به نام او

امتحان میان ترم درس روشهای تغییراتی در آنالیز وقت امتحان: ۲ ساعت

---

۱. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز کراندار است ($n \geq ۳$). به علاوه $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ کاراتئودری بوده که برای مقدار $۱ \leq \alpha < \frac{n+۲}{n-۲}$ داریم

$$|f(x,u)| \leq a|u|^{\alpha} + b$$

که a و b مقادیر ثابت مثبت هستند. تابعک

$$\phi(u) = \int_{\Omega} \frac{۱}{۲}|\nabla u|^{۲} - F(x,u)\, dx$$

را روی $H^{۱}_{۰}$ در نظر بگیرید که $F(x,u) = \int_{۰}^{u} f(x,s)ds$.

الف- ثابت کنید $\phi : H^{۱}_{۰}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع $C^{۱}$ است.

ب- نشان دهید این تابعک نسبت به توپولوژی ضعیف نیم پیوسته پایینی است.

پ- تعریف گرادیان $\nabla\phi$ را بنویسید و نشان دهید $Id - \nabla\phi$ فشرده است.

۲. فرض کنید $k(x), l(x) \in C(\bar{\Omega})$ که $l(x) \geq \alpha > ۰$ روی $\bar{\Omega}$. ثابت کنید مساله زیر برای یک مقدار ثابت λ جواب مثبت دارد که $۱ < \tau < \frac{n+۲}{n-۲}$

$$\begin{cases} \Delta u + k(x)u + \lambda l(x)|u|^{\tau-۱}u = ۰ & \text{in } \Omega \\ u = ۰ & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

۳. فرض کنید $F(x,u,P)$ در $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N}$ پیوسته و عملگر

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x,u(x),Du(x))\, dx$$

نسبت به توپولوژی ضعیف در $W^{۱,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ نیم پیوسته پایینی باشد. نشان دهید F شبه محدب است.

۴. پوشش شبه محدب تابع اندازه‌پذیر $F : \mathbb{R}^{n\times N} \longrightarrow \mathbb{R}$ را تعریف کنید. نشان دهید اگر $|F(\xi)| \leq c(۱ + |\xi|^p)$ برای هر $\xi \in \mathbb{R}^{n\times N}$ آنگاه روی مجموعه $u_{۰} + W^{۱,p}_{۰}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ داریم:

$$\inf \mathcal{F}(u) = \inf Q\mathcal{F}(u)$$

که

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(Du)\, dx, \quad Q\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} QF(Du)\, dx.$$

موفق باشید.

۹۵/۹/۱۶