸.۶ تخصیص نهایی بدونِ رشک است. در غیر این صورت، اگر این روال کامل نشود، فرض کنید $\mathcal{C}$ یک زنجیر بیشینه قفل شده باشد و $\mathcal{N}_\mathcal{C}$ مجموعه بازیکن‌هایی باشد که به بازه‌های داخل $\mathcal{C}$ مربوط می‌شوند. با توجه به لم ۸.۶، هیچ‌کدام از بازیکن‌های داخل $\mathcal{N}_\mathcal{C}$ به یکدیگر رشک نمی‌ورزند. به علاوه، از آنجا که $\mathsf{DOM}(\mathcal{C})$ به طور کامل تخصیص یافته است، بازیکن‌های $\mathcal{N}_\mathcal{C}$ به بازیکن‌های $\mathcal{N}_l$ و $\mathcal{N}_r$ رشک نمی‌ورزند. با فرض استقرا، تخصیص $\mathcal{C}_r$ و $\mathcal{C}_l$ برای بازیکن‌های $\mathcal{N}_r$ و $\mathcal{N}_l$ نیز بدونِ رشک است. از آنجا که $\mathcal{C}_l$ ($\mathcal{C}_r$) هیچ ارزشی برای بازیکن‌های $\mathcal{N}_r$ ($\mathcal{N}_l$) ندارد، بازیکن‌های داخل $\mathcal{N}_l$ و $\mathcal{N}_r$ به یکدیگر رشک نمی‌ورزند.

نهایتا، با توجه به این واقعیت که روال انبساط برای $\mathcal{T}_l$ و $\mathcal{T}_r$ بازه‌های مربوط به آنها را حداقل به اندازه طول بازه‌ها در $\mathcal{C}$ گسترش می‌دهد، بازیکن‌های حاضر در $\mathcal{N}_l \cup \mathcal{N}_r$ به بازیکن‌های حاضر در $\mathcal{N}_\mathcal{C}$ رشک نمی‌ورزند.

تعداد برش‌ها: در طول الگوریتم، یک قطعه از کیک به هر بازیکن داده می‌شود که به این معنی است که تعداد برش‌های زده شده بر روی کیک $n-1$ است. به یاد داشته باشید که هیچ قسمتی از کیک تخصیص نیافته باقی نمی‌ماند.

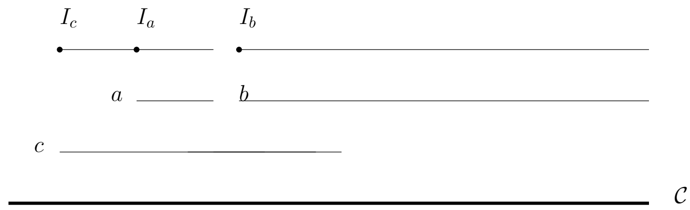
صادقانه بودن: به ازای یک بازیکن دلخواه i که تابع مطلوبیت او $\mathcal{I}_i$ است، نشان می‌دهیم که سود او با اعلام نادرست این بازه افزایش نخواهد یافت. اما در ابتدا، باید به صورت دقیق مشخص کنیم که منظور از دروغ گفتن چیست؟

دقت داشته باشید که الگوریتم EFISM برای حالتی طراحی شده است که بازه‌های ارزش افراد خاصیت ترتیبی دارند (رابطه (۱.۶) در مورد آنها برقرار است). با توجه به این نکته، بازیکن i می‌تواند تابع مطلوبیت خود را عوض کند، به گونه‌ای که این خاصیت دیگر برقرار نباشد. در اینجا، نشان می‌دهیم که بازیکن i حتی با اعلام نادرست بازه ارزش خود، به گونه‌ای که شرط ترتیبی را نقض کند نیز قادر به افزایش سود خود نخواهد بود. دقت داشته باشید که این نوع از دروغ‌گویی، ممکن است سایر خاصیت‌های الگوریتم (مانند بدونِ رشک بودن) را خراب کند (تصویر ۴.۶ راببینید).

فرض کنید L طول قطعه تخصیص یافته به بازیکن i، در حالتی که او واقعیت را اعلام می‌کند باشد، و $\mathcal{C}$ زنجیر قفل شده‌ای باشد که شامل I_i است. با در نظر گرفتن روال انبساط به عنوان یک روال پیوسته که سهم‌ها را با اندازه یکسان بزرگ می‌کند، فرض کنید t زمان نسبی باشد که $\mathcal{C}$ قفل شده است. به علاوه، فرض کنید $\mathcal{T}$ مجموعه توابع مطلوبیت مربوط به بازه‌های سهم در $\mathcal{C}$ باشد. با توجه به ساختار روال انبساط، می‌دانیم که $\Phi(\mathcal{T}) = L$ و اندازه هر بازه سهم در $\mathcal{C}$ دقیقا برابر با L است.

فرض کنید α'_i, β'_i نقاط شروع و پایان بازه‌ای باشند که بازیکن i اعلام کرده است. می‌خواهیم نشان دهیم که مستقل از این که مقادیر α'_i و β'_i چه باشند، هیچ حالتی وجود ندارد که در آن بازیکن i به سهم بیشتری از $\mathsf{DOM}(\mathcal{T})$ برسد.

در ابتدا، دقت کنید که به ازای هر زیرمجموعه $\mathcal{T}'$ از $\mathcal{T}$ داریم $\Phi(\mathcal{T}') \geq L$، که این یعنی اگر بازیکن i واقعیت را بگوید، هیچ بازه‌ای در $\mathcal{T}$ قبل از زمان t قفل نمی‌شود. بنابراین، اگر بازیکن i به گونه‌ای دروغ بگوید که یک زنجیر قفل شده $\mathcal{C}'$ قبل از زمان t ایجاد شود، I_i حتما یکی از بازه‌های حاضر در $\mathcal{C}'$ خواهد بود. به بیان دیگر، بازیکن i نمی‌تواند سایر بازه‌ها را مجبور کند که زودتر قفل شوند، بدون آن که در زنجیر مربوط به آن قفل حضور داشته باشد. از سوی دیگر، اگر بازیکن i در هر زمانی قبل از t سهم بگیرد، سهم او کمتر از L خواهد



شکل ۶.۴: اجرای EFISM بر روی بازه‌های فاقد شرط ترتیب

بود.

بنابراین، حتی اگر بازیکن i دروغ بگوید، سهم همه بازیکن‌های حاضر در $\mathcal{C}$ حداقل به میزان L خواهد بود. به علاوه، داریم $|\mathsf{DOM}(\mathcal{T})| = L \times |\mathcal{T}|$، که یعنی بازیکن i مستقل از این که چه بازه‌ای را اعلام می‌کند، نمی‌تواند بازه‌ای با طول بیشتر از

$$L \times |\mathcal{T}| - L \times (|\mathcal{T}| - ۱) = L$$

را از $\mathsf{DOM}(\mathcal{T})$ به دست آورد. با توجه به این که اگر او راست بگوید داریم $|I_i| = L$، او نمی‌تواند با دروغ گفتن سود بیشتری ببرد. ■

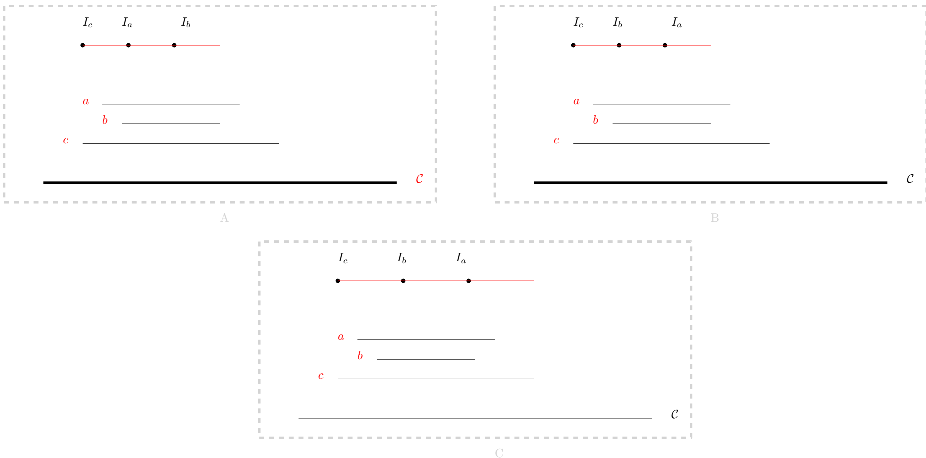
دقت داشته باشید که حذف خاصیت ترتیبی که در ابتدای این بخش به آن اشاره شد، ممکن است منتج به یک تخصیص نامناسب شود. به عنوان نمونه، ورودی‌ای که در تصویر ۶.۴ مشخص شده را ببینید. به صورت بدیهی، اجرای EFISM بر روی این ورودی به یک تخصیص بدونِ رشک منتهی نمی‌شود. در این حالت، بازیکن c به بازیکن b رشک می‌ورزد. به علاوه، این تخصیص همه کیک را تخصیص نمی‌دهد، زیرا که قطعه بین I_c و I_b باقی‌مانده است. برای حل این مشکل، در بخش بعدی یک فرم کلی‌تر از روال انبساط را معرفی می‌کنیم.

۶.۴ روال انبساط به همراه باز کردن قفل

در این بخش، یک فرم کلی‌تر از روال انبساط را معرفی خواهیم کرد. ایده اصلی این است که در طی روال انبساط، ممکن است حالت‌هایی وجود داشته باشد که یک زنجیر قفل شده بتواند با جابه‌جا کردن تعدادی از بازه‌ها، و بدون از بین بردن خواص انبساط مجددا باز شود.

تعریف ۶.۱۰. *فرض کنید $\mathcal{C} = I_{\sigma_۱}, I_{\sigma_۲}, \ldots, I_{\sigma_k}$ یک زنجیر قفل شده ماکسیمال باشد. یک جایگشت $I_{\delta_۱}, I_{\delta_۲}, \ldots, I_{\delta_r}$ از بازه‌ها در $\mathcal{C}$ را $\mathcal{C}$ـ بازکننده می‌نامیم، اگر خواص زیر در مورد آن برقرار باشد:*

- *همه بازه‌های داخل جایگشت، از اعضای زنجیر قفل شده هستند. به عبارتی، $\forall_i, I_{\delta_i} \in \mathcal{C}$ و آخرین*



شکل ۵.۶: یک مثال برای روال انبساط به همراه باز کردن قفل

عضو این جایگشت نیز بازه قفل شده است: $\delta_r = \sigma_k$.

- *به ازای هر* $j < r$، *سهمی که به بازیکن* δ_j *اعطا شده است، به طور کامل داخل بازه ارزش بازیکن* $p_{\delta_{j+1}}$ *باشد و نقطه انتهایی آن اکیدا کمتر از نقطه انتهایی بازه ارزش او باشد. به عبارتی:*

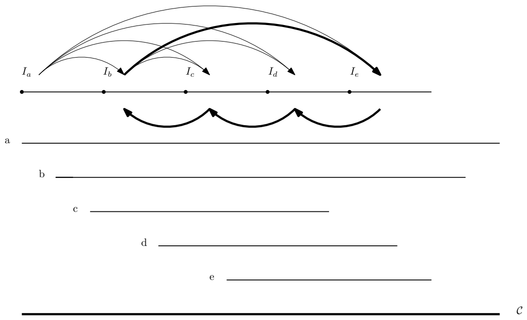
$$\forall_{1 \leq j \leq r-1} \qquad a_{\delta_j} \geq \alpha_{\delta_{j+1}} \qquad b_{\delta_j} < \beta_{\delta_{j+1}}.$$

- *سهم تخصیص یافته به بازیکن* p_{δ_r} *داخل بازه ارزش بازیکن* p_{δ_1} *باشد، و نقطه انتهایی آن اکیدا کمتر از نقطه انتهایی بازه ارزش باشد. به عبارتی* $\alpha_{\delta_1} \leq a_{\delta_r}$ *و* $\beta_{\delta_1} > b_{\delta_r}$.

انگیزه اصلی از تعریف دنباله باز کننده قفل از این قرار است: فرض کنید $I_{\delta_1}, I_{\delta_2}, \ldots, I_{\delta_r}$ یک ترتیب $\mathcal{C}$ـباز کننده باشد، که در آن $\mathcal{C} = I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, \ldots, I_{\sigma_k}$ است. در این صورت، می‌توانیم ترتیب بازه‌ها در $\mathcal{C}$ را با قرار دادن هر بازه I_{δ_j} در مکان $I_{\delta_{j-1}}$ (به ازای $1 < j \leq r$) و قرار دادن I_{δ_1} در محل I_{δ_r} عوض کرده و قفل زنجیره را باز کنیم. با تعریف ترتیب باز کننده قفل، بعد از چنین عملیاتی، $I_{\delta_r}(I_{\sigma_k})$ دیگر قفل نیست. بنابراین، I_{σ_k} دیگر مانعی برای روال انبساط نیست و این روال می‌تواند ادامه یابد.

شایان ذکر است که ممکن است در یک زمان تعداد بیش از یک زنجیر ماکسیمال قفل شده پدید آید. در این حالت، جداگانه سعی به باز کردن هر کدام از زنجیرها می‌کنیم. با در نظر گرفتن یک مجموعه $\mathcal{T}$ از بازه‌های ارزش، از عبارت $U - \exp(\mathcal{T})$ برای اشاره به روال انبساط همراه با باز کردن قفل‌های مجموعه $\mathcal{T}$ استفاده می‌کنیم. شکل ۵.۶ را برای یک نمونه از این روال ببینید.

تعریف ۱۱.۶. *یک زنجیر قفل شده* $\mathcal{C} = I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, \ldots, I_{\sigma_k}$، *قویا قفل شده است، اگر هیچ جایگشت* $\mathcal{C}$ـ*باز کننده‌ای نداشته باشد.*



شکل ۶.۶: یک مثال از گراف جایگشت. در اینجا، زنجیر قفل شده I_a, I_b, I_c, I_d, I_e می‌تواند با تغییر جایگشت I_a, I_b, I_c, I_d, I_e به I_a, I_e, I_b, I_c, I_d باز شود.

تعریف ۱۲.۶. *یک روال انبساط به همراه باز کردن قفل $U-\mathsf{exp}(\cdot)$ قویا قفل است، اگر حداقل یکی از زنجیرهایش قویا قفل شده باشد.*

تعریف ۱۳.۶. *یک گراف جایگشت برای یک زنجیر قفل‌شده $\mathcal{C} = I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, \dots, I_{\sigma_k}$، یک گراف جهت‌دار $G_{\mathcal{C}}\langle V, E\rangle$ است که به ازای هر بازه $I_{\sigma_i} \in \mathcal{C}$، یک راس v_{σ_i} در V داریم. همچنین یال‌های E از دو نوع E_l و E_r هستند، یعنی $E = E_l \cup E_r$. یال‌های داخل E_l و E_r به صورت زیر تعریف می‌شوند:*

- *به ازای هر I_{σ_i} و I_{σ_j}، یال $(v_{\sigma_i}, v_{\sigma_j})$ داخل E_l است، اگر $j > i$ و $\alpha_{\sigma_i} \leq a_{\sigma_j}$.*
- *به ازای هر I_{σ_i} و I_{σ_j}، یال $(v_{\sigma_i}, v_{\sigma_j})$ داخل E_r است، اگر $j < i$ باشد و $\beta_{\sigma_i} > b_{\sigma_j}$.*

در شکل ۶.۶ یک نمونه از گراف جایگشت نشان داده شده است. یک شرط بدیهی لازم و کافی برای این که یک زنجیر $\mathcal{C}$ قویا قفل شده باشد، این است که $G_{\mathcal{C}}$ شامل هیچ دوری شامل راس v_{σ_k} نباشد. با این حال، با توجه به ساختار خاص گراف $G_{\mathcal{C}}$ می‌توانیم یک شرط لازم و کافی ساده‌تر برای قویا قفل بودن یک زنجیر بیان کنیم.

تعریف ۱۴.۶. *یک دور C در $G_{\mathcal{C}}$ یک طرفه است، اگر شامل دقیقا یک یال از E_r باشد.*

دقت کنید هیچ دوری از $G_{\mathcal{C}}$ نمی‌تواند تنها شامل یال‌های E_l یا E_r باشد. در لم ۱۵.۶، از دورهای یک طرفه جهت ارائه شرط لازم و کافی برای این که یک زنجیر قویا قفل باشد استفاده می‌کنیم.

لم ۱۵.۶. *یک زنجیر $\mathcal{C} = I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, \dots, I_{\sigma_k}$ قویا قفل است، اگر و تنها اگر گراف $G_{\mathcal{C}}$ هیچ دور یک طرفه‌ای که شامل راس v_{σ_k} باشد، نداشته باشد.*

اثبات. برای اثبات طرف نابدیهی لم، کافی است نشان دهیم که اگر یک زنجیر قفل شده C قویا قفل نشده باشد، آنگاه یک دور یک طرفه وجود دارد. فرض کنید $C = v_{\delta_1=\sigma_k}, v_{\delta_2}, \dots, v_{\delta_r=\sigma_k}$ کوتاه‌ترین دور در $G_{\mathcal{C}}$

باشد که شامل راس v_{σ_k} است. ادعا می‌کنیم که C شامل دقیقا یک یال از E_r است (یال $(v_{\delta_{r-1}}, v_{\sigma_k})$) فرض کنید $(v_{\delta_i}, v_{\delta_{i+1}})$ اولین یال از E_r باشد که در C ظاهر شده است. بنا بر تعریف E_r داریم: $\delta_{i+1} > \delta_i$. به علاوه، بنا بر تعریف E_l داریم:

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_i < \delta_{i+1}.$$

بنابراین، به ازای یک $1 \leq j \leq i-1$ خواهیم داشت $\delta_j > \delta_{i+1} > \delta_{j+1}$. دقت کنید چون v_{δ_j} یک یال به سمت چپ به $v_{\delta_{j+1}}$ دارد، حتما به $v_{\delta_{i+1}}$ هم یال خواهد داشت (ساختار گراف جایگشت را در شکل ۶.۶ ببینید). بنابراین، $C' = v_{\sigma_k=\delta_1}, v_{\delta_2}, \ldots, v_{\delta_j}, v_{\delta i+1}, \ldots, v_{\delta_r=\sigma_k}$ یک دور کوچکتر شامل v_{σ_k} است. این با فرض کمینه بودن طول C در تناقض است.

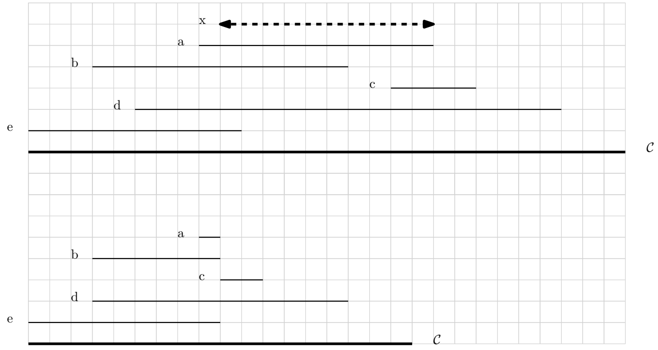
■

۵.۶ برنامه‌ریزی بازه

در این بخش، فرض ما بر این است که تابع مطلوبیت هر بازیکن یک بازه است، بدون این که هیچ محدودیتی بر روی نقاط شروع و یا پایان آن بازه‌ها قائل شویم. برای این حالت، یک تخصیص بدونِ رشک و صادقانه که از تعداد حداکثر $2n$ برش استفاده می‌کند ارائه می‌کنیم. الگوریتم ما یک تخصیص مناسب بر اساس روال انبساط و باز کردن قفل‌ها پیدا می‌کند. در واقع، به صورت متناوب $U - \exp(\cdot)$ را بر روی بازیکن‌های باقی‌مانده و بخش‌های باقی‌مانده از کیک انجام می‌دهیم. این روال یا کل کیک را تخصیص می‌دهد و یا با یک زنجیر قویا قفل شده مواجه می‌شود. برای این حالت خاصیت‌هایی اثبات می‌کنیم و از این خاصیت‌ها جهت تخصیص یک قطعه از کیک به بازیکن‌های حاضر در زنجیر قویا قفل استفاده می‌کنیم. سپس، این بازیکن‌ها و بخش تخصیص یافته کیک را از روال حذف و انقباض (همان‌طور که در تعریف ۱۶.۶ تعریف شده است) می‌کنیم و مسئله را به طور بازگشتی برای بازیکن‌های باقی‌مانده و بخش باقی‌مانده از کیک ادامه می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۶. *فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کیک و $I = [I_s, I_e]$ یک بازه است. منظور از عبارت منقبص کردن I در واقع حذف I از کیک و چسباندن قطعه‌هایی که طرف چپ و راست I هستند، به هم است. به بیان دقیق‌تر، هر تابع مطلوبیت $[\alpha_i, \beta_i]$ تبدیل به $[f(\alpha_i), f(\beta_i)]$ خواهد شد، که در آن*

$$f(x) = \begin{cases} x & x < I_s \\ I_s & I_s \leq x \leq I_e \\ x - I_e + I_s & I_e < x \end{cases}$$



شکل ۷.۶: کیک $\mathcal{C}$ وبازه‌های a, b, c, d و e قبل و بعد از منقبض کردن بازه x.

(*تصویر ۷.۶ را ببینید*).

به عنوان یک دست گرمی، خاصیت صادقانه بودن را حذف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که روال انبساط به همراه باز کردن قفل منتج به یک تخصیص بدونِ رشک با $۲(n-۱)$ برش خواهد شد.

الگوریتم EFSC

در این بخش، الگوریتم EFSC را ارائه می‌کنیم که یک الگوریتم بدونِ رشک است که کیک را حداکثر در $۲(n-۱)$ نقطه برش می‌دهد. الگوریتم پیشنهادی ما به این صورت است: در ابتدا، الگوریتم $U-exp(\mathcal{T})$ را اجرا می‌کنیم. این روال یا به صورت کامل انجام می‌شود که در این صورت تخصیص مناسب به دست آمده است، یا در اثر وقوع یک زنجیر قویا قفل شده متوقف می‌شود. در حالت دوم، فرض کنید $\mathcal{C} = I_{\sigma_۱}, I_{\sigma_۲}, \ldots, I_{\sigma_k}$ یک زنجیر قویا قفل شده باشد. با توجه به لم ۱۵.۶، گراف $G_\mathcal{C}$ هیچ دور یک طرفه‌ای ندارد. حال فرض کنید ℓ کمترین اندیسی باشد، به گونه‌ای یک مسیر جهت‌دار از v_{σ_k} به v_{σ_ℓ} با استفاده از یال‌های E_l وجود دارد. با توجه به ساختار $G_\mathcal{C}$، لم ۱۷.۶ برقرار است. از این لم برای اثبات بدونِ رشک بودن EFSC استفاده می‌کنیم.

لم ۱۷.۶. *یک مسیر جهت‌دار از v_{σ_k} به هر راس از $v_{\sigma_{\ell'}}$ با $\ell' > \ell$ با استفاده از یال‌های E_l وجود دارد.*

اثبات. فرض کنید $P = v_{\sigma_k=\delta_۱}, v_{\delta_۲}, \ldots, v_{\delta_r=\sigma_\ell}$ یک مسیر از v_{σ_k} به v_{σ_ℓ} با استفاده از یال‌های E_l باشد. با توجه به تعریف یال چپ، داریم:

$$\sigma_k = \delta_۱ > \delta_۲ > \ldots > \delta_r = \sigma_\ell.$$

دقت کنید که اگر برای یک j داشته باشیم $\sigma_{\ell'} = \delta_j$، آنگاه کار ما تمام است. در غیر این صورت، از آنجا که $\ell' > \ell$ است، به ازای یک اندیس $۱ \leq j < l$ داریم $\delta_j < \sigma_{\ell'} < \delta_{j+۱}$. با توجه به ساختار گراف، v_{δ_j}

یک یال سمت چپ به $v_{\sigma_{\ell'}}$ دارد. بنابراین، $v_{\sigma_k=\delta_1}, v_{\delta_2}, \ldots, v_{\delta_j}, v_{\sigma_{\ell'}}$ مسیر مناسب بین v_{σ_k} و $v_{\sigma_{\ell'}}$ است. ■

با توجه به لم ۱۷.۶ و این حقیقت که $G_\mathcal{C}$ هیچ دور یک طرفه‌ای ندارد، هیچ یالی از $v_{\sigma_{\ell'}}$ به v_{σ_k} در E_r به ازای هر $\ell' \geq \ell$ وجود ندارد، که این یعنی

$$\forall \ell' \geq \ell \qquad \beta_{\sigma_{\ell'}} \leq b_{\sigma_k}. \tag{۲.۶}$$

از سوی دیگر، هیچ مسیری از v_{σ_k} به $v_{\sigma_{\ell'}}$ برای $\ell' < \ell$ وجود ندارد، که این یعنی:

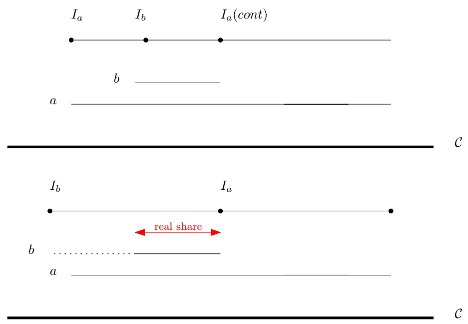
$$\forall \ell' \geq \ell \qquad \alpha_{\sigma_{\ell'}} > a_{\sigma_{\ell-1}}. \tag{۳.۶}$$

حال به ازای هر $\ell \leq \ell' \leq k$، بازه $I_{\sigma_{\ell'}}$ را به بازیکن $\sigma_{\ell'}$ تخصیص می‌دهیم و بازیکن‌های $\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_k$ را از $\mathcal{N}$ حذف می‌کنیم، و بازه $[a_{\sigma_\ell}, b_{\sigma_k}]$ از کیک را منقبض می‌کنیم. در ادامه، روال انبساط به همراه باز کردن قفل را برای بازیکن‌های باقیمانده و بخش باقی‌مانده از کیک ادامه می‌دهیم. این تکرار بین انبساط و تخصیص کیک، تا زمانی که همه کیک تخصیص یابد ادامه پیدا می‌کند.

قضیه ۱۸.۶. *الگوریتم* EFSC *بدونِ رشک است و کیک را حداکثر در* $2(n-1)$ *محل برش می‌دهد.*

اثبات. بدونِ رشک بودن: فرض کنید بازیکن i و j دو بازیکن دلخواه باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که بازیکن i به سهم بازیکن j رشک نمی‌ورزد. برای اثبات این ادعا، فرض کنید r_i و r_j مراحلی باشد که طی آن یک قطعه از کیک به ترتیب به بازیکنان i و j تعلق گرفته است. بر حسب نسبت i و j سه حالت وجود دارد: (I): $r_i < r_j$، (II): $r_i = r_j$ و (III): $r_i > r_j$. برای حالتی که رابطه $r_i < r_j$ برقرار باشد، با توجه به نامساوی (آ.۸)، مقدار $|I_j \cap \mathcal{I}_i|$ کمتر از $|I_i|$ خواهد بود، که این یعنی بازیکن i به بازیکن j رشک نمی‌ورزد. اگر داشته باشیم $r_i = r_j$، با توجه به لم ۸.۶ بازیکن i به بازیکن j رشک نمی‌ورزد. در نهایت، برای حالتی که $r_i > r_j$ باشد، با توجه به این واقعیت که کل اندازه سهمی که به بازیکن i می‌رسد اکیدا بیشتر از سهمی است که به بازیکن j داده شده است، بازیکن i به j رشک نمی‌ورزد.

تعداد برش ها: با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که تعداد برش‌ها حداکثر $2(n-1)$ است. برای $n = 1$ روال انبساط، یک قطعه به تنها بازیکن موجود تخصیص می‌دهد که به هیچ برشی نیاز ندارد. حال فرض کنید که ادعا برای هر $n' < n$ صحیح است. نشان می‌دهیم که برای n بازیکن نیز صحیح است. در ابتدا دقت کنید که اگر روال $U - \exp(\cdot)$ به طور کامل تمام شود، آنگاه کیک با استفاده از $n - 1$ برش تقسیم شده است. بنابراین،



شکل ۸.۶: بازیکن b می‌تواند سهم خود را با اعلام نادرست a_b افزایش دهد.

فرض کنید که روال در اثر یک زنجیر قویا قفل شده متوقف شده است. فرض کنید $\mathcal{C} = I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, \ldots, I_{\sigma_k}$ زنجیر قویا قفل شده باشد و فرض کنید ℓ بیشترین اندیسی باشد، به گونه‌ای که یک مسیر از v_{σ_k} به v_{σ_ℓ} در $G_{\mathcal{C}}$ وجود دارد. در الگوریتم، ما $I_{\sigma_\ell}, I_{\sigma_{\ell+1}}, \ldots, I_{\sigma_k}$ را به بازیکن‌های $\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_k$ تخصیص داده و بخش تخصیص یافته را منقبض می‌کنیم. هر بازیکن در $\{\sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_k\}$ یک قطعه از کیک می‌گیرد ($(k-\ell)$ برش). به علاوه، با توجه به فرض استقرا، بخش باقیمانده از کیک نیاز به حداکثر $2(n-k+\ell-2)$ برش دارد. با در نظر گرفتن نقطه ابتدایی و انتهاییِ سهمی که مربوط به $\mathcal{C}$ است، مجموع تعداد برش‌ها برابر با

$$2(n-k+\ell-2)+(k-\ell)+2 = 2(n-1)-k+\ell \leq 2(n-1)$$

خواهد بود. ■

الگوریتم EFGISM [3]

در ابتدا لازم است اشاره کنیم که الگوریتم EFSC صادقانه نیست. به عنوان مثال، شکل ۸.۶ را در نظر بگیرید. به راحتی می‌توان دید که بازیکن b سهم خود را می‌تواند با اعلام نادرست α_b افزایش دهد. در این بخش، هدف ما رفع این مشکل است. راهبرد ما برای مواجهه با این مسئله این است که در هر مرحله، $U-\text{exp}(\cdot)$ را تنها برای یک زیرمجموعه از افراد (و نه کل افراد) اجرا کنیم. لم ۱۹.۶ هسته اصلی روش ما در این قسمت است.

لم ۱۹.۶. *فرض کنید T مجموعه‌ای از بازه‌ها باشد، به گونه‌ای که به ازای هر $T' \subset T$، داشته باشیم $\Phi(T') > \Phi(T)$ (چنین مجموعه‌ای را کاهش‌ناپذیر می‌گوییم). در این صورت، ما می‌توانیم $\text{DOM}(T)$ را به حداکثر $2|T|-1$ قسمت تقسیم و آنها را به بازه‌ها تخصیص دهیم، به گونه‌ای که $(\mathbb{I})$: مجموع طول قطعاتی که به هر بازه تخصیص داده شده است دقیقا برابر با $\Phi(T)$ باشد و $(\mathbb{III})$: قطعاتی که به هر فرد تخصیص یافته است به طور کامل داخل بازه ارزش او باشد.*

[3] Envy-Free General Interval Scheduling Mechanism.

اثبات. برای اثبات، از استقرا بر روی T استفاده می‌کنیم. برای $|T| = ۱$ ادعای ما به صورت بدیهی برقرار است: $\mathsf{DOM}(T)$ را به تنها بازه موجود در T تخصیص می‌دهیم که نیاز به هیچ برشی ندارد. حال فرض کنید که ادعای ما برای $|T| < k$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم که برای $|T| = k$ نیز ادعای ما برقرار است. روال $U - \mathsf{exp}(T)$ را در نظر بگیرید. اگر $U - \mathsf{exp}(T)$ به طور کامل پایان یابد، تخصیص مورد نظر به دست آمده است. در غیر این صورت، فرض کنید $\mathcal{C} = I_{\sigma_۱}, I_{\sigma_۲}, \ldots, I_{\sigma_k}$ یک زنجیر قویا قفل شده با طول بیشینه باشد که در اثر اجرای ناکامل روال ایجاد شده است. با در نظر گرفتن $G_{\mathcal{C}}$، فرض کنید ℓ کمترین اندیسی باشد که یک مسیر جهت‌دار از v_{σ_k} به v_{σ_ℓ} با استفاده از یال‌های E_l وجود دارد. در لم ۲۰.۶، ما نشان می‌دهیم که ℓ اکیدا بزرگتر از ۱ است. از این واقعیت بعدا استفاده می‌کنیم تا مسئله اصلی را به دو زیرمسئله تقسیم و آنها را با استفاده از فرض استقرا و به طور بازگشتی حل کنیم.

لم ۲۰.۶. *فرض کنید $\mathcal{C} = I_{\sigma_۱}, I_{\sigma_۲}, \ldots, I_{\sigma_k}$ یک زنجیر قویا قفل شده بعد از اجرای $U - \mathsf{exp}(T)$ باشد و فرض کنید ℓ بیشترین اندیسی باشد که یک مسیر جهت‌دار از v_{σ_k} به v_{σ_ℓ} در $G_{\mathcal{C}}$ با استفاده از یال‌های E_L وجود دارد. در این صورت، $\ell > ۱$.*

اثبات. با استفاده از برهان خلف این لم را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\ell = ۱$. با توجه به عبارت (آ.۷)، به ازای هر i داریم $\beta_{\sigma_i} \leq b_{\sigma_k}$. حال، نشان می‌دهیم که به ازای تمام iها داریم $\alpha_{\sigma_i} \geq a_{\sigma_۱}$. فرض کنید

$$x = \min_{۱ \leq i \leq k} \alpha_{\sigma_i} \qquad \text{و} \qquad j = \arg\min_{۱ \leq i \leq k} \alpha_{\sigma_i}.$$

در ابتدای روال انبساط، نقطه ابتدایی I_{σ_j} بر روی x قرار دارد. در طول انبساط، ممکن است حالت‌هایی پدید آید که I_{σ_j} با یک بازه دیگر جایگزین شود. با این حال، با توجه به تعریف جایگشت باز کننده قفل، خواهیم داشت $x = \alpha_{\sigma_{j'}}$. به علاوه، نقطه ابتدایی آخرین بازه موجود در $\mathcal{C}$ همیشه بر روی x باقی می‌ماند، زیرا که $\mathcal{C}$ ماکسیمال است و لذا هیچ بازه دیگری آن را هُل نمی‌دهد. بنابراین، در یک زنجیر قویا قفل شده، داریم $x = \alpha_{\sigma_۱}$ و به ازای هر $i > ۱$ داریم $\alpha_{\sigma_i} \geq x$. بنابراین، $\mathsf{DOM}(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) = [a_{\sigma_۱}, b_{\sigma_k}]$، که در آن $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ بازه‌های ارزش مربوط به بازه‌های سهم موجود در $\mathcal{C}$ است. از آنجا که $[a_{\sigma_۱}, b_{\sigma_k}]$ به طور کامل با $\mathcal{C}$ پوشیده شده است، داریم $\Phi(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) = |I_{\sigma_۱}| = |I_{\sigma_۲}| = \cdots = |I_{\sigma_k}|$. از سوی دیگر، از آنجا که روال $U - \mathsf{exp}(\mathcal{T})$ کامل نشده است، داریم $|I_{\sigma_k}| < \Phi(T)$، که این با کاهش‌ناپذیری T در تناقض است. ■

با توجه به لم ۱۷.۶ می‌دانیم که روابط (آ.۷) و (آ.۸) برای $\mathcal{C}$ برقرار است. حال فرض کنید

$$x = \beta_{\sigma_k} - (k - \ell + ۱)\Phi(T). \qquad (۴.۶)$$

در لم ۲۱.۶ نشان می‌دهیم که محل x در بازه $[۰,۱]$ جایی بین $a_{\sigma_{\ell-۱}}$ و a_{σ_ℓ} است. این واقعیت، به ما کمک می‌کند تا $\mathsf{DOM}(T)$ را به دو قطعه تقسیم کنیم که هر دو خاصیت‌های تعریف شده در لم ۱۹.۶ را داشته باشند.

لم ۲۱.۶. *فرض کنید*

$$x = \beta_{\sigma_k} - (k - \ell + ۱)\Phi(T),$$

که در آن ℓ کمترین اندیسی است، به طوری که یک مسیر جهت‌دار از v_{σ_k} به v_{σ_ℓ} وجود داشته باشد. در این صورت، خواهیم داشت $a_{\sigma_\ell} < x < a_{\sigma_{\ell-۱}}$.

اثبات. با توجه به نامساوی (آ.۷) و این واقعیت که $b_{\sigma_k} = \beta_{\sigma_k}$ (دقت کنید که $\mathcal{C}$ قویا قفل شده است) داریم:

$$\forall_{\ell \le i \le k} \qquad \beta_{\sigma_i} \le \beta_{\sigma_k}.$$

به علاوه، با در نظر گرفتن نامساوی (آ.۸) داریم:

$$\forall_{\ell \le i \le k} \qquad \alpha_{\sigma_i} > a_{\sigma_{\ell-۱}}.$$

حال، فرض کنید $\mathcal{T}' = \{\sigma_\ell, \sigma_{\ell+۱}, \dots, \sigma_k\}$. داریم:

$$\Phi(\mathcal{T}') = \frac{\mathsf{DOM}(\mathcal{T}')}{|\mathcal{T}'|} < \frac{\beta_{\sigma_k} - a_{\sigma_{\ell-۱}}}{k - \ell + ۱}.$$

از سوی دیگر، با توجه به عبارت (۴.۶) داریم:

$$\Phi(T) = \frac{\beta_{\sigma_k} - x}{k - \ell + ۱}.$$

با در نظر گرفتن این نکته که T کمترین چگالی ممکن را دارد، $x > a_{\sigma_{\ell-۱}}$. همچنین، چون روال $U-\mathsf{exp}(T)$ ناکامل بود، داریم $|I_{\sigma_۱}| = |I_{\sigma_۲}| = \dots = |I_{\sigma_k}| < \Phi(\mathcal{T})$ و در نتیجه،

$$\begin{aligned} x &= b_{\sigma_k} - (k - \ell + ۱) \times \Phi(T) \\ &< b_{\sigma_k} - (k - \ell + ۱) \times |I_{\sigma_k}| \\ &< b_{\sigma_{\ell-۱}} = a_{\sigma_\ell}. \end{aligned}$$

دقت کنید که چون بازه $I_{\sigma_{\ell-۱}}$ در بازه I_{σ_ℓ} گیر کرده است، $b_{\sigma_{\ell-۱}} = a_{\sigma_\ell}$. ■

حال، نشان می‌دهیم که قطعه $[x, \beta_{\sigma_k}]$ می‌تواند به بازیکن‌های $\sigma_\ell, \sigma_{\ell+۱}, \ldots, \sigma_k$ با استفاده از $۲(k-\ell+۲-۱)$ برش تخصیص یابد. برای نشان دادن این ادعا، بازه‌های ارزش $T' = \{\mathcal{I}'_{\sigma_\ell}, \mathcal{I}'_{\sigma_{\ell+۱}}, \ldots, \mathcal{I}'_{\sigma_k}\}$ را در نظر بگیرید که در آن

$$\forall_{\ell \leq i \leq k} \qquad \mathcal{I}'_{\sigma_i} = [\max(x, \alpha_{\sigma_i}), \beta_{\sigma_i}].$$

دقت کنید که $\mathsf{DOM}(T') = [x, \beta_{\sigma_k}]$ و بنابراین

$$\Phi(T') = \frac{\beta_{\sigma_k} - x}{k-\ell+۱} = \frac{b_{\sigma_k} - x}{k-\ell+۱}. \tag{۵.۶}$$

با توجه به نامساوی (۴.۶)، داریم $\Phi(T') = \Phi(T)$.

لم ۲۲.۶. *T' کاهش‌ناپذیر است. به بیان رسمی‌تر، به ازای هر $T'' \subset T'$ رابطه $\Phi(T'') > \Phi(T')$ برقرار است.*

اثبات. می گوییم بازه $\mathcal{I}'_{\sigma_i}$ در T' بریده شده است، اگر $x > \alpha_{\sigma_i}$. برای هر بازه $\mathcal{I}'_{\sigma_i}$ که بریده نشده است، $\mathcal{I}'_{\sigma_i}$ دقیقا برابر با $\mathcal{I}_{\sigma_i}$ است. بنابراین، اگر T'' شامل هیچ بازه بریده شده‌ای نباشد، چون T کاهش‌ناپذیر است، داریم

$$\Phi(T'') > \Phi(T) = \Phi(T').$$

بنابراین، تنها این باقی می‌ماند که ادعای خود را برای حالتی که T'' شامل بازه‌های بریده شده است اثبات کنیم. با توجه به مشاهده ۲.۶ فرص می‌کنیم که $\mathsf{DOM}(T'')$ محکم است. فرض کنید j بیشینه اندیسی باشد که $\mathcal{I}'_{\sigma_j} \in T''$. از آنجا که I_{σ_j} کاملا داخل $\mathcal{I}_{\sigma_j}$ است، داریم $\beta_{\sigma_j} \geq b_{\sigma_j}$. همچنین چون $b'_{\sigma_j} = b_{\sigma_j}$، رابطه

$$\mathsf{DOM}(T'') = [x, b_{\sigma_j}]$$

برقرار است. از سوی دیگر، T'' حداکثر شامل $j-\ell+۱$ بازه است. با توجه به نامساوی (۵.۶) داریم:

$$\Phi(T') = \frac{b_{\sigma_k} - x}{k-\ell+۱} \qquad , \qquad \Phi(T'') \geq \frac{b_{\sigma_j} - x}{j-\ell+۱}.$$

بنابراین،

$$\Phi(T') = \frac{b_{\sigma_k} - x}{k-\ell+۱} = \frac{(b_{\sigma_j} - x) + (b_{\sigma_k} - b_{\sigma_j})}{(j-\ell+۱) + (k-j)}. \tag{۶.۶}$$

در نظر داشته باشید که

$$\begin{aligned} \frac{(b_{\sigma_k} - b_{\sigma_j})}{(k-j)} &= |I_{\sigma_۱}| = |I_{\sigma_۲}| = \ldots = |I_{\sigma_k}| \\ &< \Phi(T) \\ &= \Phi(T'). \end{aligned} \tag{۷.۶}$$

با ترکیب نامساوی‌های (۶.۶) و (۷.۶) به همراه مشاهده ۲.۶ داریم:

$$\frac{(b_{\sigma_j} - x)}{(j - \ell + ۱)} > \Phi(T') \Rightarrow \Phi(T'') > \Phi(T').$$

■

لم ۲۲.۶ عنوان می‌کند که مجموعه بازه‌ها در T' خاصیتهای مشخص شده در لم ۱۹.۶ را دارا می‌باشند. به علاوه، با توجه به لم ۲۰.۶، مجموعه T' یک زیرمجموعه اکید T است. با توجه به فرض استقرا، می‌دانیم که می‌توان $\mathsf{DOM}(T')$ را با حداکثر $۲(k - \ell + ۱) - ۲$ برش به بازیکن‌های $\sigma_\ell, \sigma_{\ell+۱}, \ldots, \sigma_k$ تخصیص داد، به گونه‌ای که هر دو خاصیت تعریف شده در لم ۱۹.۶ برقرار باشد. مجموعه بازیکن‌های داخل T را با $\mathcal{N}_T$ نشان می‌دهیم. حال $\mathsf{DOM}(T')$ را منقبض و بازیکن‌های $\sigma_\ell, \sigma_{\ell+۱}, \ldots, \sigma_k$ را از $\mathcal{N}_T$ حذف می‌کنیم. لم ۲۳.۶ تضمین می‌کند که شرایط لم ۱۹.۶ برای بخش باقی‌مانده کیک و بازیکن‌های باقی‌مانده برقرار است.

لم ۲۳.۶. *فرض کنید T'' بازه‌های مربوط به بازیکن‌های $\mathcal{N}_{T''} = \mathcal{N}_T \setminus \{\sigma_\ell, \sigma_{\ell+۱}, \ldots, \sigma_k\}$، بعد از منقبض کردن $\mathsf{DOM}(T')$ باشد. در این صورت، T'' کاهش‌ناپذیر است و همینطور $\Phi(T'') = \Phi(T')$.*

اثبات. داریم $\Phi(T) = \Phi(T')$ که این یعنی

$$\frac{\mathsf{DOM}(T)}{|T|} = \frac{\mathsf{DOM}(T')}{|T'|}.$$

بنابراین،

$$\frac{\mathsf{DOM}(T) - \mathsf{DOM}(T')}{|T| - |T'|} = \Phi(T) = \Phi(T')$$

که این یعنی $\Phi(T'') = \Phi(T)$. یک بازه $\mathcal{I}_i$ را بریده شده می‌نامیم، اگر $\mathcal{I}_i \cup \mathsf{DOM}(T') \neq \emptyset$. حال، یک مجموعه دلخواه $\hat{T} \subset T''$ از بازه‌ها را در نظر بگیرید. اگر $\hat{T}$ شامل هیچ بازه بریده شده‌ای نباشد، مقدار $\Phi(\hat{T})$ دقیقا برابر با همان مقدار است که قبل از منقبض شدن داشته است، که با فرض کاهش‌ناپذیری داریم:

$$\Phi(\hat{T}) > \Phi(\mathcal{T}) = \Phi(T'').$$

از سوی دیگر، فرض کنید که $\hat{T}$ شامل حداقل یک بازه بریده شده باشد. فرض کنید $\hat{T}'$ مجموعه بازه‌ها در $\hat{T} \cup T'$ قبل از منقبض کردن T' باشد. چون $\hat{T}$ شامل یک بازه منقبض شده است، $\hat{T}'$ حتما محکم است. همچنین با فرض کاهش‌ناپذیری داریم:

$$\Phi(\hat{T}') > \Phi(T) = \Phi(T') = \Phi(T'').$$

به علاوه، داریم $|\mathsf{DOM}(\hat{T})| = |\mathsf{DOM}(\hat{T}')| - |\mathsf{DOM}(T')|$. بنابراین:

$$\begin{aligned}\Phi(\hat{T}) &= \frac{|\mathsf{DOM}(\hat{T})|}{|\hat{T}|} \\ &= \frac{|\mathsf{DOM}(\hat{T}')| - |\mathsf{DOM}(T')|}{|\hat{T}'| - |T'|}\end{aligned}$$

با توجه به مشاهده ۲.۶ داریم $\Phi(\hat{T}) > \Phi(T) = \Phi(T'')$. ■

بر اساس لم ۲۳.۶ و با استفاده از فرض استقرا، T'' می‌تواند به بازیکن‌های در $\mathcal{N}_{T''}$ با استفاده از $۲(\ell - ۱) - ۲$ برش اعطا شود. تعداد کل برش‌ها برابر خواهد بود با

$$۲(\ell - ۱) - ۲ + ۲(k - \ell + ۱) - ۲ = ۲k - ۴$$

برش، به علاوه دو برش در دو نقطه x و β_{σ_k} که نهایتا منجر به $۲k - ۲$ برش خواهد بود. ■

بر اساس لم ۱۹.۶، الگوریتم EFGISM را به این صورت تعریف می‌کنیم: در میان همه زیرمجموعه‌های $\mathcal{N}$ زیرمجموعه‌ای را پیدا می‌کنیم که بازه‌های مربوط به آن کمترین چگالی را دارند (در صورت وجود چند گزینه، زیرمجموعه‌ای که اندازه کمتری دارد). فرض کنید N این زیرمجموعه باشد و فرض کنید T بازه‌هایی باشند که به بازیکن‌های داخل N مرتبط هستند. در لم ۲۴.۶ نشان می‌دهیم که T (و در نتیجه N) را می‌توان در زمان چندجمله‌ای یافت.

لم ۲۴.۶. *فرض کنید N مجموعه‌ای از بازیکن‌ها باشد که که بازه‌های مربوط به آنها کمترین میزان باشد و T بازه‌های مربوط به این بازیکن‌ها باشد. در این صورت، می‌توان T (و در نتیجه N) را در زمان چند جمله‌ای پیدا کرد.*

اثبات. تعداد $n^۲$ انتخاب مختلف برای نقاط شروع و پایان $\mathsf{DOM}(T)$ وجود دارد. با ثابت کردن این نقاط، برای کمینه کردن چگالی T باید تمام بازه‌هایی که در داخل دامنه هستند را به T اضافه کنیم. بنابراین، مجموعه T می‌تواند در زمان چندجمله‌ای محاسبه شود. ■

از آنجا که T کمترین مقدار چگالی را دارد، کاهش‌ناپذیر است. بنابراین، می‌توانیم به هر بازیکن در N یک قطعه از $\mathsf{DOM}(T)$ را با شرایطی که در لم ۱۹.۶ مشخص شده است، اعطا کنیم. بعد از این، بازیکن‌های

داخل N را از $\mathcal{N}$ حذف کرده و $\mathsf{DOM}(T)$ را منقبض می‌کنیم. در ادامه، به طور بازگشتی بخش باقی‌مانده از کیک را به بازیکن‌های باقی‌مانده با استفاده از EFGISM تخصیص می‌دهیم. در الگوریتم ۸ می توانید یک شبه کد برای EFGISM بیابید.

الگوریتم ۸: EFGISM

Function $\mathsf{EFGISM}(\mathcal{N}, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ **:**
  if $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **then**
    Let $T = \arg\min_{T' \subseteq \mathcal{T}} \Phi(T')$
    Let $N =$ players with interval in T
    $Allocate(N, \mathsf{DOM}(T))$ ▷ By Lemma 19.6
    $Shrink(\mathcal{C}, \mathsf{DOM}(T))$ ▷ $\mathcal{T}$ is also updated
    $\mathsf{EFGISM}(\mathcal{N} \setminus N, \mathcal{T}, \mathcal{C})$

قضیه ۲۵.۶. *الگوریتم EFGISM بدونِ رشک و صادقانه است و کیک را حداکثر در $۲(n-۱)$ نقطه برش می‌دهد.*

اثبات. بدونِ رشک بودن: دو بازیکن i و j را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم که بازیکن i به بازیکن j رشک نمی‌ورزد. برای اثبات این امر، فرض کنید r_i و r_j مراحلی باشند که طی آن این دو بازیکن سهم خود را به دست آورده‌اند. سه احتمال وجود دارد: $(\mathbb{I})$ $r_i < r_j$، $(\mathbb{II})$ $r_i = r_j$ و $(\mathbb{III})$ $r_i > r_j$. نشان می‌دهیم که در هر سه حالت، بازیکن i به بازیکن j رشک نمی‌ورزد.

برای حالت اول، گزاره بدیهی است، زیرا که I_j هیچ تداخلی با $\mathcal{I}_i$ ندارد. برای حالت دوم، لم ۸.۶ تضمین می‌کند که i به بازیکن j رشک نمی‌ورزد. در نهایت، برای حالت سوم، فرض کنید که $\mathcal{T}_i$ و $\mathcal{T}_j$ مجموعه بازه‌هایی باشند که در مرحله r_i و r_j انتخاب شده‌اند. نشان می‌دهیم که $\Phi(\mathcal{T}_i) \geq \Phi(\mathcal{T}_j)$. فرض کنید $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_j$. می‌دانیم $\Phi(\mathcal{T}) \geq \Phi(\mathcal{T}_j)$ که این یعنی:

$$\frac{|\mathsf{DOM}(\mathcal{T})|}{|\mathcal{T}|} > \frac{|\mathsf{DOM}(\mathcal{T}_j)|}{|\mathcal{T}_j|},$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{|\mathsf{DOM}(\mathcal{T}_i)| + |\mathsf{DOM}(\mathcal{T}_j)|}{|\mathcal{T}_i| + |\mathcal{T}_j|} \geq \frac{|\mathsf{DOM}(\mathcal{T}_j)|}{|\mathcal{T}_j|}.$$

با توجه به مشاهده ۲.۶ داریم $\Phi(\mathcal{T}_i) \geq \Phi(\mathcal{T}_j)$. بنابراین، بازیکن i به بازیکن j رشک نمی‌ورزد، زیرا که اندازه سهمی که به بازیکن i اعطا می‌شود، بزرگتر از j است و به طور کامل نیز داخل $\mathcal{I}_{\sigma_i}$ قرار دارد.

صادقانه بودن: برای اثبات صادقانه بودن الگوریتم، از نتیجه‌ای که در [۲۷] اثبات شده است استفاده می‌کنیم. در این مقاله، گزاره زیر ثابت شده است:

> فرض کنید $\mathcal{A}$ الگوریتمی باشد که در هر مرحله یک مجموعه $\mathcal{T}$ از بازه‌ها با کمترین مقدار $\Phi(\mathcal{T})$ را انتخاب و آن را به افراد مربوط به بازه‌های داخل $\mathcal{T}$ اعطا می‌کند، به گونه‌ای که هر فرد یک سهم با اندازه $\Phi(\mathcal{T})$ ببرد و سهم وی به طور کامل داخل بازه مطلوبیتش باشد. در این صورت، الگوریتم $\mathcal{A}$ صادقانه است.

با توجه به این امر که الگوریتم ما نیز دارای ساختار مشابه است، صادقانه است.

تعداد برش ها: برای اثبات تعداد برش‌ها، از استقرا استفاده می‌کنیم. برای $n = ۱$ الگوریتم به طور بدیهی همه کیک را به بازیکن می‌دهد که نیاز به هیچ برشی ندارد. ($(۱ - ۱) \times ۲$). حال، اولین مرحله از الگوریتم را در نظر بگیرید، که در آن مجموعه $\mathcal{T}$ از بازه‌ها انتخاب شده است. با توجه به لم ۶.۱۹، ما $\mathcal{T}$ را حداکثر در $۲(\mathcal{T} - ۱)$ نقطه برش می‌دهیم. به علاوه، $\mathsf{DOM}(\mathcal{T})$ را منقبض می‌کنیم و مسئله را به طور بازگشتی برای بخش باقی‌مانده حل می‌کنیم. با فرض استقرا، بخش بازگشتی الگوریتم حداکثر $۲(n - \mathcal{T} - ۱)$ برش ایجاد می‌کند. به علاوه، دو برش نیز در ابتدا و انتهای $\mathsf{DOM}(\mathcal{T})$ زده می‌شود. بنابراین، تعداد کل برش‌ها برابر خواهد بود با

$$۲(\mathcal{T} - ۱) + ۲(n - \mathcal{T} - ۱) + ۲ = ۲(n - ۱).$$

■

۶.۶ جمع بندی و کارهای آتی

در این فصل، ما روال انبساط را معرفی کردیم، که در واقع زیربنای روشی برای تخصیص بدونِ رشک و صادقانه کیک با تعداد کمی برش است. این روال برای حالتی طراحی شده است که تابع مطلوبیت هر بازیکن یک بازه است. یک مسیر آینده این است که این روال را برای حالتی که توابع مطلوبیت قطعه‌ای ثابت و قطعه‌ای یکنواخت است توسعه دهیم. باور ما این است که یک حالت کلی‌تر از این روش می‌تواند برای این حالت‌ها یک تخصیص بدونِ رشک با $O(nk)$ برش تولید کند.

به تازگی بی و همکاران [۱۳] نشان داده‌اند که هیچ الگوریتم معین و صادقانه و بدونِ رشکی با $n - ۱$ برش وجود ندارد. بنابراین، هنوز یک فاصله بین حدود پایین و بالای $n - ۱$ و $۲n - ۱$ وجود دارد. حدس ما این است که تعداد برش‌هایی که الگوریتم ما ارائه می‌دهد کمینه است.

نتایج تجربی صورت گرفته [۶۸] کارایی بالای روش انبساط و باز کردن قفل را از نقطه نظر تعداد برش نشان می‌دهد. یک مسیر جالب همراهی این نتایج با اثبات‌های تئوری برای حالتی است که بازه‌های ارزش به صورت تصادفی از یک توزیع دلخواه انتخاب شده است.

فصل ۷
مقاله‌های حاصل از این تحقیق

در این فصل، به طور خلاصه به شرح مقاله‌های حاصل از تحقیقات انجام شده دوران پژوهش می‌پردازیم. در ابتدا، مقاله‌هایی را بررسی می‌کنیم که مرتبط با موضوع پژوهشی این رساله بوده‌اند. در ادامه، مقالاتی را عنوان می‌کنیم که در طول دوران پژوهش تهیه شده‌اند، اما دارای موضوع متفاوت با موضوع پژوهشی این رساله بوده‌اند. در جدول ۱.۷ به طور خلاصه می‌توانید مقاله‌های مربوط به هر دو گروه را مشاهده نمایید.

۱.۷ مقاله‌های مرتبط با موضوع رساله

۱.۱.۷ مقاله‌های چاپ شده

- Reza Alijani, Majid Farhadi, Mohammad Ghodsi, Masoud Seddighin, and Ahmad S Tajik. Envy-free mechanisms with minimum number of cuts. In *Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2017

- Alireza Farhadi, MohammadTaghi Hajiaghayi, Mohammad Ghodsi, Sebastien Lahaie, David Pennock, Masoud Seddighin, Saeed Seddighin, and Hadi Yami. Fair allocation of indivisible goods to asymmetric agents. In *Proceedings of the 16th Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems*, pages 1535–1537. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2017

- Mohammad Ghodsi, MohammadTaghi HajiAghayi, Masoud Seddighin, Saeed Seddighin, and Hadi Yami. Fair allocation of indivisible goods: Improvements and generalizations. In *Proceedings of the 2018 ACM Conference on Economics and Computation*, pages 539–556. ACM, 2018

- Mohammad Ghodsi, Mohamad Latifian, Arman Mohammadi, Sadra Moradian, and Masoud Seddighin. Rent division among groups. In *International Conference on Combinatorial Optimization and Applications*, pages 577–591. Springer, 2018

- Masoud Seddighin, Majid Farhadi, Mohammad Ghodsi, Reza Alijani, and Ahmad S Tajik. Expand the shares together: Envy-free mechanisms with a small number of cuts. *Algorithmica*, pages 1–28
- Alireza Farhadi, MohammadTaghi Hajiaghayi, Mohammad Ghodsi, Sebastien Lahaie, David Pennock, Masoud Seddighin, Saeed Seddighin, and Hadi Yami. Fair allocation of indivisible goods to asymmetric agents. *Journal of Artificial Intelligence Research*, pages 1–20

۲.۱.۷ مقاله‌های ارسال شده

- Mohammad Ghodsi, MohammadTaghi HajiAghayi, Masoud Seddighin, Saeed Seddighin, and Hadi Yami. Fair allocation of indivisible goods: Improvements and generalizations. *Mathematics of Operations Research*
- Mohammad Ghodsi, Hamed Saleh, and Masoud Seddighin. Fair allocation of indivisible items with externalities. *TheWebConf*, 2019

۲.۷ سایر مقاله‌ها

در طول دوران پژوهش، تعدادی مقاله غیرمرتبط با موضوع پژوهشی نیز در همکاری با سایر پژوهش‌گران در کنفرانس‌های مختلف پذیرفته شد که در ادامه به ذکر آن‌ها می‌پردازیم.

- Mohammad Ghodsi, Mohammad Latifian, and Masoud Seddighin. On the distortion value of the elections with abstention. In *AAAI*, 2019
- Mohammad Ghodsi, Hamid Homapour, and Masoud Seddighin. Approximate minimum diameter. In *International Computing and Combinatorics Conference*, pages 237–249. Springer, 2017
- Ehsan Emamjomeh-Zadeh, Mohammad Ghodsi, Hamid Homapour, and Masoud Seddighin. Unit covering in color-spanning set model. In *International Workshop on Algorithms and Computation*, pages 44–52. Springer, 2015

نام مقاله	نام همایش	وضعیت	نام مجله	وضعیت	شرح در رساله	مرتبط با رساله
Fair Allocation of Indivisible Items: Improvement and Generalization	EC	Accepted	MOR	Submitted	✓	✓
Fair Allocation of Indivisible Goods to Asymmetric Agents	AAMAS	Accepted	JAIR	Accepted	✓	✓
Envy-free Mechanisms with a Small Number of Cuts	AAAI	Accepted	Algorithmica	Accepted	✓	✓
Rent Sharing Among Groups	COCOA	Accepted	-	-	✗	✓
Fair Allocation of Indivisible Items with Externalities	WWW	Submitted	-	-	✗	✓
Approximate Competitive Equilibria with Generic Budgets	-	To be submitted	-	-	✗	✓
On the Distortion Value of the Elections with Abstention	AAAI	Accepted	-	-	✗	✗
Approximate Minimum Diameter	COCOON	Accepted	-	-	✗	✗
Unit Covering in Color-Spanning Set Model	WALCOM	Accepted	-	-	✗	✗

جدول ۱.۷: مقاله‌های استخراج شده در طول دوران پژوهش

فهرست مراجع

[1] https://www.euronews.com/2018/08/12/caspian-nations-agree-on\-division-of-oil-and-gas-spoils. 3

[2] http://www.spliddit.org. 4

[3] Reza Alijani, Majid Farhadi, Mohammad Ghodsi, Masoud Seddighin, and Ahmad S Tajik. Envy-free mechanisms with minimum number of cuts. In *Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2017.

[4] Georgios Amanatidis, Georgios Birmpas, George Christodoulou, and Evangelos Markakis. Truthful allocation mechanisms without payments: Characterization and implications on fairness. In *Proceedings of the 2017 ACM Conference on Economics and Computation*, pages 545–562. ACM, 2017. 15, 21, 67, 71

[5] Georgios Amanatidis, Georgios Birmpas, and Evangelos Markakis. On truthful mechanisms for maximin share allocations. In *Proceedings of the Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 31–37. AAAI Press, 2016. 15, 41

[6] Haris Aziz and Simon Mackenzie. A discrete and bounded envy-free cake cutting protocol for any number of agents. In *Foundations of Computer Science (FOCS), 2016 IEEE 57th Annual Symposium on*, pages 416–427. IEEE, 2016. 14, 78

[7] Haris Aziz, Gerhard Rauchecker, Guido Schryen, and Toby Walsh. Algorithms for max-min share fair allocation of indivisible chores. In *AAAI*, volume 17, pages 335–341, 2017. 15, 77

[8] Haris Aziz and Chun Ye. Cake cutting algorithms for piecewise constant and piecewise uniform valuations. In *International Conference on Web and Internet Economics*, pages 1–14. Springer, 2014. 77, 78

[9] Julius B Barbanel and Steven J Brams. Cake division with minimal cuts: envy-free procedures for three persons, four persons, and beyond. *Mathematical Social Sciences*, 48(3):251–269, 2004. 77

[10] Siddharth Barman and Sanath Kumar Krishna Murthy. Approximation algorithms for maximin fair division. In *Proceedings of the 2017 ACM Conference on Economics and Computation*, pages 647–664. ACM, 2017. 15, 16, 21, 43

[11] MohammadHossein Bateni, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Morteza Zadimoghaddam. Submodular secretary problem and extensions. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 9(4):32, 2013. 11, 42

[12] Xiaohui Bei, Ning Chen, Xia Hua, Biaoshuai Tao, and Endong Yang. Optimal proportional cake cutting with connected pieces. In *Twenty-sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2012. 77

[13] Xiaohui Bei, Ning Chen, Guangda Huzhang, Biaoshuai Tao, and Jiajun Wu. Cake cutting: envy and truth. In *Proceedings of the 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 3625–3631. AAAI Press, 2017. 99

[14] Ivona Bezáková and Varsha Dani. Allocating indivisible goods. *ACM SIGecom Exchanges*, 5(3):11–18, 2005. 16, 73, 74

[15] Kshipra Bhawalkar and Tim Roughgarden. Welfare guarantees for combinatorial auctions with item bidding. In *Proceedings of the twenty-second annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms*, pages 700–709. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011. 53

[16] Liad Blumrosen and Shahar Dobzinski. Welfare maximization in congestion games. In *Proceedings of the 7th ACM conference on Electronic commerce*, pages 52–61. ACM, 2006. 53

[17] Sylvain Bouveret and Michel Lemaître. Characterizing conflicts in fair division of indivisible goods using a scale of criteria. In *Proceedings of the 2014 international conference on Autonomous agents and multi-agent systems*, pages 1321–1328. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2014. 15, 20

[18] S.J. Brams. *Mathematics and Democracy: Designing Better Voting and Fair-Division Procedures*. Princeton University Press, 2009. 1

[19] Steven J Brams. *Game theory and politics*. Courier Corporation, 2011. 1

[20] Steven J Brams, Michael A Jones, Christian Klamler, et al. Better ways to cut a cake. *Notices of the AMS*, 53(11):1314–1321, 2006. 78

[21] Steven J Brams and Alan D Taylor. An envy-free cake division protocol. *The American Mathematical Monthly*, 102(1):9–18, 1995. 2

[22] Steven J Brams and Alan D Taylor. *Fair Division: From cake-cutting to dispute resolution*. Cambridge University Press, 1996. 62

[23] Steven J Brams and Alan D Taylor. *The win-win solution: guaranteeing fair shares to everybody*. WW Norton & Company, 2000. 1

[24] Eric Budish. The combinatorial assignment problem: Approximate competitive equilibrium from equal incomes. *Journal of Political Economy*, 119(6):1061–1103, 2011. 15, 20, 64, 71

[25] Ioannis Caragiannis, John K Lai, and Ariel D Procaccia. Towards more expressive cake cutting. In *IJCAI*, volume 22, page 127, 2011. 77

[26] Deeparnab Chakrabarty, Julia Chuzhoy, and Sanjeev Khanna. On allocating goods to maximize fairness. In *Foundations of Computer Science, 2009. FOCS'09. 50th Annual IEEE Symposium on*, pages 107–116. IEEE, 2009. 16

[27] Yiling Chen, John K Lai, David C Parkes, and Ariel D Procaccia. Truth, justice, and cake cutting. *Games and Economic Behavior*, 77(1):284–297, 2013. 77, 78, 99

[28] George Christodoulou, Annamária Kovács, and Michael Schapira. Bayesian combinatorial auctions. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 820–832. Springer, 2008. 53

[29] Richard Cole, Nikhil R Devanur, Vasilis Gkatzelis, Kamal Jain, Tung Mai, Vijay V Vazirani, and Sadra Yazdanbod. Convex program duality, fisher markets, and nash social welfare. In *18th ACM Conference on Economics and Computation, EC 2017*. Association for Computing Machinery, Inc, 2017. 16

[30] Xiaotie Deng, Qi Qi, and Amin Saberi. Algorithmic solutions for envy-free cake cutting. *Operations Research*, 60(6):1461–1476, 2012. 14

[31] John P Dickerson, Jonathan R Goldman, Jeremy Karp, Ariel D Procaccia, and Tuomas Sandholm. The computational rise and fall of fairness. In *AAAI*, volume 14, pages 1405–1411, 2014. 71

[32] Shahar Dobzinski, Noam Nisan, and Michael Schapira. Approximation algorithms for combinatorial auctions with complement-free bidders. In *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 610–618. ACM, 2005. 13

[33] Ehsan Emamjomeh-Zadeh, Mohammad Ghodsi, Hamid Homapour, and Masoud Seddighin. Unit covering in color-spanning set model. In *International Workshop on Algorithms and Computation*, pages 44–52. Springer, 2015.

[34] Shimon Even and Azaria Paz. A note on cake cutting. *Discrete Applied Mathematics*, 7(3):285–296, 1984. 14

[35] Alireza Farhadi, MohammadTaghi Hajiaghayi, Mohammad Ghodsi, Sebastien Lahaie, David Pennock, Masoud Seddighin, Saeed Seddighin, and Hadi Yami. Fair allocation of indivisible goods to asymmetric agents. *Journal of Artificial Intelligence Research*, pages 1–20.

[36] Alireza Farhadi, MohammadTaghi Hajiaghayi, Mohammad Ghodsi, Sebastien Lahaie, David Pennock, Masoud Seddighin, Saeed Seddighin, and Hadi Yami. Fair allocation of indivisible goods to asymmetric agents. In *Proceedings of the 16th Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems*, pages 1535–1537. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2017. 15, 63, 71, 72

[37] Uriel Feige. On maximizing welfare when utility functions are subadditive. *SIAM Journal on Computing*, 39(1):122–142, 2009. 11, 13, 42, 53

[38] Uriel Feige, Vahab S Mirrokni, and Jan Vondrak. Maximizing non-monotone submodular functions. In *Foundations of Computer Science, 2007. FOCS'07. 48th Annual IEEE Symposium on*, pages 461–471. IEEE, 2007. 11, 13, 42

[39] Uriel Feige and Jan Vondrak. Approximation algorithms for allocation problems: Improving the factor of 1-1/e. In *FOCS*, pages 667–676. IEEE, 2006. 13

[40] Michal Feldman, Hu Fu, Nick Gravin, and Brendan Lucier. Simultaneous auctions are (almost) efficient. In *Proceedings of the forty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 201–210. ACM, 2013. 53

[41] Michal Feldman, Nick Gravin, and Brendan Lucier. Combinatorial auctions via posted prices. In *Proceedings of the twenty-sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 123–135. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2015. 13, 53

[42] Duncan K Foley. Resource allocation and the public sector. *YALE ECON ESSAYS, VOL 7, NO 1, PP 45-98, SPRING 1967. 7 FIG, 13 REF.*, 1967. 13

[43] Hu Fu, Robert Kleinberg, and Ron Lavi. Conditional equilibrium outcomes via ascending price processes with applications to combinatorial auctions with item bidding. In *EC*, page 586. Citeseer, 2012. 53

[44] Mohammad Ghodsi, MohammadTaghi HajiAghayi, Masoud Seddighin, Saeed Seddighin, and Hadi Yami. Fair allocation of indivisible goods: Improvements and generalizations. *Mathematics of Operations Research*.

[45] Mohammad Ghodsi, MohammadTaghi HajiAghayi, Masoud Seddighin, Saeed Seddighin, and Hadi Yami. Fair allocation of indivisible goods: Improvements and generalizations. In *Proceedings of the 2018 ACM Conference on Economics and Computation*, pages 539–556. ACM, 2018. 20, 21, 43, 61

[46] Mohammad Ghodsi, Hamid Homapour, and Masoud Seddighin. Approximate minimum diameter. In *International Computing and Combinatorics Conference*, pages 237–249. Springer, 2017.

[47] Mohammad Ghodsi, Mohamad Latifian, Arman Mohammadi, Sadra Moradian, and Masoud Seddighin. Rent division among groups. In *International Conference on Combinatorial Optimization and Applications*, pages 577–591. Springer, 2018.

[48] Mohammad Ghodsi, Mohammad Latifian, and Masoud Seddighin. On the distortion value of the elections with abstention. In *AAAI*, 2019.

[49] Mohammad Ghodsi, Hamed Saleh, and Masoud Seddighin. Fair allocation of indivisible items with externalities. *TheWebConf*, 2019.

[50] Daniel Golovin. *Max-min fair allocation of indivisible goods*. Citeseer, 2005. 11, 42

[51] Laurent Gourvès and Jérôme Monnot. Approximate maximin share allocations in matroids. In Dimitris Fotakis, Aris Pagourtzis, and Vangelis Th. Paschos, editors, *Algorithms and Complexity*, pages 310–321, 2017. 21

[52] Wassily Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American statistical association*, 58(301):13–30, 1963. 72

[53] Victor Hugo. *Les misérables*. Culture commune, 2012. 1

[54] Ian Kash, Ariel D Procaccia, and Nisarg Shah. No agent left behind: Dynamic fair division of multiple resources. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 51:579–603, 2014. 62

[55] David Kurokawa, Ariel D Procaccia, and Junxing Wang. When can the maximin share guarantee be guaranteed? In *AAAI*, volume 16, pages 523–529, 2016. 71, 72

[56] Euiwoong Lee. Apx-hardness of maximizing nash social welfare with indivisible items. *Information Processing Letters*, 122:17–20, 2017. 16

[57] R Paes Leme. Gross substitutability: An algorithmic survey. *preprint*, 2014. 13

[58] Richard J Lipton, Evangelos Markakis, Elchanan Mossel, and Amin Saberi. On approximately fair allocations of indivisible goods. In *Proceedings of the 5th ACM conference on Electronic commerce*, pages 125–131. ACM, 2004. 78

[59] Kaveh Madani, Omid M Rouhani, Ali Mirchi, and Sona Gholizadeh. A negotiation support system for resolving an international trans-boundary natural resource conflict. *Environmental Modelling & Software*, 51:240–249, 2014. 3

[60] Kaveh Madani, Majid Sheikhmohammady, Soroush Mokhtari, Mojtaba Moradi, and Petros Xanthopoulos. Social planner's solution for the caspian sea conflict. *Group Decision and Negotiation*, 23(3):579–596, 2014. 3

[61] Avishay Maya and Noam Nisan. Incentive compatible two player cake cutting. In *International Workshop on Internet and Network Economics*, pages 170–183. Springer, 2012. 78

[62] Igal Milchtaich. Congestion games with player-specific payoff functions. *Games and economic behavior*, 13(1):111–124, 1996. 53

[63] Hervé Moulin. *Fair division and collective welfare*. MIT press, 2004. 1

[64] Ariel D Procaccia. Thou shalt covet thy neighbor's cake. In *IJCAI*, pages 239–244, 2009. 14

[65] Ariel D Procaccia and Junxing Wang. Fair enough: Guaranteeing approximate maximin shares. In *Proceedings of the fifteenth ACM conference on Economics and computation*, pages 675–692. ACM, 2014. 15, 16, 20, 21, 59, 137

[66] Ariel Dim Procaccia. Cake cutting algorithms. In *Handbook of Computational Social Choice, chapter 13*. Citeseer, 2015. 1, 77

[67] Howard Raiffa. *The art and science of negotiation.* Harvard University Press, 1982. 1

[68] Masoud Seddighin, Majid Farhadi, Mohammad Ghodsi, Reza Alijani, and Ahmad S Tajik. Expand the shares together: Envy-free mechanisms with a small number of cuts. *Algorithmica*, pages 1–28. 79, 100

[69] Nisarg Shah. *Optimal Social Decision Making.* PhD thesis, Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA, 2016. 4

[70] Majid Sheikhmohammady, D Marc Kilgour, and Keith W Hipel. Modeling the caspian sea negotiations. *Group Decision and Negotiation*, 19(2):149–168, 2010. 3

[71] Hugo Steinhaus. The problem of fair division. *Econometrica*, 16(1), 1948. 13

[72] Walter Stromquist. How to cut a cake fairly. *American Mathematical Monthly*, pages 640–644, 1980. 14, 77, 78

[73] Walter Stromquist. Envy-free cake divisions cannot be found by finite protocols. *the electronic journal of combinatorics*, 15(1):11, 2008. 14, 77

[74] Vasilis Syrgkanis. Bayesian games and the smoothness framework. *arXiv preprint arXiv:1203.5155*, 2012. 53

[75] Hans Petter Wollebæk Toset, Nils Petter Gleditsch, and Håvard Hegre. Shared rivers and interstate conflict. *Political Geography*, 19(8):971–996, 2000. 1

[76] Jan Vondrák. Optimal approximation for the submodular welfare problem in the value oracle model. In *Proceedings of the fortieth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 67–74. ACM, 2008. 13

[77] Wei Wang, Ben Liang, and Baochun Li. Multi-resource fair allocation in heterogeneous cloud computing systems. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 26(10):2822–2835, 2015. 62

[78] Gerhard J Woeginger and Jiří Sgall. On the complexity of cake cutting. *Discrete Optimization*, 4(2):213–220, 2007. 14

پیوست آ

اثبات‌های حذف شده فصل سوم

اثبات.[لم ۹.۳] دور L در G_C را در نظر بگیرید. به ازای هر راس $v_j \in L$، حداقل یک راس $v_i \in L$ وجود دارد که فرد i به فرد j رشک می‌ورزد. بنابراین، با در نظر گرفتن S به عنوان مجموعه افرادی که راس آنها در L حاضر است، هیچ یک از افراد S بازنده نیستند. با استدلال مشابه، هیچ یک از افراد S برنده نیز نیستند. اما این با فرض ما که C فاقد چرخه رشک است، در تناقض است. ■

اثبات.[لم ۱۲.۳] ما اثبات شرط اول را با جزئیات بیشتر شرح می‌دهیم. اثبات شرط دوم نیز مانند شرط اول است.

شرط اول: فرض کنید که چنین راسی وجود نداشته باشد. هدف ما این است که یک تطابق جدید از H را با تعداد یال‌های یکسان و وزن بیشتر پیدا کنیم. برای این کار، ما یک گراف جهت‌دار H' از روی H به این صورت می‌سازیم: به ازای هر $\hat{y}_j \in T$ ما یک راس v_j در $V(H')$ در نظر می‌گیریم. به علاوه، یک یال جهت‌دار از v_j به v_i در H' وجود دارد، اگر و تنها اگر در H داشته باشیم: $w(\hat{x}_j, \hat{y}_j) < w(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$.

حال اگر یک راس v_j با درجه خروجی صفر در H' وجود داشته باشد، در این صورت $\hat{y}_j$ برنده مطلوب در T است، زیرا که

$$\forall \hat{y}_i \in H, w(\hat{x}_j, \hat{y}_j) \geq w(\hat{x}_i, \hat{y}_j).$$

در غیر این صورت، درجه خروجی هر راس در T غیرصفر است. در این حالت، H دارای حداقل یک دور $L = \langle v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{|L|}} \rangle$ است. حال اگر ما تطابق M را با حذف یال‌های

$$\{(\hat{y}_{l_1}, \hat{x}_{l_1}), (\hat{y}_{l_2}, \hat{x}_{l_2}), \dots, (\hat{y}_{l_{|L|}}, \hat{x}_{l_{|L|}})\}$$

و اضافه کردن یال‌های

$$\{(\hat{y}_{l_1}, \hat{x}_{l_2}), (\hat{y}_{l_2}, \hat{x}_{l_3}), \dots, (\hat{y}_{l_{|L|}}, \hat{x}_{l_1})\}$$

به‌روز کنیم، وزن تطابق جدید بیشتر از قبل خواهد بود. دقت کنید که با توجه به تعریف یال در H'، داریم

$$w(\hat{x}_{l_۲}, \hat{y}_{l_۱}) > w(\hat{x}_{l_۱}, \hat{y}_{l_۱}), w(\hat{x}_{l_۳}, \hat{y}_{l_۲}) > w(\hat{x}_{l_۲}, \hat{y}_{l_۲}), \dots, w(\hat{x}_{l_۱}, \hat{y}_{l_{|L|}}) > w(\hat{x}_{l_{|L|}}, \hat{y}_{l_{|L|}}).$$

اما این با این واقعیت که M یک MCMWM از H بود در تناقض است.

شرط دوم: مشابه اثبات شرط اول، ما یک گراف جهت‌دار H' از روی H می‌سازیم، به این صورت که به ازای هر راس $\hat{y}_j$ در T، یک راس v_j در H' وجود دارد. به ازای هر جفت $\hat{y}_i$ و $\hat{y}_j$ که اعضای T هستند، ما v_i را به v_j با استفاده از یک یال جهت‌دار در H' متصل می‌کنیم، اگر در H داشته باشیم

$$w(\hat{x}_j, \hat{y}_i) > w(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$$

و $(\hat{x}_j, \hat{y}_i) \in E(H)$. دقت کنید که اگر H' شامل یک راس v_i با درجه ورودی برابر با صفر باشد، در این صورت $\hat{y}_i$ بازنده خواسته شده در T است. بنابراین، فرض کنید که هیچ راسی در H' درجه ورودی صفر ندارد و بنابراین، H' یک دور جهت‌دار دارد. با استدلال مشابه شرط اول، می‌توان در این حالت نیز یک تطابق با وزن بیشتر پیدا کرد که این با فرض ما در تناقض است.

شرط سوم: اگر $w(\hat{x}_i, \hat{y}_i) < w(\hat{x}_j, \hat{y}_i)$ باشد، یال بین $\hat{x}_i$ و $\hat{y}_i$ را در $(\hat{x}_j, \hat{y}_i)$ در M عوض می‌کنیم، که منتج به یک تطابق بزرگتر با وزن بیشتر خواهد شد که با بیشینه بودن M در تناقض است. ■

اثبات.[لم ۱۳.۳] با توجه به تعریف، هیچ یالی بین راس‌های $F_{G_{۱/۲}}(M, \mathcal{X}_{۱/۲})$ و $\mathcal{Y}_{۱/۲} \backslash N(F_{G_{۱/۲}}(M, \mathcal{X}_{۱/۲}))$ در $G_{۱/۲}$ وجود ندارد. به علاوه، همه اشیا دارای ارزش کمتر از ۱/۲ برای افرادی هستند که اشاره به راس‌های $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_{۱/۲}$ دارند. بنابراین، به ازای هر فرد i و هر شیء m_j با $y_i \in \mathcal{Y} \setminus N(F_{G_{۱/۲}}(M, \mathcal{X}_{۱/۲}))$ و $x_j \in F_{G_{۱/۲}}(M, \mathcal{X}_{۱/۲})$ داریم $V_i(m_j) < ۱/۲$. با توجه به این واقعیت که افرادی که در خوشه‌بندی $\mathcal{C}_۱$ انتخاب نشده‌اند، یا به $\mathcal{C}_۲$ و یا به $\mathcal{C}_۳$ متعلق هستند، داریم:

$$\forall j \in \mathcal{C}_۱ \qquad V_i(f_j) < ۱/۲.$$

■

اثبات.[لم ۱۵.۳] ابتدا، ما لم آ.۱ را اثبات می‌کنیم. این لم نشان می‌دهد که یک تطابق در $G_۱$ وجود دارد که تمام راس‌های موجود در $W_۱$ را آلوده می‌کند. لم آ.۱ در نتیجه کاهش‌ناپذیری است. در واقع، ما نشان می‌دهیم که اگر شرایط لم آ.۱ برقرار نباشد، نمونه را می‌توان کاهش داد.

لم آ.۱. *برای گراف $G_۱$ داریم:*

$$\forall R \subseteq W_۱, \qquad |N(R)| > |R|.$$

اثبات. فرض کنید $M_۱$ یک تطابق بیشینه در $G_۱$ باشد. با توجه به لم ۱۳.۲ تنها کافی است نشان دهیم که $F_{G_۱}(M_۱, W_۱)$ تهی است. فرض کنید این گونه نباشد. همان‌طور که گفته شد، یک تطابق بین $F_{G_۱}(M_۱, W_۱)$ و $N(F_{G_۱}(M_۱, W_۱))$ وجود دارد که همه راس‌های $N(F_{G_۱}(M_۱, W_۱))$ را آلوده می‌کند. فرض کنید

$$M_S = \{(x_{j_۱}, y_{i_۱}), (x_{j_۲}, y_{i_۲}), \dots, (x_{j_k}, y_{i_k})\}$$

این تطابق باشد. ما نشان می‌دهیم که مجموعه افراد

$$T = \{i_۱, i_۲, \dots, i_k\}$$

و اشیای

$$S = \{f_{i_۱}, m_{j_۱}, f_{i_۲}, m_{j_۲}, \dots, f_{i_k}, m_{j_k}\}.$$

همه شرایط لم ۵.۳ را دارند. (دقت کنید که f_{i_l} تنها شامل یک شیء است). شرط اول بدیهی است: $|S| = ۲|T|$. با توجه به تعریف یال در $G_۱$، می‌دانیم که $f_{i_l} \cup \{m_{j_l}\}$ فرد i_l را راضی می‌کند و بنابراین، شرط دوم نیز برقرار است. برای شرط سوم، باید نشان دهیم که به ازای هر فرد i_l در T داریم:

$$V_{i'}(f_{i_l} \cup \{m_{j_l}\}) < ۱ \qquad \forall i' \notin T.$$

برای اثبات این امر، ما دو حالت را به صورت جداگانه در نظر می‌گیریم. اول، اگر $i' \notin C_۱$ باشد، با توجه به لم ۱۳.۳ داریم $V_{i'}(f_{i_l}) < ۱/۲$ و در نتیجه مشاهده ۱۴.۳ داریم $V_{i'}(\{m_{j_l}\}) < ۱/۲$ که این یعنی $V_{i'}(f_{i_l} \cup \{m_{j_l}\}) < ۱$.

به علاوه، حالتی را در نظر بگیرید که $i' \in C_۱$. دقت کنید که چون $i' \notin T$، راس $y_{i'}$ متعلق به $N(F_{G_۱}(M_۱, W_۱))$ نیست، که این یعنی

$$y_{i'} \in V_{C_۱} \setminus N(F_{G_۱}(M_۱, W_۱)).$$

با توجه به تعریف $N(F_{G_۱}(M_۱, W_۱))$، هیچ یالی بین $y_{i'}$ و x_{j_l} وجود ندارد، و بنابراین $V_{i'}(\{m_{j_l}\}) < \epsilon_{i'} \leq ۱/۴$. از سوی دیگر، با فرض کاهش‌ناپذیری و این واقعیت که f_{i_l} شامل دقیقا یک شیء است، داریم $V_{i'}(f_{i_l}) < ۳/۴$. بنابراین، $V_{i'}(f_{i_l} \cup \{m_{j_l}\}) < ۱$.

در نتیجه، به ازای هر فرد $i' \notin T$ داریم $V_{i'}(f_{i_l} \cup \{m_{j_l}\}) < ۱$ که این یعنی شرط سوم لم ۵.۳ نیز برقرار است. بنابراین، با توجه به لم ۵.۳ نمونه کاهش‌پذیر است که با فرض ما در تناقض است. ■

ادامه اثبات لم ۱۵.۳ به این صورت است: از آنجا که ما از یک MCMWM برای ساخت خوشه $\mathcal{C}_۱$ استفاده کردیم، با توجه به لم ۱۲.۳، خوشه $\mathcal{C}_۱$ فاقد چرخه رشک است. ترتیب توپولوژیکی افراد حاضر در $\mathcal{C}_۱$ را در نظر بگیرید و فرض کنید p_{a_i} مکان فرد i در این ترتیب باشد. به بیان دقیق‌تر، $p_i = k$ اگر فرد i نفر k ام در ترتیب توپولوژیکی $\mathcal{C}_۱$ باشد.

با توجه به لم آ.۱ شرایط قضیه هال برای گراف $G_۱$ برقرار است و در نتیجه یک تطابق در $G_۱$ وجود دارد که همه راس‌های داخل $W_۱$ را آلوده کند. در میان همه تطابق‌های بیشینه $G_۱$، فرض کنید که $M_۱$ تطابق بیشینه‌ای باشد که مقدار

$$p_{M_۱} = \sum_{y_i \in M_۱} p_{a_i}$$

را کمینه می‌کند. ما ادعا می‌کنیم که $M_۱$ همان تطابق دلخواه ما است. برای اثبات این ادعا، ما باید نشان دهیم که برای هر یال $(x_i, y_j) \in M_۱$ و هر راس آلوده نشده $y_k \in N(x_i)$، فرد j یک بازنده برای مجموعه $\{j, k\}$ است، که این یعنی k به فرد j رشک نمی‌ورزد. دقت کنید که اگر فرد k به فرد j رشک بورزد، فرد k در ترتیب توپولوژیکی $\mathcal{C}_۱$ زودتر از j آمده است که این یعنی $p_k < p_j$. بنابراین، اگر ما (x_i, y_j) را با (x_i, y_k) در $M_۱$ جایگزین کنیم، مقدار $p_{M_۱}$ کاهش می‌یابد که این با کمینه بودن $p_{M_۱}$ در تناقض است. ■

اثبات.[لم۱۷.۳] فرض کنید m_k شیء ی باشد که به فرد j در اصلاح خوشه $\mathcal{C}_۱$ اعطا شده است. از آنجا که $x_k \in W_۱$ بر اساس مشاهده ۱۴.۳، داریم $V_i(g_j) < ۱/۲$. ■

اثبات.[لم ۱۸.۳] فرض کنید j یک فرد در $\mathcal{S}_۱^۲$ باشد. در ابتدا، دقت کنید که $|f_j| = |g_j| = ۱$. لم ۱۳.۳ به همراه مشاهده ۱۴.۳ بیان می‌کند که $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$. بر اساس نامساوی (۱.۳) داریم:

$$\mathsf{MMS}_{V_i}^{|\mathcal{N} \setminus j|}(\mathcal{M} \setminus f_j \cup g_j) \geq ۱. \tag{۱.آ}$$

دقت کنید که عبارت (۱.آ) به ازای تمام افراد حاضر در $\mathcal{S}_۱^۲$ برقرار است. اعمال نامساوی (۱.آ) برای همه افراد حاضر در $\mathcal{S}_۱^۲$ نتیجه می‌دهد که

$$\mathsf{MMS}_{V_i}^{|\mathcal{N} \setminus \mathcal{S}_۱^۲|}(\mathcal{M} \setminus \bigcup_{y_i \in \mathcal{S}_۱^۲} f_i \cup g_i) \geq ۱.$$

■

اثبات.[لم ۲۰.۳] بر اساس مشاهده ۱۶.۳ به ازای هر فرد $k \in \mathcal{C}_۱$ و هر $x_j \in \mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$ داریم $V_k(\{b_j\}) < \epsilon_k$. با توجه به جمعی بودن توابع، به ازای هر $k \in \mathcal{C}_۱$ داریم:

$$\forall x_i, x_j \in \mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲} \qquad V_k(\{b_i, b_j\}) < ۲\epsilon_k.$$

■

اثبات.[لم ۲۱.۳] به عنوان فرض خلف، در نظر بگیرید که مسئله ۳/۴ـکاهش‌ناپذیر است، و یک راس $y_k \in \mathcal{Y}$ وجود دارد که $V_k(\{b_i, b_j\}) \geq ۳/۴$. بر اساس لم ۴.۳، یک فرد $k' \neq a_k$ وجود دارد که

$$V_{k'}(\{b_i, b_j\}) \geq ۱.$$

از آنجا که توابع ارزش جمعی است، یکی از دو نامساوی $V_{k'}(\{b_i\}) \geq ۱/۲$ یا $V_{k'}(\{b_j\}) \geq ۱/۲$ برقرار است، که این از آنجا که می‌دانیم هر دو شیء x_i و x_j متعلق به $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$ هستند، تناقض است. ■

اثبات.[لم ۲۳.۳] ما لم ۲۳.۳ را در دو مرحله اثبات می‌کنیم. ابتدا، نشان می‌دهیم که

$$|F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})| \leq |N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))|. \tag{آ.۲}$$

سپس نشان می‌دهیم

$$|F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})| \geq |N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))|. \tag{آ.۳}$$

این دو نامساوی در کنار هم نتیجه می‌دهد:

$$|F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})| = |N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))|. \tag{آ.۴}$$

برای نشان دادن نامساوی (آ.۲)**،** در نظر داشته باشید که قبل از شروع الگوریتم ۱، داریم:

$$F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}) = \emptyset$$

و

$$N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})) = \emptyset$$

و همه راس‌های حاضر در $\mathcal{X}'_{۱/۲}$ با M' آلوده شده‌اند. در هر مرحله از الگوریتم ۱، ما یک راس جدید به $\mathcal{X}'_{۱/۲}$ اضافه می‌کنیم، و اندازه تطابق بیشینه M' به اندازه یک واحد افزایش می‌یابد. بنابراین، در هر مرحله از الگوریتم ۱، همه راس‌های در $\mathcal{X}'_{۱/۲}$ توسط M' آلوده شده باقی می‌ماند. از آنجا که $F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}) \subseteq \mathcal{X}'_{۱/۲}$ است، همه راس‌های $F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})$ نیز توسط M' آلوده شده‌اند، که این یعنی

$$|F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})| \leq |N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))|.$$

برای اثبات نامساوی (آ.۳)، دقت کنید که با توجه به تعریف، $F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})$ این خاصیت را دارد که یک تطابق از $F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})$ به $N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))$ وجود دارد که همه راس‌های $N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))$ را آلوده می‌کند. بنابراین، داریم:

$$|F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})| \geq |N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))|.$$

■

اثبات.[لم ۲۴.۳] ابتدا، ما مشخص می‌کنیم که کدام افراد در $\mathcal{C}_۳$ قرار دارند. به بیان ساده، افرادی که در خوشه‌های اول و دوم نیستند، در خوشه سوم هستند. بنابراین، افرادی که در خوشه $\mathcal{C}_۳$ هستند، اشاره به راس‌های

$$\mathcal{Y}' \setminus N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))$$

$$= \left(\mathcal{Y}' \setminus \mathcal{Y}'_{۱/۲}\right) \cup \left(\mathcal{Y}'_{۱/۲} \setminus N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))\right)$$

دارند. **عبارت** $\mathcal{Y}' \setminus \mathcal{Y}'_{۱/۲}$ اشاره به راس‌هایی دارد که در $G'_{۱/۲}$ فیلتر شده‌اند که این یعنی هیچ یالی با وزن حداقل ۱/۲ مجاور این راس‌ها نیست. از سوی دیگر، به ازای هر فرد $j \in \mathcal{C}_۲$ نماد f_j معادل یک راس از $F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})$ است. بنابراین، به ازای هر فرد $j \in \mathcal{C}_۲$ و هر فرد i که راس مربوط به آن در $\mathcal{Y}' \setminus \mathcal{Y}'_{۱/۲}$ قرار دارد، داریم: $V_i(f_j) < ۱/۲$.

حال، عبارت $\mathcal{Y}'_{۱/۲} \setminus N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))$ **را در نظر بگیرید.** بر اساس تعریف، راس‌های حاضر در $F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})$ تنها مجاور راس‌های $N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))$ در $G'_{۱/۲}$ هستند. با توجه به تعریف یال در $G'_{۱/۲}$ به ازای هر فرد $j \in \mathcal{C}_۲$ و فرد i با $y_i \in \mathcal{Y}'_{۱/۲} \setminus N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))$ داریم $V_i(f_j) < ۱/۲$.

بنابراین، به ازای همه $i \in \mathcal{C}_۳$ داریم:

$$\forall j \in \mathcal{C}_۲ \qquad V_i(f_j) < ۱/۲.$$

■

اثبات.[لم ۲۶.۳] با توجه به مشاهده ۱۶.۳، بعد از اصلاح خوشه $\mathcal{C}_۱$ همه اشیایی که راس آنها در $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$ قرار دارد دارای ارزش کمتر از ϵ_j برای هر فرد $j \in \mathcal{C}_۱$ هستند. به علاوه، دقت کنید که به ازای هر فرد $i \in \mathcal{S}^r_۲$، مجموعه g_i شامل یک شیء است که راس مربوط به آن در $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$ قرار دارد. بنابراین، به ازای هر $j \in \mathcal{C}_۱$ داریم $V_j(g_i) < \epsilon_j$. ■

اثبات.[لم ۲۷.۳] بر اساس الگوریتم ۲، به ازای هر فرد $i \in \mathcal{S}^r_۲$، راس مربوط به تنها عضو g_i در $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$ قرار دارد. بنابراین، به ازای هر فرد $j \notin \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲$ داریم $V_j(g_i) < ۱/۲$. نهایتا، دقت کنید که افراد باقی‌مانده که متعلق به $\mathcal{C}_۱$ و $\mathcal{C}_۲$ نیستند، به $\mathcal{C}_۳$ تعلق دارند. ■

اثبات.[لم ۲۸.۳] الگوریتم ۱ زمانی تمام می‌شود که هیچ جفت قابل قبولی در $T = \mathcal{Y}' \setminus N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲}))$ وجود نداشته باشد. به علاوه، با توجه به تعریف، به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۳$ داریم:

$$y_i \in \mathcal{Y}' \setminus N(F_{G'_{۱/۲}}(M', \mathcal{X}'_{۱/۲})).$$

اما در انتهای الگوریتم ۱ هیچ جفتی از راس‌ها برای فرد i قابل قبول نیست، که این یعنی به ازای هر $x_j, x_k \in \mathcal{X}'' \setminus \mathcal{X}''_{۱/۲}$، داریم $V_i(\{m_j, m_k\}) < ۱/۲$ (در نظر داشته باشید که $\mathcal{X}'' \setminus \mathcal{X}''_{۱/۲} \subseteq \mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$). ■

اثبات.[لم ۳۰.۳] در این نقطه، به ازای هر فرد $i \in \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}^s_۳$ رابطه $|f_j| \leq ۲$ برقرار است. اگر داشته باشیم $|f_i| = ۱$، آنگاه بر اساس لم ۳.۳ ارزش اشیای داخل f_i کمتر از ۳/۴ برای همه افراد دیگر است. به‌علاوه، اگر $|f_i| = ۲$ در این صورت f_i اشاره به یک راس ادغام‌شده دارد. در این حالت، با توجه به لم ۲۰.۳ و ۲۱.۳ ارزش f_i برای هر فرد دیگر کمتر از ۳/۴ است. ■

اثبات.[لم ۳۴.۳] بر اساس لم ۲۸.۳ ارزش هر جفت از اشیا در $\mathcal{F}$ برای i کمتر از ۱/۲ است. بنابراین، f_i شامل حداقل سه شیء است. فرض کنید m_k یک شیء دلخواه در f_i باشد. از آنجا که $|f_i| \geq ۳$ مجموعه $f_i \setminus \{m_k\}$ ناتهی است. از سوی دیگر، اندازه S مینیمال است و بنابراین، هیچ‌کدام از $f_i \setminus m_k$ و $\{m_k\}$ برای

افراد قابل قبول نیست. بر اساس تعریف قابل قبول بودن، برای افراد $\mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}^s_۳ \cup \mathcal{C}^b_۳$ داریم:

$$\forall j \in \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}^s_۳ \cup \mathcal{C}^b_۳ \qquad V_j(f_i \setminus \{m_k\}) < \epsilon_j$$

و

$$\forall j \in \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}^s_۳ \cup \mathcal{C}^b_۳ \qquad V_j(\{m_k\}) < \epsilon_j$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$\forall j \in \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}^s_۳ \cup \mathcal{C}^b_۳ \qquad V_j(f_i) < ۲\epsilon_j.$$

■

اثبات.[لم ۳۵.۳] صورت لم به صورت بدیهی برای خوشه‌های $\mathcal{C}_۱$ و $\mathcal{C}_۲$ برقرار است، زیرا که حذف یک فرد از یک مجموعه بدون چرخه رشک، این خاصیت را حفظ می‌کند. برای $\mathcal{C}^s_۳$ ممکن است در مراحلی از الگوریتم، یک فرد به $\mathcal{C}^s_۳$ اضافه شود. ما نشان می‌دهیم که اضافه کردن یک فرد به $\mathcal{C}^s_۳$ باعث ایجاد چرخه رشک نخواهد شد.

برای فرض خلف، فرض کنید $\mathbb{R}_z$ اولین مرتبه‌ای باشد که اضافه کردن یک فرد i به $\mathcal{C}^s_۳$ منتج به یک مجموعه با چرخه رشک شده باشد. از آنجا که $\mathcal{C}^s_۳ \setminus \{i\}$ فاقد چرخه رشک است، هر زیرمجموعه از $\mathcal{C}^s_۳ \setminus \{i\}$ شامل حداقل یک برنده و یک بازنده است. به علاوه، با توجه به لم ۳۴.۳ داریم:

$$\forall j \in \mathcal{C}^s_۳, j \neq i, \qquad V_j(f_i) < ۲\epsilon_j. \tag{آ.۵}$$

دقت کنید که فرد i قبلا به $\mathcal{C}^f_۳$ تعلق داشته است. با توجه به تعریف $\mathcal{C}^f_۳$ داریم:

$$\forall j \in \mathcal{C}^s_۳, j \neq i, \qquad V_i(f_j) < ۱/۲. \tag{آ.۶}$$

نامساوی‌های (آ.۵) و (آ.۶) به صورت مشترک نتیجه می‌دهد که راس i برنده و بازنده هر زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{C}^s_۳$ است که شامل i است. این یعنی هر زیرمجموعه از $\mathcal{C}^s_۳$ شامل حداقل یک برنده و یک بازنده است، که این با فرض ما در تناقض است. ■

اثبات.[لم ۳۶.۳] اگر $i \prec_{pr} j$، در این صورت g_i برای فرد j مناسب نیست، زیرا که فرد با کمترین اولویت در هر مرحله از فاز دوم راضی می‌شود. بنابراین، $V_j(g_i) < \epsilon_j$. برای حالتی که $j \prec_{pr} i$ است، فرض کنید m_k

یک شیء دلخواه از g_i باشد. بنا بر این واقعیت که g_i کمینه است، $g_i \setminus \{m_k\}$ برای هیچ فردی قابل قبول نیست. بنابراین، $V_j(g_i \setminus \{m_k\}) < \epsilon_j$. از سوی دیگر، بنا بر مشاهدات ۱۶.۳ و ۲۵.۳ داریم $V_j(\{m_k\}) < \epsilon_j$. لذا، $V_j(g_i) < ۲\epsilon_j$. ∎

اثبات.[لم ۳۷.۳] فرض کنید $\mathbb{R}_z$ مرحله‌ای باشد که در آن i راضی شده است. در آن مرحله، اگر $j \in \mathcal{C}^f_۴$ باشد، در این صورت رابطه $V_j(g_i) < ۱/۲$ به طور بدیهی برقرار است. همچنین، چون در مرحله $\mathbb{R}_z$ رابطه $j \prec_{pr} i$ برقرار است، g_i برای j در ابتدا قابل قبول نبوده است. به یاد آورید که در هر مرحله، فردی که کمترین رتبه را در $\Phi(S)$ دارد انتخاب می‌شود.

به علاوه، اگر در مرحله $\mathbb{R}_z$ فرد j در $\mathcal{C}^s_۴ \cup \mathcal{C}^b_۴$ بوده باشد، بنا بر مشاهده ۱۶.۳ و ۲۵.۳ داریم $|S| \geq ۲$، زیرا که هیچ شیء ی به تنهایی نمی‌تواند فرد i را راضی کند. اگر $|S| = ۲$، آنگاه بر اساس مشاهده ۲۸.۳ خواهیم داشت: $V_j(g_i) < ۱/۲$. برای حالت $|S| > ۲$، فرض کنید m_k شیء ی در S با کمترین مقدار j باشد. بر اساس نتیجه ۲۹.۳، داریم $V_j(\{m_k\}) < ۱/۴$. همچنین، چون اندازه S کمینه است، $S \setminus \{m_k\}$ برای هیچ فردی قابل قبول نیست، و بنابراین، $V_j(S \setminus \{m_k\}) < \epsilon_j \leq ۱/۴$. در نتیجه، $V_j(S) < ۱/۲$. ∎

قبل از اثبات لم ۳۸.۳، لم‌های آ.۲، آ.۳ و آ.۴ را ثابت می‌کنیم.

لم آ.۲. *فرض کنید i فردی باشد که در $S_۴$ قرار دارد و فرض کنید $\mathbb{R}_z$ مرحله‌ای از فاز دوم باشد که فرد i راضی شده است. در این صورت، برای هر فرد دیگر j که در مرحله $\mathbb{R}_z$ داخل $\mathcal{C}^f_۴$ است، رابطه $V_j(g_i) < ۱/۲$ برقرار است.*

اثبات. در مرحله $\mathbb{R}_z$، فرد i یا متعلق به $\mathcal{C}^s_۴$ و یا متعلق به $\mathcal{C}^b_۴$ است. بنابراین، $j \prec_{pr} i$ و بنابراین، g_i برای فرد j در آن مرحله قابل قبول نبوده است. بنابراین، $V_j(g_i) < ۱/۲$. ∎

لم آ.۳. *فرض کنید فرد $i \in S_۴$ یک فرد راضی شده باشد و فرض کنید $\mathbb{R}_z$ مرحله‌ای باشد که در آن فرد i راضی شده است. در این صورت، به ازای هر فرد دیگر j که در آن مرحله متعلق به $\mathcal{C}^s_۴ \cup \mathcal{C}^b_۴$ است، یا $V_j(g_i) < \epsilon_j$ و یا $V_j(f_i) \leq ۳/۴ - \epsilon_j$.*

اثبات. اگر g_i برای فرد j مناسب نباشد، در این صورت شرایط لم به صورت بدیهی برقرار است. به علاوه، بر اساس تعریف، صورت لم برای افراد $\mathcal{C}^b_۴$ نیز درست است. بنابراین، تنها این می‌ماند که حالتی را در نظر بگیریم

که $j \in \mathcal{C}_{۴}^{s}$ و g_i برای فرد j مناسب است. بر اساس قوانین ترتیبی که افراد در فاز دوم انتخاب می‌شوند، داریم $i \prec_{pr} j$ و در نتیجه، i نمی‌تواند متعلق به $\mathcal{C}_{۴}^{b}$ باشد. بنابراین، $i \in \mathcal{C}_{۴}^{s}$. بر اساس مشاهده ۱۱.۳ و این واقعیت که $\prec_{pr}$ برای افراد داخل $\mathcal{C}_{۴}^{s}$ معادل $\prec_{o}$ است، داریم $V_j(f_i) \leq ۳/۴ - \epsilon_j$. ■

لم آ.۴. *در طول فاز دوم، به ازای هر فرد i در $\mathcal{C}_{۴}$ داریم:*

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_{۴}} V_i(f_j \cup g_j) < |\mathcal{S}_{۴}| + ۱/۴.$$

اثبات. برای اثبات لم آ.۴ ما نشان می‌دهیم که برای همه افراد $j \in \mathcal{S}_{۴}$ به غیر از حداکثر یک فرد، رابطه $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$ برقرار است. برای نشان دادن این امر، فرض کنید $\mathbb{R}_z$ مرحله‌ای از فاز دوم باشد که در آن فرد $j \in \mathcal{C}_{۴}$ راضی شده است. در ابتدا، دقت کنید که در $\mathbb{R}_z$، فرد j متعلق به $\mathcal{C}_{۴}^{b} \cup \mathcal{C}_{۴}^{s}$ است. به علاوه، در مرحله $\mathbb{R}_z$، فرد i متعلق به یکی از $\mathcal{C}_{۴}^{s}, \mathcal{C}_{۴}^{b}$ یا $\mathcal{C}_{۴}^{f}$ است.

اگر $i \in \mathcal{C}_{۴}^{f}$، در این صورت بر اساس لم آ.۲، داریم $V_i(g_j) < ۱/۲$. از سوی دیگر، بر اساس تعریف داریم $V_i(f_j) < ۱/۲$ و بنابراین، $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$.

حال، حالتی را در نظر بگیرید که $i \in \mathcal{C}_{۴}^{b} \cup \mathcal{C}_{۴}^{s}$. دقت کنید که بر اساس لم آ.۳ یا $V_i(f_j) \leq ۳/۴ - \epsilon_i$ و یا $V_i(g_j) < \epsilon_i$. اگر $V_i(g_j) < \epsilon_i$ در این صورت بر اساس لم ۳۰.۳ و ۳۴.۳ داریم $V_i(f_j) < ۳/۴$ و بنابراین $V_i(f_j \cup g_j) < ۳/۴ + \epsilon_i < ۱$.

برای حالتی که $V_i(f_j) \leq ۳/۴ - \epsilon_i$ فرض کنید m_l شیء ی در g_j با ارزش بیشینه برای i باشد. به خاطر مینیمال بودن تعداد اشیای داخل g_j، مجموعه $g_j \setminus \{m_l\}$ برای هیچ فردی قابل قبول نیست و بنابراین، $V_i(g_j \setminus \{m_l\}) < \epsilon_i$. به یاد داشته باشید که بر اساس نتیجه ۲۹.۳، حداکثر یک شیء m_k در $\mathcal{F}$ وجود دارد که $V_i(m_k) \geq ۱/۴$. به علاوه، رابطه $V_i(m_k) < ۱/۲$ برقرار است، زیرا که m_k به هیچ فردی در طول فاز اول تخصیص نیافته است. اگر $m_l \neq m_k$، آنگاه $V_i(g_j) < ۱/۴ + \epsilon_i$ و بنابراین

$$V_i(f_j \cup g_j) < ۳/۴ - \epsilon_i + ۱/۴ + \epsilon_i < ۱.$$

به علاوه، اگر $m_l = m_k$ باشد، آنگاه $V_i(g_j) < ۱/۲ + \epsilon_i$ برقرار است و بنابراین، $V_i(f_j \cup g_j) < ۳/۴ - \epsilon_i + ۱/۲ + \epsilon_i < ۵/۴$. اما این تنها در حداکثر یک مرحله می‌تواند رخ دهد. بنابراین، به ازای تمام افراد $j \in \mathcal{S}_{۴}$ به غیر از حداکثر یک نفر، داریم $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$. به علاوه، برای حداکثر یک فرد $j \in \mathcal{S}_{۴}$

داریم $V_i(f_j \cup g_j) < ۵/۴$. بنابراین،

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_۳} V_i(f_j \cup g_j) < |\mathcal{S}_۳| + ۱/۴.$$

■

اثبات.[لم ۳۸.۳] فرض کنید این‌گونه نباشد و در نظر بگیرید که $\mathcal{C}_۳ \neq \emptyset$. بر اساس تعریف $\mathcal{C}_۳^b$، اگر رابطه $\mathcal{C}_۳^s = \emptyset$ برقرار باشد، آنگاه $\mathcal{C}_۳^b = \emptyset$. بنابراین، چون داریم $\mathcal{C}_۳ = \mathcal{C}_۳^s \cup \mathcal{C}_۳^b \cup \mathcal{C}_۳^f$، اگر $\mathcal{C}_۳$ تهی نباشد، حداقل یکی از دو مجموعه $\mathcal{C}_۳^s$ یا $\mathcal{C}_۳^f$ ناتهی هستند. در حالتی که $\mathcal{C}_۳^s$ ناتهی است، فرض کنید که i برنده $\mathcal{C}_۳^s$ باشد، و در غیر این صورت فرض کنید i یک فرد دلخواه از $\mathcal{C}_۳^f$ باشد.

بر اساس لم ۳۷.۳ به ازای هر فرد $j \in \mathcal{S}_۱^s \cup \mathcal{S}_۲^s$ رابطه $V_i(g_j) < ۱/۲$ برقرار است. همچنین، بر اساس لم‌های ۱۷.۳ و ۲۷.۳ به ازای هر فرد $j \in \mathcal{S}_۱^r \cup \mathcal{S}_۲^r$ داریم $V_i(g_j) < ۱/۲$. بنابراین،

$$\forall j \in \mathcal{S}_۱ \cup \mathcal{S}_۲ \qquad V_i(g_j) < ۱/۲.$$

همچنین، بر اساس لم‌های ۱۳.۳ و ۲۴.۳ می‌دانیم که به ازای هر $j \in \mathcal{S}_۱ \cup \mathcal{S}_۲$ داریم $V_i(f_j) < ۱/۲$. بنابراین، به ازای هر $j \in \mathcal{S}_۱ \cup \mathcal{S}_۲$ رابطه $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$ برقرار است، و بنابراین

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_۱ \cup \mathcal{S}_۲} V_i(f_j \cup g_j) < |\mathcal{S}_۱ \cup \mathcal{S}_۲|. \tag{آ.۷}$$

به علاوه، بر اساس لم آ.۴ ارزش کل اشیایی که به $\mathcal{S}_۳$ تخصیص یافته شده است، برای فرد i کمتر از $|\mathcal{S}_۳| + ۱/۴$ است. به صورت دقیق‌تر،

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_۳} V_i(f_j \cup g_j) \leq |\mathcal{S}_۳| + ۱/۴. \tag{آ.۸}$$

نامساوی (آ.۷) به همراه نامساوی (آ.۸) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{S}} V_i(f_j \cup g_j) &= \sum_{j \in \mathcal{S}_۱ \cup \mathcal{S}_۲} V_i(f_j \cup g_j) + \sum_{j \in \mathcal{S}_۳} V_i(f_j \cup g_j) \\ &< |\mathcal{S}_۱ \cup \mathcal{S}_۲| + |\mathcal{S}_۳| + ۱/۴ \\ &= |\mathcal{S}| + ۱/۴ \end{aligned} \tag{آ.۹}$$

به یاد داشته باشید که ارزش کل اشیا برای فرد i برابر با n است. به علاوه، چون هر فرد متعلق به یکی از خوشه‌های $\mathcal{C}_۱$، $\mathcal{C}_۲$، $\mathcal{C}_۳$ و یا $\mathcal{S}$ داریم

$$|\mathcal{S}| + |\mathcal{C}_۱| + |\mathcal{C}_۲| + |\mathcal{C}_۳| = n.$$

به علاوه، هر شیء $m_j \in \mathcal{M}$ یا متعلق به $\mathcal{F}$ است، یا متعلق به یکی از مجموعه‌های $f_{j'}$ و $g_{j'}$ برای یک فرد j' است. به بیان دقیق‌تر

$$\mathcal{F} = \mathcal{M} \setminus \Big[\bigcup_{j \in \mathcal{S} \cup \mathcal{C}_۱ \cup \mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}_۳^s} f_j \cup \bigcup_{j \in \mathcal{S}} g_j \Big].$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{C}_۱} V_i(f_j) + \sum_{j \in \mathcal{C}_۲} V_i(f_j) + \sum_{j \in \mathcal{C}_۳^s} V_i(f_j) + V_i(\mathcal{F}) &= V_i(\mathcal{M}) - \sum_{j \in \mathcal{S}} V_i(f_j \cup g_j) \\ &= n - \sum_{j \in \mathcal{S}} V_i(f_j \cup g_j) \\ &\geq n - (|\mathcal{S}| + ۱/۴) \\ &= |\mathcal{C}_۱| + |\mathcal{C}_۲| + |\mathcal{C}_۳| - ۱/۴ \end{aligned} \tag{آ.۱۰}$$

بر اساس لم‌های ۳.۱۳ و ۳.۱۸، نامساوی‌های

$$\sum_{j \in \mathcal{C}_۱} V_i(f_j) < ۱/۲ |\mathcal{C}_۱| \tag{آ.۱۱}$$

و

$$\sum_{j \in \mathcal{C}_۲} V_i(f_j) < ۱/۲ |\mathcal{C}_۲| \tag{آ.۱۲}$$

برقرار است. نامساوی‌های (آ.۱۰)، (آ.۱۱)، و (آ.۱۲) نتیجه می‌دهند که

$$\begin{aligned} V_i(\mathcal{F}) &\geq |\mathcal{C}_۱| + |\mathcal{C}_۲| + |\mathcal{C}_۳| - ۱/۴ - \big[\sum_{j \in \mathcal{C}_۱} V_i(f_j) + \sum_{j \in \mathcal{C}_۲} V_i(f_j) + \sum_{j \in \mathcal{C}_۳^s} V_i(f_j) \big] \\ &\geq |\mathcal{C}_۱| + |\mathcal{C}_۲| + |\mathcal{C}_۳| - ۱/۴ - \big[۱/۲ |\mathcal{C}_۱| + ۱/۲ |\mathcal{C}_۲| + \sum_{j \in \mathcal{C}_۳^s} V_i(f_j) \big] \\ &\geq ۱/۲ |\mathcal{C}_۱| + ۱/۲ |\mathcal{C}_۲| + |\mathcal{C}_۳| - ۱/۴ - \sum_{j \in \mathcal{C}_۳^s} V_i(f_j). \end{aligned} \tag{آ.۱۳}$$

حال، ما دو حالت را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم: (i) $i \in \mathcal{C}_۳^s$ و (ii) $i \in \mathcal{C}_۳^f$.

در حالتی که $i \in \mathcal{C}_۳^s$، چون فرد i برنده $\mathcal{C}_۳^s$ است، داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{C}_۳^s} V_i(f_j) &\leq \sum_{j \in \mathcal{C}_۳^s} V_i(f_i) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{C}_۳^s} ۳/۴ - \epsilon_i \\ &= (۳/۴ - \epsilon_i) |\mathcal{C}_۳^s|. \end{aligned} \tag{آ.۱۴}$$

این، به همراه نامساوی (آ.۱۳) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{F}) &\geq ۱/۲|\mathcal{C}_۱| + ۱/۲|\mathcal{C}_۲| + |\mathcal{C}_۳| - ۱/۴ - \sum_{j\in\mathcal{C}_۳^s} V_i(f_j) \\ &\geq ۱/۲|\mathcal{C}_۱| + ۱/۲|\mathcal{C}_۲| + |\mathcal{C}_۳| - ۱/۴ - (۳/۴ - \epsilon_i)|\mathcal{C}_۳^s| \\ &\geq ۱/۲|\mathcal{C}_۱| + ۱/۲|\mathcal{C}_۲| + (۱/۴ + \epsilon)|\mathcal{C}_۳| - ۱/۴. \end{aligned}$$

از سوی دیگر، چون $i \in \mathcal{C}_۳^s$، داریم $|\mathcal{C}_۳| \geq ۱$ و بنابراین، $V_i(\mathcal{F}) \geq ۱/۴ + \epsilon_j - ۱/۴ = \epsilon_j$. این یعنی این که $\mathcal{F}$ برای فرد i قابل قبول است که این با فرض اتمام الگوریتم در تناقض است.

در حالتی که $i \in \mathcal{C}_۳^f$، بر اساس تعریف $\mathcal{C}_۳^f$ می‌دانیم که $\sum_{j\in\mathcal{C}_۳^s} V_i(f_j) < ۱/۲|\mathcal{C}_۳^s|$. این با توجه به نامساوی (آ.۱۳) نتیجه می‌دهد:

$$V_i(\mathcal{F}) > ۱/۲|\mathcal{C}_۳^s| + |\mathcal{C}_۳^b| + |\mathcal{C}_۳^f| + ۱/۲|\mathcal{C}_۲| + ۱/۲|\mathcal{C}_۱| - ۱/۴.$$

از آنجا که $i \in \mathcal{C}_۳^f$ است، داریم $|\mathcal{C}_۳^f| \geq ۱$ و بنابراین، $V_i(\mathcal{F}) > ۳/۴$. دوباره این با فرض توقف الگوریتم در تناقض است، زیرا که $\mathcal{F}$ برای فرد i قابل قبول است. ■

اثبات.[لم ۳.۳۹] با توجه به لم ۳.۳۸، می‌دانیم که $\mathcal{C}_۳ = \emptyset$. حال، فرض کنید که i برنده افراد باقی‌مانده در $\mathcal{C}_۱$ باشد. برای راحتی، ما اشیا را به یکی از دو رنگ آبی یا سفید رنگ می‌کنیم. در واقع، اشیای آبی ممکن است ارزش قابل توجهی برای فرد i داشته باشند، در حالی که اشیای سفید همگی دارای ارزش کمی برای i هستند. در ابتدا، همه اشیا به رنگ سفید هستند. برای هر $j \in \mathcal{N}$، اگر $|f_j| = ۱$ ما شیء حاضر در f_j را آبی رنگ می‌کنیم. به علاوه، به ازای هر $j \in \mathcal{S}$، اگر $|g_j| = ۱$ و $V_i(g_j) \geq \epsilon_i$ در این صورت ما رنگ شیء موجود در g_j را آبی می‌کنیم.

حال، فرض کنید $\mathcal{P} = \langle P_۱, P_۲, \dots, P_n\rangle$ تقسیم‌بندی بهینه اشیای $\mathcal{M}$ برای i باشد. بر اساس رنگ‌آمیزی ارائه شده، ما سه نوع مجموعه در $\mathcal{P}$ داریم:

- $B_۲$: مجموعه‌های با حداقل دو شیء آبی.
- $B_۱$: مجموعه‌های با دقیقا یک شیء آبی
- $B_۰$: مجموعه‌های فاقد شیء با رنگ آبی

دقت کنید که هر مجموعه از $\mathcal{P}$ متعلق به یکی از $B_۰, B_۱$ یا $B_۲$ است. بنابراین،

$$|B_۰| + |B_۱| + |B_۲| = n \tag{آ.۱۵}$$

بر اساس تعریف، همه اشیای موجود در مجموعه‌های داخل $B_۰$ سفید هستند. ارزش کل این اشیا برای i حداقل برابر با $|B_۰| \geq ۴\epsilon_i|B_۰|$ است، که می‌شود:

$$\sum_{P_k \in B_۰} \sum_{m_j \in P_k} V_i(m_j) \geq ۴\epsilon_i |B_۰|. \qquad (آ.۱۶)$$

همچنین، هر مجموعه در $B_۲$ شامل دو شیء آبی است، که هر کدام به طور جداگانه به یک فرد تعلق گرفته است. ما مجموعه‌های داخل $B_۱$ را به دو زیرمجموعه $\hat{B}_۱$ و $\tilde{B}_۱$ تقسیم می‌کنیم. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید $\hat{B}_۱$ مجموعه‌هایی در $B_۱$ باشند که ارزش شیء آبی در آنها بیشتر از $V_i(f_i)$ برای i است و $\tilde{B}_۱ = B_۱ \setminus \hat{B}_۱$.
بنابراین، برای هر مجموعه $P_k \in \tilde{B}_۱$، ارزش اشیای سفید در P_k برای فرد i حداقل برابر است با:

$$\begin{aligned} ۱ - V_i(f_i) &= ۱ - (۳/۴ - \epsilon_i) \\ &= ۱/۴ + \epsilon_i \\ &\geq ۲\epsilon_i \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\sum_{P_k \in \tilde{B}_۱} V_i(\mathcal{W}(P_k)) \geq ۲|\tilde{B}_۱|\epsilon_i \qquad (آ.۱۷)$$

که $\mathcal{W}(S)$ ارزش اشیای سفید در مجموعه S است. از سوی دیگر، چون مسئله ۳/۴ـکاهش‌ناپذیر است، بر اساس لم ۳.۳ هیچ شیء ی به تنهایی ارزش حداقل ۳/۴ برای فرد i ندارد و بنابراین، به ازای هر $P_k \in \hat{B}_۱$ اشیای سفید داخل P_k دارای ارزش حداقل $\epsilon_i \leq ۱/۴$ برای فرد i هستند. این یعنی:

$$\sum_{P_k \in \hat{B}_۱} V_i(\mathcal{W}(P_k)) \geq |\hat{B}_۱|\epsilon_i. \qquad (آ.۱۸)$$

با در نظر گرفتن نامساوی‌های (آ.۱۵)، (آ.۱۶)، (آ.۱۷)، و (آ.۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M})) &= \sum_{P_j \in B_۰} V_i(\mathcal{W}(P_j)) + \sum_{P_j \in B_۱} V_i(\mathcal{W}(P_j)) + \sum_{P_j \in B_۲} V_i(\mathcal{W}(P_j)) \\ &\geq \sum_{P_j \in B_۰} V_i(\mathcal{W}(P_j)) + \sum_{P_j \in B_۱} V_i(\mathcal{W}(P_j)) \\ &\geq \sum_{P_j \in B_۰} V_i(\mathcal{W}(P_j)) + \sum_{P_j \in \hat{B}_۱} V_i(\mathcal{W}(P_j)) + \sum_{P_j \in \tilde{B}_۱} V_i(\mathcal{W}(P_j)) \\ &\geq |B_۰|۴\epsilon_i + |\hat{B}_۱|\epsilon_i + |\tilde{B}_۱|۲\epsilon_i \\ &\geq |B_۰|۴\epsilon_i + |B_۱|۲\epsilon_i - |\hat{B}_۱|\epsilon_i \\ &\geq |B_۰|۴\epsilon_i + |B_۱|۴\epsilon_i + |B_۲|۴\epsilon_i - |B_۱|۲\epsilon_i - |B_۲|۴\epsilon_i - |\hat{B}_۱|\epsilon_i \\ &= (۲n - ۲|B_۲| - |B_۱| - |\hat{B}_۱|)۲\epsilon_i + (|\hat{B}_۱|)\epsilon_i \end{aligned} \qquad (آ.۱۹)$$

دقت کنید که ارزش کل اشیای سفید که به افراد در طول الگوریتم تخصیص داده شده‌اند، برابر با $V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}))$ است. سایر اشیای سفید، هنوز در $\mathcal{F}$ قرار دارند. بنابراین، داریم:

$$V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M})) = V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{F})) + V_i(\mathcal{F}) \quad (\text{آ.۲۰})$$

حال، ما یک حد بالا بر روی مقدار $V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}))$ ارائه می‌دهیم. به عنوان یک دست‌گرمی، به راحتی می‌توان حد بالای $2\epsilon_i(2n - 1 - |B_1| - 2|B_2|)$ را بر روی $V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}))$ اثبات کرد. این در نتیجه این واقعیت است که دو مجموعه از اشیا به هر کدام از افراد تخصیص داده می‌شود و در نتیجه، ما در مجموع $2n$ مجموعه مجزا داریم. در میان این دو مجموعه مجزا، حداقل یکی از آنها تهی است، چون $g_i = \emptyset$، و حداقل $|B_1| + 2|B_2|$ تا از این مجموعه‌ها شامل یک شیء آبی است. از سوی دیگر، با توجه به لم‌های ۳.۲۰، ۳.۲۶، ۳.۳۴ و ۳.۳۶، هر مجموعه شامل اشیای سفید دارای ارزش حداکثر $2\epsilon_i$ برای فرد i است. بنابراین، ارزش کل اشیای سفید در $\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}$ برای i کمتر از $2\epsilon_i(2n - 1 - |B_1| - 2|B_2|)$ است و بنابراین،

$$V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{F})) \leq 2\epsilon_i(2n - 1 - |B_1| - 2|B_2|).$$

با این حال، برای تکمیل اثبات، ما نیاز به یک حد بالای بهتر داریم. برای این کار، ما یک از یک لم کمکی استفاده می‌کنیم.

لم آ.۵. *فرض کنید j فردی باشد که $|f_j| = 1$ و $V_i(f_j) > V_i(f_i)$. در این صورت، $V_i(g_j) < \epsilon_i$.*

اثبات. در ابتدا، دقت کنید که اگر j هنوز راضی نشده باشد، داریم $g_j = \emptyset$ و بنابراین، $V_i(g_j) < \epsilon_i$. در غیر این صورت، فرد j یا در فاز دوم راضی شده استُ یا در اصلاح $\mathcal{C}_1$ یا $\mathcal{C}_2$.

حالتی را در نظر بگیرید که فرد j در فاز دوم راضی شده است. اگر $j \in \mathcal{S}_2^s \cup \mathcal{S}_3$ در این صورت با توجه به لم ۳.۳۶ رابطه $V_i(g_j) < \epsilon$ برقرار است. همچنین، اگر $j \in \mathcal{S}_1^s$ با توجه به این واقعیت که i به فرد j رشک می‌ورزد، $j \prec_{pr} i$. بنابراین، بر اساس لم ۳.۳۶ داریم: $V_i(g_j) < \epsilon_i$.

حال، حالتی را در نظر بگیرید که j در $\mathcal{S}_1^r \cup \mathcal{S}_2^r$ قرار دارد. دقت کنید که تطابق استفاده شده در اصلاح $\mathcal{C}_1$ خاصیت‌های گفته شده در لم ۳.۱۵ را دارد. بنابراین، اگر فرد j متعلق به $\mathcal{S}_1^r$ باشد، در این صورت یا $i \prec_{pr} j$ و یا هیچ یالی بین y_i و $M_1(y_j)$ در G_1 وجود ندارد ($M_1(y_j)$ راس جور شده با y_j در M_1 است). اگر $i \prec_{pr} j$، بر اساس مشاهده ۳.۱۱ داریم $V_i(f_j) \leq 3/4 - \epsilon_i$. از سوی دیگر، بر اساس تعریف ، اگر هیچ یالی بین y_i و $M_1(y_j)$ در G_1 نباشد، $V_i(g_j) < \epsilon_i$. به علاوه، اگر j متعلق به $\mathcal{S}_2^r$ باشد، بر

اساس لم ۲۶.۳ رابطه $V_i(g_j) < \epsilon_i$ برقرار است. بنابراین، لم آ.۵ برای افراد حاضر در $\mathcal{S}_1^r \cup \mathcal{S}_2^r$ برقرار است. ■

دقت کنید که چون تطابق M از $G_{1/2}$ برای ساخت خوشه $\mathcal{C}_1$ یک MCMWM بود، بر اساس خاصیت سوم لم ۱۲.۳، هیچ فرد kای وجود ندارد که $|g_k| = 1$ و $V_i(g_k) > 3/4 - \epsilon_i$. در غیر این صورت، با تخصیص اشیای حاضر در g_j به i، به جای اشیای f_i می‌توانیم وزن تطابق را بیشتر کنیم که این با فرض بیشینه بودن M در تناقض است.

بر اساس لم آ.۵، به ازای هر فرد j با این خاصیت که f_j یک شیء آبی است که به یک مجموعه از $\hat{B}_1$ تعلق دارد، رابطه $V_i(g_j) < \epsilon_i$ برقرار است. تعداد چنین افرادی حداقل برابر با $|\hat{B}_1|$ است. بنابراین، مقدار $V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}))$ کمتر از $2\epsilon_i \cdot (2n - 1 - |B_1| - 2|B_2| - |\hat{B}_1|) + \epsilon_i \cdot |\hat{B}_1|$ است. با ترکیب حدود به دست آمده در مشاهده آ.۱۹ و لم آ.۵ با نامساوی (آ.۲۰) داریم:

$$V_i(\mathcal{F}) \geq 2\epsilon_i \cdot (2n - 2|B_2| - |B_1| - |\hat{B}_1|) + \epsilon_i \cdot (|\hat{B}_1|) - 2\epsilon_i \cdot (2n - 1 - |B_1| - 2|B_2| - |\hat{B}_1|) - \epsilon_i \cdot |\hat{B}_1|$$

که این یعنی:

$$V_i(\mathcal{F}) \geq 2\epsilon_i$$

اما این با فرض ما که $\mathcal{F}$ برای i مناسب نیست، در تناقض است.

■

اثبات.[لم ۴۰.۳] لم های ۳۸.۳ و ۳۹.۳ بیان می‌دارند که در انتهای الگوریتم، $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_3 = \emptyset$. حال، فرض کنید i برنده $\mathcal{C}_2$ باشد. ما دو حالت را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم: $\epsilon_i \geq 1/8$ و $\epsilon_i < 1/8$.

اگر $\epsilon_i \geq 1/8$ باشد، با استدلالی مشابه آنچه که در ۳۹.۳ استفاده کردیم، حکم را اثبات می کنیم.

لم آ.۶. *اگر $\epsilon_i \geq 1/8$، آنگاه نامساوی زیر برقرار است:*

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} V_i(f_j \cup g_j) \leq |\mathcal{S}| + 1/8.$$

اثبات. می‌دانیم که $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$. به ازای هر فرد j که در $\mathcal{S}_3$ قرار دارد، بر اساس لم‌های ۳۰.۳ و ۳۴.۳ می‌دانیم که $V_i(f_j) < 3/4$. همچنین بر اساس لم ۳۶.۳ داریم $V_i(g_j) < \epsilon_i \leq 1/4$. بنابراین،

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_3} V_i(f_j \cup g_j) \leq \sum_{j \in \mathcal{S}_3} (3/4 + 1/4) = |\mathcal{S}_3|. \qquad (\text{آ.۲۱})$$

حال یک فرد $j \in \mathcal{S}_۱$ را در نظر بگیرید. دقت کنید که بر اساس لم ۱۳.۳، رابطه $V_i(f_j) < ۱/۲$ برقرار است. همچنین در نظر داشته باشید که یا داریم $j \in \mathcal{S}_۱^r$ و یا $j \in \mathcal{S}_۱^s$. اگر $j \in \mathcal{S}_۱^r$، آنگاه بر اساس لم ۱۷.۳ رابطه $V_i(g_j) < ۱/۲$ برقرار است و بنابراین، $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$. همچنین، اگر $j \in \mathcal{S}_۱^s$، در این صورت، بر اساس لم ۳۶.۳ داریم $V_i(g_j) < ۲\epsilon_i < ۱/۲$. بنابراین، در هر دو حالت داریم $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$ و بنابراین،

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_۱} V_i(f_j \cup g_j) \leq \sum_{j \in \mathcal{S}_۱} ۱ = |\mathcal{S}_۱|. \tag{آ.۲۲}$$

در نهایت، یک فرد راضی شده $j \in \mathcal{S}_۲$ را در نظر بگیرید. دوباره، در نظر داشته باشید که یا رابطه $j \in \mathcal{S}_۲^r$ و یا $j \in \mathcal{S}_۲^s$ برقرار است.

حال،حالتی را در نظر بگیرید که $j \in \mathcal{S}_۲^s$. اگر $i \prec_{pr} j$ در این صورت بر اساس مشاهده ۱۱.۳ داریم $V_i(f_j) \leq ۳/۴ - \epsilon_i$ و بر اساس لم ۳۶.۳ داریم $V_i(g_j) < ۲\epsilon_i \leq ۱/۴ + \epsilon_i$ که این یعنی $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$. به علاوه، چون $j \prec_{pr} i$ است، بر اساس لم ۳۰.۳ و ۳۶.۳ داریم $V_i(f_j \cup g_j) < ۳/۴ + \epsilon_i \leq ۱$. بنابراین:

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_۲^s} V_i(f_j \cup g_j) \leq \sum_{j \in \mathcal{S}_۲^s} ۱ = |\mathcal{S}_۱| \tag{آ.۲۳}$$

بنابراین، تنها بررسی حالتی باقی می‌ماند که $j \in \mathcal{S}_۲^r$. دقت کنید که چون i در مرحله اصلاح $\mathcal{C}_۲$ راضی نشده است، اگر $j \prec_{pr} i$ باشد، آنگاه $V_i(g_j) < \epsilon_i \leq ۱/۴$. در غیر این صورت، ما می‌توانسته‌ایم با تخصیص شیء g_j به i او را در فاز اصلاح $\mathcal{C}_۲$ راضی کنیم. همچنین، بر اساس لم ۳۰.۳ رابطه $V_i(f_j) < ۳/۴$ برقرار است، که این نتیجه می‌دهد: $V_i(f_j \cup g_j) < ۱$.

در نهایت، اگر $i \prec_{pr} j$ بر اساس مشاهده ۱۱.۳، رابطه $V_i(f_j) \leq ۳/۴ - \epsilon_i$ برقرار است. نتیجه ۲۲.۳ بیان می‌کند که حداکثر یک شیء m_k که $\mathcal{M}_k \in \mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$ و $V_i(m_k) \geq ۳/۸$ وجود دارد. به علاوه، دقت کنید که چون m_k متعلق به $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$ است، رابطه $V_i(\{m_k\}) < ۱/۲$ برقرار است. برای فرد j، فرض کنید m_l شیء ی باشد که در اصلاح $\mathcal{C}_۲$ به j تخصیص داده شده است،یعنی $g_j = \{m_l\}$. داریم

$$V_i(f_j \cup g_j) \leq ۳/۴ - \epsilon_i + V_i(\{m_l\}).$$

اگر $m_l \neq m_k$ باشد، آنگاه رابطه $V_i(f_j \cup g_j) \leq ۳/۴ - \epsilon_i + ۳/۸$ برقرار است که بر اساس این واقعیت که $\epsilon_i \geq ۱/۸$ است، داریم $V_i(f_j \cup g_j) \leq ۳/۴ - ۱/۸ + ۳/۸ \leq ۱$. به علاوه، اگر $m_l = m_k$، آنگاه $V_i(f_j \cup g_j) \leq ۳/۴ - ۱/۸ + ۴/۸ \leq ۱ + ۱/۸$. اما این اتفاق تنها ممکن است در مورد یک فرد رخ دهد.

بنابراین، به ازای هر فرد j در $\mathcal{S}_۲^r$ رابطه $V_i(f_j \cup g_j) \leq ۱$ برقرار است، و به ازای حداکثر یک فرد $j \in \mathcal{S}_۲^r$ رابطه $V_i(f_j \cup g_j) \leq ۱ + ۱/۸$ برقرار است. بنابراین:

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_۲^r} V_i(f_j \cup g_j) \leq |\mathcal{S}_۲^r| + ۱/۸. \tag{آ.۲۴}$$

نامساوی (آ.۲۴) به همراه نامساوی (آ.۲۳) نتیجه می دهد:

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_۲} V_i(f_j \cup g_j) \leq |\mathcal{S}_۲| + ۱/۸. \tag{آ.۲۵}$$

به علاوه، بر اساس نامساوی‌های (آ.۲۱)، (آ.۲۲) و (آ.۲۵) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{S}} V_i(f_j \cup g_j) &= \sum_{j \in \mathcal{S}_۱} V_i(f_j \cup g_j) + \sum_{j \in \mathcal{S}_۲} V_i(f_j \cup g_j) + \sum_{j \in \mathcal{S}_۳} V_i(f_j \cup g_j) \\ &\leq |\mathcal{S}_۱| + |\mathcal{S}_۲| + ۱/۸ + |\mathcal{S}_۳| \\ &\leq |\mathcal{S}| + ۱/۸. \end{aligned} \tag{آ.۲۶}$$

■

بر اساس لم آ.۶ ارزش فرد i برای اشیای تخصیص داده شده به افراد راضی شده، کمتر از $|\mathcal{S}| + ۱/۸$ است. به یاد داشته باشید که $\mathcal{C}_۱ = \mathcal{C}_۳ = \emptyset$ و بنابراین، $|\mathcal{S}| = n - |\mathcal{C}_۲|$. لذا،

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} V_i(f_j \cup g_j) \leq n - |\mathcal{C}_۲| + ۱/۸. \tag{آ.۲۷}$$

چون فرد i برنده $\mathcal{C}_۲$ است، به ازای هر $j \in \mathcal{C}_۲$ داریم: $V_i(f_j) \leq V_i(f_i)$. از سوی دیگر، چون ارزش کل اشیا برای فرد i برابر با n است، داریم:

$$\begin{aligned} V_i(\mathcal{F}) &= V_i(\mathcal{M}) - \sum_{j \in \mathcal{C}_۲} V_i(f_j) - \sum_{j \in \mathcal{S}} V_i(f_j \cup g_j) \\ &= n - \sum_{j \in \mathcal{C}_۲} V_i(f_j) - \sum_{j \in \mathcal{S}} V_i(f_j \cup g_j) \\ &\geq n - \sum_{j \in \mathcal{C}_۲} V_i(f_j) - \left[n - |\mathcal{C}_۲| + ۱/۸\right] \\ &= |\mathcal{C}_۲| - ۱/۸ - \sum_{j \in \mathcal{C}_۲} V_i(f_j). \end{aligned} \tag{آ.۲۸}$$

به علاوه، رابطه $V_i(f_i) = ۳/۴ - \epsilon_i$ برقرار است و به ازای هر $j \in \mathcal{C}_۲$ داریم: $V_i(f_j) \leq V_i(f_i)$ بنابراین،

بر اساس نامساوی (آ.۲۸) داریم:

$$\begin{aligned} V_i(\mathcal{F}) &\geq |\mathcal{C}_۲| - ۱/۸ - \sum_{j\in\mathcal{C}_۲} V_i(f_j) \\ &\geq |\mathcal{C}_۲| - ۱/۸ - \sum_{j\in\mathcal{C}_۲} V_i(f_i) \\ &= |\mathcal{C}_۲| - ۱/۸ - |\mathcal{C}_۲|V_i(f_i) \\ &= |\mathcal{C}_۲| - ۱/۸ - |\mathcal{C}_۲|(۳/۴ - \epsilon_i) \\ &= |\mathcal{C}_۲|(۱/۴ + \epsilon_i) - ۱/۸. \end{aligned}$$

به یاد داشته باشید که بر اساس فرضیات ما، رابطه $\epsilon_i \geq ۱/۸$ برقرار است. به علاوه، $\epsilon_i \leq ۱/۴$ و بنابراین،

$$\begin{aligned} V_i(\mathcal{F}) &\geq |\mathcal{C}_۲|(۱/۴ + \epsilon_i) - ۱/۸ \\ &\geq |\mathcal{C}_۲|۲\epsilon_i - ۱/۸ \\ &\geq |\mathcal{C}_۲|۲\epsilon_i - \epsilon_i \end{aligned}$$

همچنین، چون $|\mathcal{C}_۲| \geq ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} V_i(\mathcal{F}) &\geq |\mathcal{C}_۲|۲\epsilon_i - \epsilon_i \\ &\geq ۲\epsilon_i - \epsilon_i \\ &\geq \epsilon_i \end{aligned}$$

و بنابراین، $\mathcal{F}$ برای فرد i قابل قبول است. این با فرض اتمام الگوریتم در تضاد است.

حال، حالتی که $\epsilon < ۱/۸$ است را بررسی می‌کنیم. اثبات ما برای این حالت، مشابه اثبات ما برای $\mathcal{C}_۱$ است.

فرض کنید $\mathcal{S}_۱^r$ افرادی از $\mathcal{S}_۱$ باشند که در مرحله اصلاح راضی شده‌اند و قرار دهید

$$\mathcal{M}_۱^r = \bigcup_{j\in\mathcal{S}_۱^r} f_j \cup g_j.$$

لم ۱۸.۳ بیان می‌کند که مقدار سهم بیش‌کمینه افراد حاضر در $\mathcal{C}_۲ \cup \mathcal{C}_۳$ برای اشیای $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_۱^r$ حداقل برابر با ۱ است. به بیان دقیق‌تر، به ازای هر $j \in \mathcal{C}_۲$ داریم:

$$\mathsf{MMS}_j^{n-|\mathcal{S}_۱^r|}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_۱^r) \geq ۱ \tag{آ.۲۹}$$

ما اشیای $\mathcal{M}'$ را به یکی از چهار رنگ آبی، قرمز، سبز و یا سفید رنگ‌آمیزی می‌کنیم. در ابتدا، همه اشیا سفید هستند. به ازای هر فرد $j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{S}_۱^r$ اگر $|f_j| = ۱$، آنگاه ما شیء حاضر در f_j را به رنگ آبی رنگ می‌کنیم. به علاوه،اگر $|f_j| = ۲$ (به این معنی که f_j اشاره به یک راس ادغام شده دارد)، ما هر دو شیء

مربوط به f_j را قرمز می‌کنیم. همچنین، اگر $|g_j| = ۱$ بود، آنگاه شیء حاضر در g_j را سبز می‌کنیم. به ازای هر مجموعه $S \subseteq \mathcal{M}$، ما زیرمجموعه‌ای از اشیای S که به ترتیب رنگ آبی، قرمز، سبز و سفید هستند را با $\mathcal{B}(S)$، $\mathcal{R}(S)$، $\mathcal{G}(S)$ و $\mathcal{W}(S)$ نشان می‌دهیم. به یاد داشته باشید که بر اساس لم ۲۱.۳ هر جفت از اشیای با رنگ قرمز یا سبز در مجموع دارای ارزش کمتر از ۳/۴ برای i هستند. به بیان دیگر، به ازای دو شیء مختلف $m_j, m_k \in \mathcal{R}(\mathcal{M}) \cup \mathcal{G}(\mathcal{M})$ داریم:

$$V_i(\{m_j, m_k\}) \leq ۳/۴.$$

بر اساس لم‌های ۳۶.۳ و ۳۴.۳، هر مجموعه‌ای که شامل اشیای سفید باشد دارای ارزش کمتر از $۲\epsilon_i <$ ۱/۴ برای فرد i است.

حال، قرار دهید $n' = n - |S_۱^r|$. فرض کنید $\mathcal{P} = \langle P_۱, P_۲, \dots, P_{n'} \rangle$ تقسیم‌بندی بهینه اشیا به n' دسته برای فرد i باشد. دقت کنید که بر اساس نامساوی (آ.۲۹)، ارزش هر بسته در $\mathcal{P}$ برای فرد i حداقل برابر با ۱ است. بر اساس تعداد اشیای آبی و قرمز در هر بسته، ما سه نوع دسته مختلف در $\mathcal{P}$ تعریف می‌کنیم.

- $B_{۰۰}$: دسته‌هایی که شامل هیچ شیء آبی و یا قرمزی نیستند.
- $B_{۱۰}$: دسته‌هایی که دارای شیء آبی هستند، اما هیچ شیء قرمزی ندارند.
- $B_{۰۱}$: دسته‌هایی که شامل حداقل یک شیء قرمز هستند.

در ادامه، ما لم‌های آ.۷ و آ.۸ را اثبات می‌کنیم که بعدا در اثبات اصلی استفاده خواهند شد.

لم آ.۷. *فرض کنید $|\mathcal{G}(B_{۰۰})|$ تعداد اشیای سبز در دسته‌های موجود در $B_{۰۰}$ باشد. در این صورت،*

$$V_i(\mathcal{W}(B_{۰۰})) \geq (۳|B_{۰۰}| - |\mathcal{G}(B_{۰۰})|) \cdot ۱/۴.$$

اثبات. فرض کنید $B_{۰۰}^j$ مجموعه شامل دسته‌هایی از $B_{۰۰}$ باشد که شامل دقیقا j شیء سبز هستند. داریم:

$$|\mathcal{G}(B_{۰۰})| = \sum_{۱\leq j<\infty} j|B_{۰۰}^j| \geq |B_{۰۰}^۱| + ۲|B_{۰۰}^۲| + \sum_{۳\leq j<\infty} ۳|B_{۰۰}^j| \qquad (\text{آ.۳۰})$$

به علاوه، داریم:

$$۳|B_{۰۰}| = \sum_{۰\leq j<\infty} ۳|B_{۰۰}^j| = ۳|B_{۰۰}^۰| + ۳|B_{۰۰}^۱| + ۳|B_{۰۰}^۲| + \sum_{۳\leq j<\infty} ۳|B_{۰۰}^j| \qquad (\text{آ.۳۱})$$

در نهایت، تعداد ارزش اشیای سفید در B_{00} حداقل $|B^{0}_{00}| + |B^{1}_{00}| \cdot 1/2 + |B^{3}_{00}| \cdot 1/4$ است. برای نشان دادن این امر، دقت کنید که هر شیء سبز در $P_k \in B^{1}_{00}$ دارای ارزش کمتر از ۱/۲ است و با توجه به لم ۲۱.۳، هر جفت از اشیای سبز متعلق به $P_k \in B^{2}_{00}$ ، دارای مجموع ارزش کمتر از ۳/۴ برای j هستند. با در نظر گرفتن این واقعیت که ارزش هر دسته در P_k حداقل برابر با ۱ است، داریم:

$$V_i(\mathcal{W}(B_{00})) \geq |B^{0}_{00}| + |B^{1}_{00}| \cdot 1/2 + |B^{3}_{00}| \cdot 1/4 = \left(4|B^{0}_{00}| + 2|B^{1}_{00}| + |B^{2}_{00}|\right) \cdot 1/4 \quad (\text{آ.۳۲})$$

بر اساس نامساوی‌های (آ.۳۰) و (آ.۳۱) داریم:

$$3|B_{00}| - |\mathcal{G}(B_{00})| \leq 3|B^{0}_{00}| + 2|B^{1}_{00}| + |B^{2}_{00}| \leq 4|B^{0}_{00}| + 2|B^{1}_{00}| + |B^{2}_{00}| \quad (\text{آ.۳۳})$$

در نهایت، با ترکیب نامساوی‌های (آ.۳۲) و (آ.۳۳) داریم:

$$V_i(\mathcal{W}(B_{00})) \geq \left(3|B_{00}| - |\mathcal{G}(B_{00})|\right) \cdot 1/4 \quad (\text{آ.۳۴})$$

■

لم آ.۸. $V_i(\mathcal{W}(B_{10})) \geq (2|B_{10}| - |\mathcal{B}(B_{10})| - |\mathcal{G}(B_{10})|) \cdot 1/4$

اثبات. در ابتدا، دقت کنید که هر دسته در B_{10} شامل حداقل یک شیء آبی است. فرض کنید B^{w}_{10} مجموعه دسته‌هایی از B_{10} شامل دقیقا یک شیء آبی و بدون هیچ شیء سبزی است. سایر اشیا در هر دست از B^{w}_{10} سفید هستند. چون مسئله ۳/۴ـ کاهش‌ناپذیر است، ارزش هر شیء آبی برای فرد i کمتر از ۳/۴ است و بنابراین داریم:

$$V_i(\mathcal{W}(B_{10})) \geq |B^{w}_{10}| \cdot 1/4$$

یا

$$4V_i(\mathcal{W}(B_{10})) \geq |B^{w}_{10}|. \quad (\text{آ.۳۵})$$

به علاوه، فرض کنید $B^{\bar{w}}_{10} = B_{10} \setminus B^{w}_{10}$. چون هر بسته در B_{10} شامل حداقل یک شیء آبی است، هر بسته در $B^{\bar{w}}_{10}$ شامل حداقل دو شیء با رنگ‌های آبی و سبز است. بنابراین، داریم:

$$|\mathcal{G}(B^{\bar{w}}_{10})| + |\mathcal{B}(B^{\bar{w}}_{10})| \geq 2|B^{\bar{w}}_{10}| \quad (\text{آ.۳۶})$$

مجموع نامساوی‌های (آ.۳۵) و (آ.۳۶) نتیجه می‌دهد:

$$4V_i(\mathcal{W}(B_{10})) + |\mathcal{G}(B_{10}^{\bar{w}})| + |\mathcal{B}(B_{10}^{\bar{w}})| \geq 2|B_{10}^{\bar{w}}| + |B_{10}^{w}|$$

که این یعنی:

$$4V_i(\mathcal{W}(B_{10})) \geq 2|B_{10}^{\bar{w}}| - |\mathcal{G}(B_{10}^{\bar{w}})| - |\mathcal{B}(B_{10}^{\bar{w}})| + |B_{10}^{w}|. \tag{آ.۳۷}$$

به علاوه، داریم $|\mathcal{B}(B_{10})| = |\mathcal{B}(B_{10}^{w})| + |\mathcal{B}(B_{10}^{\bar{w}})|$. بر اساس این واقعیت که هر دسته در B_{10}^{w} شامل حداقل یک شیء آبی است، $|\mathcal{B}(B_{10}^{w})| = |B_{10}^{w}|$ و در نتیجه $|\mathcal{B}(B_{10})| = |B_{10}^{w}| + |\mathcal{B}(B_{10}^{\bar{w}})|$. بر اساس نامساوی (آ.۳۷)، داریم:

$$4V_i(\mathcal{W}(B_{10})) \geq 2|B_{10}^{\bar{w}}| - |\mathcal{G}(B_{10}^{\bar{w}})| - |\mathcal{B}(B_{10})| + |B_{10}^{w}| + |B_{10}^{w}|.$$

در نهایت، بر اساس این واقعیت که $2|B_{10}^{w}| + 2|B_{10}^{\bar{w}}| = 2|B_{10}|$ داریم:

$$4V_i(\mathcal{W}(B_{10})) \geq 2|B_{10}| - |\mathcal{G}(B_{10}^{\bar{w}})| - |\mathcal{B}(B_{10})|$$

که این یعنی:

$$V_i(\mathcal{W}(B_{10})) \geq \big(2|B_{10}| - |\mathcal{B}(B_{10})| - |\mathcal{G}(B_{10}^{\bar{w}})|\big) \cdot 1/4$$

■

برای دسته‌های موجود در B_{01} ما یک گراف $G_{01}\langle V_{01}, E_{01}\rangle$ می‌سازیم، که در آن هر راس $v_j \in V_{01}$ اشاره به یک دسته $P_j \in B_{01}$ دارد. یک فرد j که f_j شامل یک جفت شیء قرمز است را در نظر بگیرید و فرض کنید $m_k, m_{k'}$ این دو شیء باشد و همچنین، $m_k \in P_l$ و $m_{k'} \in P_{l'}$. در این صورت، ما یال $(v_l, v_{l'})$ را به E_{01} اضافه می‌کنیم. بر اساس تعریف B_{01}، رابطه $P_l, P_{l'} \in B_{01}$ برقرار است. دقت کنید که m_k و $m_{k'}$ ممکن است به یک دسته تعلق داشته باشند: $P_l = P_{l'}$. در این حالت، ما یک طوقه به G_{01} اضافه می‌کنیم. به علاوه، به ازای هر شیء $m_k \in \mathcal{B}(B_{01})$ ما یک طوقه به راس v_l که $m_k \in P_l$ است، اضافه می‌کنیم.

در ادامه، ما R_j را به صورت مجموعه دسته‌هایی از B_{01} تعریف می‌کنیم، به گونه‌ای که درجه راس‌های مربوط به آنها در V_{01} برابر با j است. به بیان دیگر:

$$P_k \in R_j \iff d(v_k) = j$$

در ادامه، ما لم آ.۹ را اثبات می‌کنیم.

لم آ.۹. *برای $R_۱$ داریم:*

$$V_i(\mathcal{W}(R_۱)) \geq (۲|R_۱| - |\mathcal{G}(R_۱)|) \cdot ۱/۴$$

اثبات. یک دسته $P_j \in R_۱$ را در نظر بگیرید. چون چون $d(v_j) = ۱$، دسته P_j شامل دقیقا یک شیء قرمز (و بدون شیء آبی)است. بنابراین، سایر اشیا در P_j سبز یا سفید هستند. ما نشان می‌دهیم که

$$|\mathcal{G}(P_j)| + ۴.V_i(\mathcal{W}(P_j)) \geq ۲. \tag{آ.۳۸}$$

در ابتدا، در نظر داشته باشید که اگر $|\mathcal{G}(P_j)| \geq ۲$، آنگاه نامساوی (آ.۳۸) برقرار است. به علاوه، اگر $|\mathcal{G}(P_j)| = ۰$ باشد، آنگاه $V_i(\mathcal{W}(P_j)) \geq ۱/۲$، زیرا که ارزش شیء قرمز موجود در P_j کمتر از ۱/۲ است (به یاد داشته باشید که همه اشیای قرمز اشاره به راس‌های داخل $\mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}'_{۱/۲}$ دارند). این سریعا این نتیجه را می‌دهد که $۴.V_i(\mathcal{W}(P_j)) \geq ۲$. در نهایت، اگر $|\mathcal{G}(P_j)| = ۱$، آنگاه بر اساس لم ۳.۲۱، ارزش کل اشیای قرمز و سبز حاضر در P_j کمتر از ۳/۴ است، و بنابراین، $V_i(\mathcal{W}(P_j)) \geq ۱/۴$ که این یعنی $|\mathcal{G}(P_j)| + ۴.V_i(\mathcal{W}(P_j)) \geq ۲$.

چون نامساوی (آ.۳۸) به ازای هر دسته $P_j \in R_۱$ برقرار است، داریم:

$$\sum_{P_j \in R_۱} \left(|\mathcal{G}(P_j)| + ۴.V_i(\mathcal{W}(P_j))\right) \geq ۲|R_۱|$$

بنابراین:

$$|\mathcal{G}(R_۱)| + ۴.V_i(\mathcal{W}(R_۱)) \geq ۲|R_۱|$$

و در نتیجه:

$$V_i(\mathcal{W}(R_۱)) \geq (۲|R_۱| - |\mathcal{G}(R_۱)|) \cdot ۱/۴$$

■

لم آ.۱۰. *برای $R_۲$، داریم:*

$$V_i(\mathcal{W}(R_۲)) \geq (|R_۲| - |\mathcal{G}(R_۲)|) \cdot ۱/۴.$$

اثبات. فرض کنید P_j یک دسته در $R_۲$ باشد. در ابتدا، ما نامساوی زیر را اثبات می‌کنیم:

$$۴V_i(\mathcal{W}(P_j)) + |\mathcal{G}(P_j)| \geq ۱ \tag{آ.۳۹}$$

بر اساس تعریف $R_۲$، درجه v_j برابر با ۲ است. بنابراین، P_j شامل دو شیء قرمز است. دقت کنید که درجه راس‌های مربوط به دسته‌های $B_{.۱}$ که شامل اشیای آبی باشند، حداقل برابر با ۳ است. بنابراین، P_j شامل هیچ شیء آبی نیست. بر اساس لم ۲۱.۳ ارزش کل اشیای قرمز در P_j کمتر از ۳/۴ است. سایر اشیا در P_j یا سبز و یا سفید هستند. اگر P_j شامل اشیای سبز باشد، در این صورت نامساوی (آ.۳۹) برقرار است. از سوی دیگر، اگر P_j شامل هیچ شیء سبزی نباشد، در این صورت $V_i(\mathcal{W}(P_j)) \geq ۱/۴$ و بنابراین، $۴V_i(\mathcal{W}(P_j)) \geq ۱$. لذا، نامساوی (آ.۳۹) در هر دو حالت برقرار است.

با جمع زدن نامساوی (آ.۳۹) برای همه دسته‌های موجود در $R_۲$ داریم:

$$\sum_{P_j \in R_۲} ۴V_i(\mathcal{W}(P_j)) + |\mathcal{G}(P_j)| \geq |R_۲|$$

که این یعنی:

$$۴V_i(\mathcal{W}(R_۲)) + |\mathcal{G}(R_۲)| \geq |R_۲|$$

و در نتیجه:

$$V_i(\mathcal{W}(R_۲)) \geq \big(|R_۲| - |\mathcal{G}(R_۲)|\big) \cdot ۱/۴$$

■

با قرار دادن لم‌های آ.۷، آ.۸، آ.۹ و آ.۱۰ ما به حد پایین زیر برای ارزش همه اشیای سفید برای i می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M}')) &= V_i(\mathcal{W}(B_{..})) + V_i(\mathcal{W}(B_{.۱})) + V_i(\mathcal{W}(B_{۱.})) \\
&\geq \Big(۳|B_{..}| - |\mathcal{G}(B_{..})|\Big) \cdot ۱/۴ + \Big(۲|B_{۱.}| - |\mathcal{B}(B_{۱.})| - |\mathcal{G}(B_{۱.})|\Big) \cdot ۱/۴ \\
&\quad + \Big(۲|R_۱| - |\mathcal{G}(R_۱)|\Big) \cdot ۱/۴ + \Big(|R_۲| - |\mathcal{G}(R_۲)|\Big) \cdot ۱/۴ \\
&= \Big((۳|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| + ۲|R_۱| + |R_۲| - |\mathcal{B}(B_{۱.})|) \\
&\quad - (|\mathcal{G}(B_{..})| + |\mathcal{G}(B_{۱.})| + |\mathcal{G}(R_۱)| + |\mathcal{G}(R_۲)|)\Big) \cdot ۱/۴ \\
&\geq \Big((۳|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| + ۲|R_۱| + |R_۲|) - |\mathcal{B}(B_{۱.})| - |\mathcal{G}(\mathcal{M}')|\Big) \cdot ۱/۴
\end{aligned} \tag{آ.۴۰}$$

که $|\mathcal{G}(\mathcal{M}')|$ تعداد کل اشیای سبز است.

اشیای در $\mathcal{W}(\mathcal{M}')$ یا به یک فرد در فاز دوم اعطا شده‌اند، یا هنوز در $\mathcal{F}$ هستند. فرض کنید که $\mathcal{W}_۲$ اشیای سفیدی باشند که به یک فرد در طول فاز دوم اعطا شده‌اند. داریم:

$$V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M}')) = V_i(\mathcal{W}_۲) + V_i(\mathcal{F}) \tag{آ.۴۱}$$

حال، ما یک حد بالا بر روی ارزش $V_i(\mathcal{W}_۲)$ تعیین می‌کنیم. در ابتدا،دقت کنید که تعداد افراد در $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_۱^r$ برابر با n' است. هر کدام از این افراد، دو مجموعه f_j و g_j دارند که در مجموع می‌شود $۲n'$ مجموعه. چون $g_i = \emptyset$ است، ما می‌دانیم که حداقل یکی از این مجموعه‌ها خالی است. به علاوه، همه این $|\mathcal{G}(\mathcal{M}')|$ مجموعه شامل یک شیء سبز هستند و $|\mathcal{B}(B_{۱.})| + |E_{.۱}|$ تا از این مجموعه‌ها یا یک شیء آبی دارند، یا یک جفت شیء قرمز دارند. (به یاد داشته باشید که هر یال از $G_{.۱}$ اشاره به یک شیء آبی یا یک جفت شیء قرمز دارد). بنابراین، تعداد مجموعه‌هایی که تنها شامل اشیای سفید هستند، برابر است با:

$$۲n' - ۱ - |\mathcal{G}(\mathcal{M}')| - |\mathcal{B}(B_{۱.})| - |E_{.۱}|$$

بر اساس لم ۳۶.۳ و ۳۴.۳، ارزش هر مجموعه شامل اشیای سفید برای i کمتر از $۱/۴ < ۲\epsilon_i$ است، و بنابراین:

$$V_i(\mathcal{W}_۲) \leq (۲n' - ۱ - |\mathcal{G}(\mathcal{M}')| - |\mathcal{B}(B_{۱.})| - |E_{.۱}|) \cdot ۱/۴ \tag{آ.۴۲}$$

با تفریق حد بالای به دست آمده برای $V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M}'))$ در (آ.۴۰) از حد بالا برای $V_i(\mathcal{W}_۲)$ در (آ.۴۲) به یک حد پایین برای ارزش اشیا باقی‌مانده داخل $\mathcal{F}$ می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
V_i(\mathcal{F}) &= V_i(\mathcal{W}(\mathcal{M}')) - V_i(\mathcal{W}_۲) \\
&\geq \Big((۳|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| - |\mathcal{B}(B_{۱.})| + ۲|R_۱| + |R_۲|) - |\mathcal{G}(\mathcal{M}')| \Big) \cdot ۱/۴ - V_i(\mathcal{W}_۲) \\
&\geq \Big((۳|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| - |\mathcal{B}(B_{۱.})| + ۲|R_۱| + |R_۲|) - |\mathcal{G}(\mathcal{M}')| \Big) \cdot ۱/۴ \\
&\quad - \Big(۲n' - ۱ - |\mathcal{G}(\mathcal{M}')| - |\mathcal{B}(B_{۱.})| - |E_{.۱}| \Big) \cdot ۱/۴ \\
&= \Big(۳|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| + ۲|R_۱| + |R_۲| - ۲n' + ۱ + |E_{.۱}| \Big) \cdot ۱/۴ \\
&= \Big(۲|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| + |B_{..}| + |E_{.۱}| + ۲|R_۱| + |R_۲| - ۲n' + ۱ \Big) \cdot ۱/۴
\end{aligned} \tag{آ.۴۳}$$

در ادامه، ما لم‌های آ.۱۱، آ.۱۳ و آ.۱۲ را برای تکمیل کار، اثبات می‌کنیم.

لم آ.۱۱. $|B_{\cdot\cdot}| \geq |E_{\cdot ۱}| - |B_{\cdot ۱}|$

اثبات. در ابتدا، دقت کنید که $|B_{\cdot\cdot}| + |B_{۱\cdot}| + |B_{\cdot ۱}| = n'$. به علاوه، داریم $|\mathcal{B}(B_{۱\cdot})| + |E_{\cdot ۱}| \leq n'$. برای اثبات این لم، در نظر داشته باشید که هر یال در $G_{\cdot ۱}$ اشاره به مجموعه اول هر فرد در $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_۱^r$ به علاوه،هر شیء آبی در $B_{۱\cdot}$ اشاره به مجموعه اول یک فرد در $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_۱^r$ دارد. بنابراین، تعداد کل افراد باید بیشتر از این مقدار باشد. بر اساس تعریف $B_{۱\cdot}$ می‌دانیم که $|B_{۱\cdot}| \geq |\mathcal{B}(B_{۱\cdot})|$. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} |B_{\cdot\cdot}| + |B_{۱\cdot}| + |B_{\cdot ۱}| &\geq |\mathcal{B}(B_{۱\cdot})| + |E_{\cdot ۱}| \\ &\geq |(B_{۱\cdot})| + |E_{\cdot ۱}| \end{aligned} \tag{آ.۴۴}$$

که این یعنی

$$|B_{\cdot\cdot}| \geq |E_{\cdot ۱}| - |B_{\cdot ۱}|.$$

■

لم آ.۱۲. $|E_{\cdot ۱}| \geq ۳/۲ \sum_{j\geq ۳} |R_j| + |R_۲| + |R_۱|/۲$

اثبات. $|E_{\cdot ۱}| = \frac{\sum_{v_j \in V_{\cdot ۱}} d(v_j)}{۲} = \frac{\sum_j j|R_j|}{۲} \geq ۳/۲ \sum_{j\geq ۳} |R_j| + |R_۲| + |R_۱|/۲.$ ■

لم آ.۱۳. $|B_{\cdot\cdot}| \geq \frac{\sum_{j\geq ۳} |R_j| - |R_۱|}{۲}$

اثبات. با توجه به لم آ.۱۱ می‌دانیم که $|B_{\cdot\cdot}| \geq |E_{\cdot ۱}| - |B_{\cdot ۱}|$. به علاوه بر اساس لم آ.۱۲ داریم

$$|E_{\cdot ۱}| \geq ۳/۲ \sum_{j\geq ۳} |R_j| + |R_۲| + |R_۱|/۲.$$

ترکیب این دو نامساوی نتیجه می‌دهد:

$$|B_{\cdot\cdot}| \geq ۳/۲ \sum_{j\geq ۳} |R_j| + |R_۲| + |R_۱|/۲ - |B_{\cdot ۱}| \tag{آ.۴۵}$$

همچنین چون یک تناظر یک به یک بین $B_{\cdot ۱}$ و $V_{\cdot ۱}$ وجود دارد، رابطه $|B_{\cdot ۱}| = |V_{\cdot ۱}|$ برقرار است. بر اساس تعریف R_j داریم:

$$|V_{\cdot ۱}| = \sum_j |R_j| \tag{آ.۴۶}$$

با جایگزینی مقداری که برای $B_{.۱}$ از نامساوی (آ.۴۶) به دست آمده، در نامساوی (آ.۴۵) داریم:

$$\begin{aligned}|B_{..}| &\geq ۱/۲ \sum_{j\geq ۳} |R_j| - |R_۱|/۲ \\ &= \frac{\sum_{j\geq ۳} |R_j| - |R_۱|}{۲}.\end{aligned} \tag{آ.۴۷}$$

■

با اعمال نامساوی‌های آ.۱۳ و آ.۱۲ بر نامساوی (آ.۴۳) داریم:

$$\begin{aligned}V_i(\mathcal{F}) &= \Big(۲|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| + |B_{..}| + |E_{.۱}| + ۲|R_۱| + |R_۲| - ۲n' + ۱\Big) \cdot ۱/۴ \\ &\geq \Big(۲|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| + \frac{\sum_{j\geq ۳} |R_j| - |R_۱|}{۲} + ۳/۲ \sum_{j\geq ۳} |R_j| \\ &\qquad + |R_۲| + |R_۱|/۲ + ۲|R_۱| + |R_۲| - ۲n' + ۱\Big) \cdot ۱/۴ \\ &= \Big(۲|B_{..}| + ۲|B_{۱.}| + \sum_{j\geq ۳} ۲|R_j| + ۲|R_۲| + ۲|R_۱| - ۲n' + ۱\Big) \cdot ۱/۴\end{aligned}$$

در نهایت، دقت داشته باشید که $۲|B_{.۱}| = ۲|V_{.۱}| = \sum_{j\geq ۳} ۲|R_j| + ۲|R_۲| + ۲|R_۱|$. این، به همراه این واقعیت که $|B_{..}| + |B_{.۱}| + |B_{۱.}| = n'$، نتیجه می‌دهد $V_i(\mathcal{F}) \geq (۲n' - ۲n' + ۱) \cdot ۱/۴$. این یعنی $V_i(\mathcal{F}) \geq ۱/۴$، که تناقض است، چرا که $\mathcal{F}$ برای فرد i قابل قبول است. ■

Abstract

In this study, we consider the fair division problem. In this problem, a heterogeneous resource must be fairly divided among a set of agents with different preferences. The resource can be either a divisible good (i.e., time, land), or a set of indivisible goods. When the resource is a single divisible good, the problem is commonly known as cake cutting. To measure fairness, several notions are defined, i.e., envy-freeness, proportionality, equability, maximin-share. In this thesis, we first give a formal definition of these notions. Next, we present our results for envy-freeness and maximin-share.

First, we prove the existence of an allocation that guarantees each agent a factor 3/4 of his maximin-share. This improves upon the work of Procaccia and Wang [65] wherein the authors prove the existence of 2/3 approximation guarantee. We also extend our results to the case of submodular and fractionally subadditive valuations. More precisely, we give a 1/3 approximation guarantees for submodular agents and a 1/5 approximation guarantee for XOS agents.

Next, we extend the definition of maximin-share to the case of the agents with unequal entitlements. We show that, in some cases with n agents, no allocation can guarantee better than $1/n$ approximation of maximin-share when the entitlements are not necessarily equal. Furthermore, we consider a restricted version of the problem where the valuation of every agent for each good is bounded by the total value he wishes to receive in a fair allocation. We show that this assumption enables us to find guarantee 1/2 approximation of maximin-share.

In the last part of this study, we consider the problem of envy-free division of a cake among strategic players. Roughly, we wish to divide the cake among n players in a way that meets the following criteria: (I) the allocation satisfies envy-freeness, (II) the allocation is strategy-proof (truthful), and (III) the number of cuts made on the cake is minimal. We provide methods, namely expansion process and expansion process with unlocking, for dividing the cake under different assumptions on the valuation

Keywords: 1-Computational Social Choice, 2-Maximin-share, 3-Fairness 4-Envy-free 5-Proportional 6-Approximation algorithms, 7-Mechanism Design

Sharif University of Technology
Computer engineering department

PhD Thesis

Topic

Fair and Strategic Division of Resources

By
Masoud Seddighin

Supervisor
Mohammad Ghodsi

Sep 2018