روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه اول ۲۸/۶/۹۵

به نام او

روشهای تغییراتی در آنالیز

منابع درسی:

* An Invitation to Variational Methods in DE

  David Costa

* Direct Methods in the Calculus of Variations

  Enrico Giusti

  Bernard Dacorogna

فضای سوبولف

مشتق ضعیف: $u\in L^p(\Omega)$، $v = D^\alpha u$ مشتق ضعیف u گفته می‌شود

$$\int_\Omega v\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\, D^\alpha\varphi\,dx \qquad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

m

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u\in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega)\ \ \forall\, 1\le i\le n\}$$

D^α

$\alpha_1+\cdots+\alpha_n = |\alpha| \le m$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\underbrace{H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)}_{\text{فضای هیلبرت}}$$

$$\langle u, v\rangle_{H^1} := \int_\Omega uv + \nabla u\cdot\nabla v\,dx \qquad D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n} u$$

$H_0^1(\Omega) :=$ closer $C_0^\infty(\Omega)$ with respect to the norm of $H^1(\Omega)$

نقاط اکسترمم

X فضای باناخ، $U \subseteq X$ باز، $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$u_0 \in U,\quad v \in X,\quad t \in \mathbb{R}$

۱) تعریف مشتق ضعیف (Gateaux)

$$\lim_{t \xrightarrow{\mathbb{R}} 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0) - t\langle f, v\rangle}{t} = 0$$

$f \in X'$ (یک تابعک خطی پیوسته) را مشتق گاتو φ در نقطه u_0 می‌نامیم. (باید رابطه فوق برای هر $v \in X$ درست باشد)

۲) تعریف مشتق Frechet.

$$\lim_{v \xrightarrow{X} 0} \frac{\varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - \langle f, v\rangle}{\|v\|} = 0$$

$f =: \varphi'(u_0)$

فرشه $\Longrightarrow$ گاتو

$\varphi' : U \longrightarrow X'$

مثال

$X = L^p(\Omega)$, $\varphi(u) = \int_\Omega \lambda(x) u(x)\, dx$, $\lambda \in L^q$, $\varphi : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(u+tv) - \varphi(u) = \int \lambda(u+tv) - \int \lambda u$$

$$= t \int \lambda v$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u) - t\langle f, v\rangle}{t} = 0 \qquad f \in X' = L^q(\Omega)$$

$$\langle f, v\rangle \longrightarrow \int f v$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi'(u) = \lambda$$

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = \int \lambda v$$

به راحتی می‌توان دید که به معنای فرشه مشتق‌پذیر است.

$$\varphi' = \varphi$$

مثال : $\varphi(u)=\int_\Omega |u|^p\,dx$ ، $\varphi : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tv)-\varphi(u)-t\boxed{\langle f,v\rangle}}{t}=0$$

$$\Phi(t)=\varphi(u+tv):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad \langle f,v\rangle=\Phi'(0)$$

$$\langle f,v\rangle=\frac{d}{dt}\varphi(u+tv)\Big|_{t=0}=\int_\Omega \frac{d}{dt}|u+tv|^p\,dx\Big|_{t=0}$$

$$=\int_\Omega p\,|u+tv|^{p-2}(u+tv)\cdot v\Big|_{t=0}\,dx$$

$$=\int \underbrace{p\,|u|^{p-2}u}_{f\in L^q}\,v\,dx$$

تمرین : به معنای فرشه تابع مشتق‌پذیر است .

مثال - $\varphi(u) = \int (u^+)^p \, dx$ ، $u^+ = \max(u, 0)$

$p > 1$

$$\frac{d}{dt}\varphi(u+tv)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_\Omega \left((u+tv)^+\right)^p dx \Big|_{t=0}$$

$$= \int_\Omega p\left((u+tv)^+\right)^{p-1} \cdot \frac{d}{dt}(u+tv)\Big|_{t=0} dx$$

$$= \int \underbrace{p(u^+)^{p-1}}_{\varphi'(u)} v$$

$p=1$, $\varphi'(u) = \chi_{\{u \geq 0\}}$

سؤال: φ در $u=0$ وقتی $p=1$ مشتق‌پذیر است؟

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(tv) - \cancel{\varphi(0)}^{\,0} - t\langle f, v\rangle}{t} \overset{?}{=} 0$$

$$\varphi(tv) - t\langle f, v\rangle = \int_\Omega (tv)^+ - tfv = o(t)$$

$t>0$ $\underbrace{\int v^+ = \int fv}$ $t<0$ $\underbrace{\int v^- = \int fv}$

$$\varphi : U \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi' : U \longrightarrow X'$$

$$\frac{\varphi'(u_0+v) - \varphi'(u_0) - \boxed{\langle \varphi''(u_0), v \rangle}}{\|v\|} \in X'$$

$$\varphi'' \in L(X, X')$$

$$\varphi'' : U \longrightarrow L(X, X')$$

مثال -

$$X = W^{1,p} \quad , \quad \varphi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p$$

$$(\varphi'(u), v) = \int_\Omega p\, |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

تمرین $(\varphi''(u), v)(w) = \ ?$

ایده $\dfrac{d}{dt} (\varphi'(u+tw), v) \Big|_{t=0} = \ ?$

مسایل تغییراتی

X فضای باناخ، $M \subseteq X$، $I : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{u \in M} I[u] = \, ?$$

سؤال: آیا $\exists\, \bar{u} \in M$، $I[\bar{u}] = \min_{u \in M} I[u]$ ؟

مثال $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ **جواب ضعیف:** $u \in \underbrace{H_0^1(\Omega) + g}_{\subseteq H^1(\Omega)}$، $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$I[u] = \int_\Omega \tfrac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \; : \; M = H_0^1 + g \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle I'[u], v \rangle = \int \nabla u \cdot \nabla v - f v$$

$I'[u] = 0 \implies$ u جواب ضعیف

کاندید جواب: $\min_{u \in M} I[u]$

$$I[u]=\int_\Omega \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu \qquad u\in g+H_0^1 \qquad \alpha=\inf_{u\in M} I[u]$$

گام اول : $-\infty<\alpha$. نامساوی پوانکاره ثابت $C>0$ وجود دارد که

$$\forall v\in H_0^1(\Omega),\quad \int_\Omega |\nabla v|^2 \geq C\int_\Omega v^2$$

$$v=u-g \Rightarrow \int|\nabla u|^2 \geq C\int u^2 + D$$

$$\underbrace{I[u]} \geq \frac{C}{2}\int u^2 + D/2 - \int \underset{(\frac{f}{\varepsilon})(\varepsilon u)}{fu} \geq \frac{C}{2}\int u^2 + \underbrace{D/2 - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int f^2}_{D'} - \frac{\varepsilon^2}{2}\int u^2$$

$$\geq \underbrace{\frac{C-\varepsilon^2}{2}\int u^2 + D'}$$

نتیجه : $\exists u_n\in M$, $I[u_n]\to\alpha$.

گام دوم : $\{u_n\}$ کران دار

$\int u_n^2$ کران دار

$$I[u_n] \geq \frac{1}{2}\int|\nabla u_n|^2 - \frac{1}{2}\int f^2 - \frac{1}{2}\int u_n^2$$

نتیجه: u_n زیردنباله همگرای ضعیف در $H^1(\Omega)$ دارد.

$$u_n \rightharpoonup \bar{u}$$

سوال ① $\bar{u} \in M$ ؟ M بسته است نسبت به توپولوژی ضعیف.

سوال ② $I[\bar{u}] = \alpha$ ؟ پیوستگی I نسبت به توپولوژی ضعیف (باید $I[u_n] \to I[\bar{u}]$)

نیم پیوستگی پایینی I نسبت به توپولوژی ضعیف

$$I[\bar{u}] \leq \liminf_{n\to\infty} I[u_n] = \alpha = \inf_{u\in M} I[u]$$

قضیه: اگر M بسته و محدب باشد نسبت به توپولوژی ضعیف بسته است.

قضیه: اگر $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ آنگاه یک ترکیب خطی محدب از $\{u_n\}$ وجود دارد که بطور قوی به $\bar{u}$ میل می‌کند.

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه دوم - ۹۵٫۷٫۴

$$I : M \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \min_{u\in M} I[u] = ?$$

اگر I مشتق‌پذیر، وجود نقطه بحرانی ؟ $\qquad I'[u] \equiv 0$

شکل:
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

جواب ضعیف $\Longleftrightarrow$ نقطه بحرانی $\qquad I[u] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu$

$$M = H_0^1(\Omega) + g$$

① $-\infty < \alpha = \inf_{u\in M} I[u] \Rightarrow \exists\, u_n ,\ I[u_n] \longrightarrow \alpha$

② $\{u_n\}$ در H^1 کراندار $\Longrightarrow u_n \xrightarrow{w} \bar{u}$

③ $\bar{u} \in M$ (هر زیرمجموعه بسته نسبت به توپولوژی قوی + محدب $\Leftarrow$ به طور ضعیف بسته)

④ $I[\bar{u}] \leq \liminf_{n\to\infty} I[u_n] = \alpha$

$$u_n \longrightarrow \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \int f u_n \longrightarrow \int f \bar{u}$$

$$\int |\nabla \bar{u}|^2 \overset{?}{\leq} \liminf \int |\nabla u_n|^2$$

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla \bar{u}|^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 + |\nabla \bar{u}|^2 - 2 \underbrace{\nabla u_n \cdot \nabla \bar{u}}_{|\nabla \bar{u}|^2}$$

مثال-

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1} u = 0 \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

آیا جواب غیربدیهی دارد؟

معنی جواب:

$$\boxed{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - |u|^{p-1} u \varphi = 0}$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$I[u] = \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \, dx$$

$$I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad 1 < p < \frac{n+2}{n-2}$$

$$-\Delta\psi = \lambda_1 \psi$$

اولین مقدار ویژه

$$I[t\psi] = \int \frac{t^2}{2}\underbrace{|\nabla\psi|^2}_{\lambda_1\psi^2} - \frac{|t|^{p+1}}{p+1}\psi^{p+1}\,dx \longrightarrow -\infty$$

$$\int|\nabla\psi|^2 = \int \lambda_1\psi^2$$

I می نیمم ندارد.

آیا I ماکسیمم دارد؟ جواب: خیر!

$$u_\lambda(x) = \lambda^\alpha u(\lambda x) \in H_0^1(\Omega)$$

$$0\in\Omega\ , \quad \operatorname{Supp} u \subseteq B_1 \subseteq \Omega \Rightarrow \operatorname{Supp} u_\lambda \subseteq B_{1/\lambda}$$

فرض کنیم $\lambda>1$.

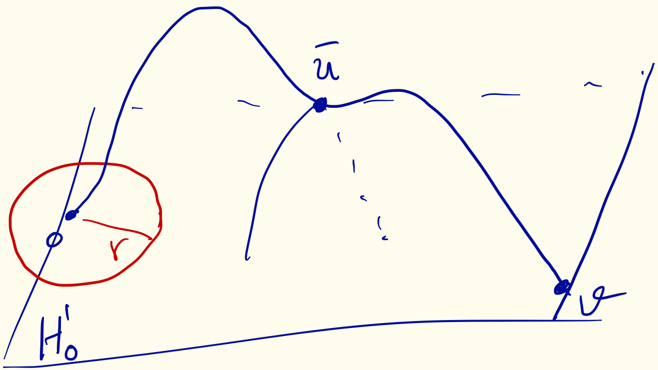
$$I[u_\lambda] = \int_{\cancel{\Omega}\; B_{1/\lambda}} \frac{1}{2} \lambda^{2\alpha+2}|\nabla u(\lambda x)|^2 - \frac{\lambda^{\alpha(p+1)}}{p+1}|u(\lambda x)|^{p+1}\, dx$$

$$\downarrow \infty$$

$$= \int_{B_1}\left[\frac{1}{2}\lambda^{2\alpha+2}|\nabla u(x)|^2 - \frac{\lambda^{\alpha(p+1)}}{p+1}|u|^{p+1}\right]\lambda^{-n}\,dx$$

$$2\alpha+2 > \alpha(p+1) \Rightarrow \alpha<\frac{2}{p-1}$$

نقاط زینی :



$I(0) = 0$

$\|u\| = r \Rightarrow I(u) \geq a > 0$

$\exists v, \ \|v\| > r, \ I(v) \leq 0$

$$\Gamma = \{ \gamma : [0,1] \to H_0^1 : \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = v \}$$

$$a \leq c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\gamma(t) = u} I(u)$$

$\exists \bar{u}, \ I[\bar{u}] = c$ $\Longleftarrow$ قضیه گذرگاه کوهستانی

$I'[\bar{u}] = 0$

نقاط بحرانی از طریق مینیمم سازی

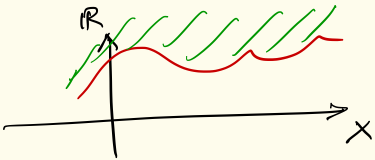
قضیه ①: X فشرده و $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته $\Leftarrow$ φ از پایین کران دار است و مینیمم دارد.

$$\exists u_0 \in X \ , \quad \varphi(u_0) = \inf_{u \in X} \varphi(u)$$

نکته: لازم نیست φ پیوسته باشد بلکه نیم پیوسته پایینی باشد کافی است.

تعریف: برای هر $a \in \mathbb{R}$ مجموعه $\varphi^{-1}(a,+\infty)$ باز باشد (به طور معادل $\varphi^{-1}(-\infty,a]$ بسته باشد)

$epi(\varphi) = \{ (u,a) : \varphi(u) \leq a \}$ بسته باشد.



روی فضای متریک: $u_n \longrightarrow \bar{u}$ آنگاه $\varphi(\bar{u}) \leq \liminf_{n \to \infty} \varphi(u_n)$

قضیه ۲) H فضای هیلبرت و $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق کند:

الف ـ به طور ضعیف نیم پیوسته پایین باشد

ب ـ ترا کِی (Coercieve) باشد ⟸ تعبیر به فشردگی

آنگاه φ از پایین کران دار است و می‌نیمم دارد.

الف ـ اگر $u_n \xrightarrow{\omega} \bar{u}$ آنگاه $\varphi(\bar{u}) \leq \liminf \varphi(u_n)$

یا به طور معادل $epi(\varphi)$ در توپولوژی ضعیف بسته باشد.

ب ـ $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} \varphi(u) = +\infty$

اثبات: اگر $\varphi(u_n) \to -\infty$ آنگاه $\{u_n\}$ کران دار $\Longleftarrow$ $\boxed{u_n \xrightarrow{\omega} \bar{u}}$

$\Downarrow$

$\varphi(\bar{u}) \leq \liminf \varphi(u_n) = -\infty$ $\times$

نکته: به جای فضای هیلبرت می‌توان فرض کرد فضا بازتابی است.

↓

گوی واحد در توپولوژی ضعیف فشرده است.

نکته: به جای فضای بازتابی می‌توان زیرمجموعه‌ای که نسبت به توپولوژی ضعیف بسته است قرار داد.

مجموعه محدب و بسته (نسبت به توپولوژی قوی)

قضیه ۳: X فضای بازتابی، $C \subseteq X$ محدب و بسته و $\varphi : C \to \mathbb{R}$ دارای شرایط الف) و ب)

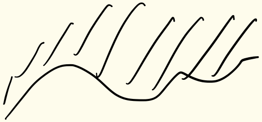
آنگاه نتیجه قضیه ۲ برقرار است.

مثال $\varphi(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \langle l,u \rangle$.

. $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ فرم دوخطی پیوسته $\quad |a(u,v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|$

. $l : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعک خطی پیوسته $\quad |\langle l,u \rangle| \leq C \|u\|$

$\Leftarrow$ φ پیوسته است . $\Longleftarrow$ $\mathrm{epi}(\varphi)$



بسته است

اگر محدب هم باشه نسبت به توپولوژی ضعیف بسته است .

آیا φ محدب است ؟ $\quad \varphi(tu+(1-t)v) \overset{?}{\leq} t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v)$ برای $0 \leq t \leq 1$

$$\Updownarrow$$

$$a(tu+(1-t)v,\ tu+(1-t)v) \overset{?}{\leq} t\, a(u,u) + (1-t)\, a(v,v)$$

$$t^2 a(u,u) + t(1-t)\left[a(u,v)+a(v,u)\right] + (1-t)^2 a(v,v) \leq \cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$a(u,v) + a(v,u) \leq a(u,u) + a(v,v)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq a(u-v,\ u-v)$$

به شرط آنکه $0 \le a(u,u)$ برای هر $u \in X$ آنگاه φ به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است.

$\boxed{\alpha \|u\|^2 \le a(u,u)}$ آنگاه φ ترکیبی است.

φ می‌نیمم دارد.

مثال $F : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ کاراتئودوری است هرگاه

- $F(\cdot, s)$ اندازه‌پذیر است برای هر $s \in \mathbb{R}$
- $F(x, \cdot)$ پیوسته است تقریباً برای هر $x \in \Omega$.

$$u \longmapsto F(x,u)$$

می‌نیمم $\psi(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\, dx$ روی H_0^1؟

گزاره: هرگاه $|F(x,s)| \le a|s|^{\alpha} + b$ آنگاه $\Psi : H_0^1 \to \mathbb{R}$ خوش تعریف است.

برای $1 \le \alpha < 2^*$

$$|\Psi(u)| \le \int_\Omega a|u|^{\alpha} + b \, dx < \infty$$

(Ω کران دار)

$$u \in H_0^1(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega) \qquad 1 \le p < 2^* = \frac{2N}{N-2} \qquad (N \ge 3)$$

فشرده

سؤال: آیا Ψ بطور ضعیف پیوسته است؟

$$u_n \to \bar{u} \overset{?}{\Longrightarrow} \Psi[\bar{u}] = \lim \Psi[u_n]$$

$$\Rightarrow \int_\Omega F(x, \bar{u}(x))\, dx = \lim \int_\Omega F(x, u_n(x))\, dx$$

$$F(x, u_n(x)) \longrightarrow F(x, u(x)) \quad \text{a.e. in } \Omega$$

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} \bar{u} \Longleftarrow u_n \xrightarrow[H_0^1]{\omega} \bar{u}$$ اگر

تمرین (کتاب برزیس) $T: E \to F$ خطی و کران دار و E بازتابی آنگاه

T فشرده است $\iff$ (برای هر دنباله $u_n \rightharpoonup u$ داریم $T(u_n) \to T(u)$)

کاربرد:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Psi(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\, dx$$

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\, ds$$

$$\underset{H_0^1(\Omega)}{\min} \Psi(u) \text{ وجود } \Longrightarrow \text{ وجود جواب}$$

تمرین: چرا Ψ مشتق پذیر است؟ به شرط آنکه

(A) $\quad |f(x,s)| \leq a|s|^{\sigma} + b \qquad 0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$

شرط تراکمی Ψ ؟ $\quad (B) \quad \exists \beta < \lambda_1 \ \text{s.th.} \ \limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq \beta$

<u>تمرین</u>: با شرط بالا Ψ تراکمی است.

اگر $f(x,s)$ کاراتئودوری باشد که در شرایط (A) و (B) صدق کند آنگاه مسأله شبه خطی جواب دارد.

تمرین: $\nabla\Psi = Id - T$ که T فشرده است.

$$\langle \nabla\Psi(u), w \rangle_{H_0^1} = \underbrace{\Psi'(u)}_{\text{تابعک خطی}}(w)$$

ضرب داخلی

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه سوم ۹۵/۷/۶

مسأله محدب

X فضای بازتاب و $\varphi : X \to \mathbb{R}$ نیم پیوسته پایینی + محدب (به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی)

ترکیبی $\left(\lim\limits_{\|u\| \to \infty} \varphi(u) = +\infty \right)$

$\Leftarrow$ φ می نیمم خود را اتخاذ می‌کند.

مثال جالب:

$$\varphi(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x,u)$$

اندازه پذیر

پیوسته

$$u_n \xrightarrow{H_0^1} u \Rightarrow u_n \xrightarrow{L^p} u \qquad 1 \le p < 2^*$$

$$\Rightarrow \varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u)$$

$$\min I[u] = \min_{u \in \mathcal{A}} \int_\Omega L(x, u, \nabla u)\, dx$$

$$\mathcal{A} = g + W_0^{1,q}(\Omega)$$

$\underline{1 < q}$

فضای بازتابی

فرض کنید $L(x, z, p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ هموار باشد

$$(*) \qquad -\sum_{i=1}^{n} \left(L_{p_i}(x, u, \nabla u) \right)_{x_i} + L_z(x, u, \nabla u) = 0$$

تنها شرطی که لازم است این است که $I : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد.

$$\lim_{t \to 0} \frac{I[u + tv] - I[v]}{t} =$$

$$= \lim \int \frac{L(x, u + tv, \nabla u + t\nabla v) - L(x, u, \nabla u)}{t}$$

$$|L(x,z,p)| \le C\left(|p|^q + |z|^q + 1\right)$$

$$|D_p L(x,z,p)| \le C\left(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1\right)$$

$$|D_z L(x,z,p)| \le C\left(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1\right)$$

تمرین - ثابت کنید I تحت شرایط فوق مشتق‌پذیر است.

مثال - $L(x,z,p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} p_i p_j - z f(x) \implies -\operatorname{div}(A\nabla u) = f$

مثال - $L(x,z,p) = \frac{1}{2}|p|^2 - F(x,z) \implies -\Delta u = f(x,u)$

مثال minimal surface

$$I[u] = \int_\Omega \left(1 + |\nabla u|^2\right)^{1/2} dx$$

$$L(x,z,p) = \left(1 + |p|^2\right)^{1/2}$$

$$\min_{g+W_0^{1,q}(\Omega)} \int_\Omega L(x,u,\nabla u)\,dx$$

• اگر $L(x,z,p) \geq a|p|^q - b$ آنگاه $I[u]$ کرالی است.

$$\|u\|_{W^{1,q}} \to \infty \implies I[u] \to +\infty$$

• سؤال: با چه شرایطی عملگر I به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است؟

وقتی $L(x,z,p) = \frac{1}{2}|p|^2 - f(x,z)$ به کمک قضیه رلیش نشان دادن

$W^{1,q} \subseteq \mathcal{L}^q$ نیم پیوستگی ضعیف

$$u_n \xrightarrow{W^{1,q}} u \implies u_n \xrightarrow{\mathcal{L}^q} u$$ نتیجه می‌شد.

$$\Downarrow$$

$$\|u\| \leq \liminf \|u_n\| \implies u_n \to u \quad a.e.$$

$$\int_\Omega -f(x,u) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega -f(x,u_n)$$

$$\int_\Omega L(x,u,\nabla u) \le \liminf \int_\Omega L(x, \underbrace{u_n}_{\downarrow\, u(x)}, \underbrace{\nabla u_n}_{\cancel{\downarrow\, \nabla u(x)}})$$

<u>شرط کاراتئودری:</u>

- $L(\cdot,z,p)$ برای هر z و p اندازه‌پذیر باشد.
- $L(x,z,p)$ برای تقریباً هر x نسبت به (z,p) پیوسته باشد.

<u>قضیه ۱</u> اگر L کاراتئودری باشد و از پایین کران‌دار و نسبت به p محدب آنگاه I به طور ضعیف نیم‌پیوسته پایینی است.

تعریف محدب

$$\begin{cases} p \longmapsto L(x,z,p) \\ L(x,z,tp+(1-t)\tilde{p}) \le t\,L(x,z,p)+(1-t)\,L(x,z,\tilde{p}) \end{cases}$$

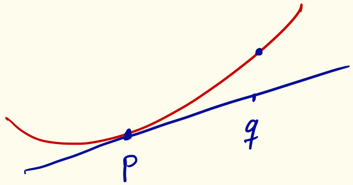
قضیه ۲ اگر علاوه بر شرایط قضیه ۱ فرض کنیم L نسبت به p، به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد آنگاه نتیجه برقرار است.

اگر L نسبت به p، C^2 باشد ← یعنی محدب:

$$\sum_{i,j=1}^{n} L_{p_ip_j}(x,z,p)\, p_i p_j \ge 0$$

تمرین. با فرض C^2 قضیه (۲) را اثبات کنید.

اگر L نسبت به p، C^1 باشد ←



$$L(x,z,q) \ge \underbrace{L(x,z,p) + D_pL(x,z,p)\cdot(q-p)}$$

تقریب خطی L در همسایگی p

اثبات قضیه (۲)

$$u_k(x) \xrightarrow{a.e.} u(x),\quad \nabla u_k \xrightarrow{L^q} \nabla u,\quad u_k \xrightarrow{L^q} u \;\Leftarrow\; u_k \xrightarrow{W^{1,q}} u$$

$$I[u_k] = \int_\Omega L(x,u_k,\nabla u) + \big(L(x,u_k,\nabla u_k) - L(x,u_k,\nabla u)\big)$$

$$\ge \int_\Omega \underbrace{L(x,u_k,\nabla u)}_{\downarrow\; L(x,u,\nabla u)} + \underbrace{D_pL(x,u_k,\nabla u)}_{\downarrow\; D_pL(x,u,\nabla u)}\cdot \underbrace{(\nabla u_k - \nabla u)}_{\xrightarrow{w}\, 0}$$

$$\liminf I[u_k] \ge I[u] + \boxed{\liminf \int_\Omega D_pL\cdot(\nabla u_k - \nabla u)} \to 0$$

اثبات قضیه ① می‌توان فرض کرد $L \geq 0$.

$$\int_\Omega L(x,u_k,\nabla u_k)\,dx = \boxed{\int_\Omega L(x,u,\nabla u_k)\,dx} +$$

$$+\int_\Omega L(x,u_k,\nabla u_k) - L(x,u,\nabla u_k)\,dx$$

$$L(x,u(x),\nabla u_k(x)) = G(x,\nabla u_k) \geq 0$$

محدب و پیوسته

$\varphi(v)=\int G(x,\nabla v)\,dx$ در $W^{1,q}$ به طور قوی پیوسته است.

$$u_k \xrightarrow{W^{1,q}} v \Rightarrow \nabla u_k \xrightarrow{L^q} \nabla v$$

$$\int G(x,\nabla v) \leq \liminf \int_\Omega G(x,\nabla u_k)$$

$\varphi : W^{1,q} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و محدب $\Longleftarrow$ به طور ضعیف نیم‌پیوسته پایینی

کافی است نشان دهیم

$$\liminf \int_{\Omega} L(x,u_k,\nabla u_k) - L(x,u,\nabla u_k)\, dx \geq 0$$

<u>لم</u>: زیردنباله ای وجود دارد که $L(x,u_k,\nabla u_k) - L(x,u,\nabla u_k) \xrightarrow{\text{در اندازه}} 0$ یعنی

$$0 = \lim_{k\to 0} \Big| \underbrace{\{x : |L(x,u_k(x),\nabla u_k(x)) - L(x,u(x),\nabla u_k(x))| \geq \varepsilon\}}_{:=\Omega_K} \Big|$$

ادامه اثبات قضیه ① برای هر $\varepsilon>0$ ، مجموعه $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$ وجود دارد که $|\Omega_\varepsilon^k| \leq \varepsilon \times 2^{-k}$

$$|L(x,u_k,\nabla u_k) - L(x,u,\nabla u_k)| < \varepsilon \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon^k$$

برای $k \geq N$

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{k\geq N} \Omega_\varepsilon^k \Rightarrow |\Omega_\varepsilon| < \varepsilon$$

و روابط بالا برای هر اندیس درست است.

$$\liminf \int_\Omega L(x,u_k,\nabla u_k) - L(x,u,\nabla u_k)\,dx$$

$$= \liminf \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} \cdots + \int_{\Omega_\varepsilon} \cdots$$

$$\geq -\varepsilon|\Omega| + \liminf \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{L(x,u_k,\nabla u_k)}_{\geq 0} - L(x,u,\nabla u_k)$$

$$\geq -\varepsilon|\Omega| - \limsup \int_{\Omega_\varepsilon} L(x,u,\nabla u_k)$$

با انتخاب یک زیر دنباله می توان فرض کرد که

$$\underbrace{\lim \int_{\Omega_\varepsilon} L(x,u,\nabla u_k)}_{\text{حد وجود دارد}} \geq \int_{\Omega_\varepsilon} L(x,u,\nabla u)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} L(x,u,\nabla u) = 0$$

<u>اثبات لم</u>: برهان خلف: ε ای وجود دارد که

$$\liminf |\Omega_k| \geq 2\varepsilon$$

$$\left|\{x : |\nabla u_k| \geq l\}\right| \leq \frac{1}{l}\left[\int_\Omega |\nabla u_k|^q\right]^{1/q} \leq \frac{C}{l}$$

<u>نکته</u>: $u_k \xrightarrow{W^{1,q}} u \Leftarrow$ دنباله $\{u_k\}$ در $W^{1,q}$ کران‌دار است. می‌توان فرض کرد که

$$\|u_k\|_{W^{1,q}} \leq C$$

برای انتخاب مناسب l می‌توان دید که

$$\left|\{x : |\nabla u_k(x)| \geq l\}\right| < \varepsilon$$

$$\tilde\Omega_k := \{x \in \Omega_k \mid |\nabla u_k(x)| < l\}$$

$$\liminf |\tilde\Omega_k| > \varepsilon$$

$$\left|\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \tilde\Omega_k\right| > \varepsilon \Rightarrow \exists x \in \tilde\Omega_k$$

برای یک زیردنباله

برای این انتخاب x ، دنباله $\{\nabla u_k(x)\}$ کراندار است و می‌توان فرض کرد

$$\nabla u_k(x) \longrightarrow p \quad \text{as} \quad k \to \infty$$

درواقع x را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $u_k(x) \longrightarrow u(x)$

$$\Longrightarrow \left| L(x, u_k, \nabla u_k(x)) - L(x, u(x), \nabla u(x)) \right| \to 0$$

برای این مقدار x.

تناقض با اینکه $x \in \Omega_k$.

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه چهارم ۹۵/۷/۱۱

مسائل بهینه سازی مقید

$$\varphi : X \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$$

$$M = \{u : \psi(u) = 0\} \qquad \min_{u \in M} \varphi(u)$$

$$\psi : X \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^K$$

<u>قضیه</u>: X فضای بازتابی، $M \subseteq X$ به طور ضعیف بسته باشد
φ به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است + تراکمی است
$\Leftarrow$ φ از پایین کران دار است و می‌نیمم خود را اختیار می‌کند.

$$M = X \,,\ \varphi(\bar{u}) = \min_{u \in X} \varphi(u) \implies \varphi'(\bar{u}) \equiv 0$$

$$M \subsetneq X \,,\quad \gamma : (-1,1) \xrightarrow{C^1} M$$

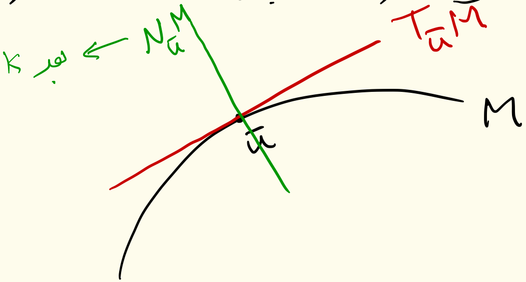
$$\gamma(0) = \bar{u}$$

$$\frac{d}{dt}\, \varphi \circ \gamma(t) \Big|_{t=0} = 0 \implies \langle \varphi'(\underset{\bar{u}}{\cancel{\gamma(0)}}), \gamma'(0) \rangle = 0$$

$$\varphi'(\bar u)\Big|_{T_{\bar u}M} \equiv 0$$

<u>یادآوری:</u> $\psi : X \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^K$, $\psi'(v) : X \xrightarrow{\text{خطی}} \mathbb{R}^K$ پوشا باشد برای هر $v \in \psi^{-1}(0)$.

(یعنی هر v که $\psi(v)=0$ یا به عبارتی $v \in M$) در این صورت 0 یک مقدار عادی برای ψ گفته می‌شود و



$\psi^{-1}(0)$ یک زیرخمینه X است. در این صورت

$$\mathrm{Nul}\big(\psi'(\bar u)\big) = T_{\bar u}M$$

$$\varphi'(\bar u) = \lambda \cdot \psi'(\bar u) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \psi_i'(\bar u)$$

ضرایب لاگرانژ

$\psi : H_0^1 \to \mathbb{R}$, $\psi(u) = \int_\Omega G(u)\,dx$, $\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$: d[illegible]

$$\varphi(\bar{u}) = \min_{\substack{u \in H_0^1 \\ \psi(u)=0}} \varphi(u) \implies \begin{cases} \psi'(\bar{u}) = 0 \\ \underline{\iota} \\ \varphi'(\bar{u}) = \lambda \psi'(\bar{u}) \end{cases}$$

$$\langle \psi'(\bar{u}), h \rangle = \int_\Omega g(\bar{u})\, h(x)\, dx$$

$$\langle \varphi'(\bar{u}), h \rangle = \int_\Omega \nabla \bar{u} \cdot \nabla h(x)\, dx$$

$$\begin{cases} \psi'(\bar{u}) = 0 \implies g(\bar{u}) \equiv 0 \\ \underline{\iota} \\ \varphi'(\bar{u}) = \lambda \psi'(\bar{u}) \implies \int \nabla \bar{u} \cdot \nabla h = \lambda \int g(\bar{u}) h \end{cases}$$

$$\implies \boxed{-\Delta \bar{u} = \lambda g(\bar{u})}$$

سؤال : معادله
$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$
برای یک مقدار λ جواب دارد.

$\Leftarrow$ مسأله مقید جلسه قبل $\Leftarrow$

۱ـ چرا مسأله بهینه سازی جواب دارد؟

۲ـ روابط مشتق چرا برقرار است؟

۳ـ اگر $\Psi'(\bar{u})=0$ چه کنیم؟

(۱) φ شرایط لازم را دارد. تنها باید بررسی کنیم که $M=\{u : \Psi(u)=0\}$ بطور ضعیف بسته است.

$$u_n \in M, \quad u_n \xrightarrow{H_0^1} u \implies u_n \xrightarrow{L^2} u \implies u_{n_k} \longrightarrow u(x) \text{ a.e.}$$

زیر دنباله

$$\int G(u_n)\,dx \longrightarrow \int G(u)\,dx$$

به کمک قضیه همگرایی تسلطی با شرط زیر

(۲)
$$|G(z)| \le C(|z|^2+1) \Leftarrow \underline{|g(z)| \le C(|z|+1)}$$

۳ اگر $\psi'(\bar u)\equiv 0 \Rightarrow g(\bar u)\equiv 0$.

$$\nabla\big(G(\bar u)\big) = g(\bar u)\,\nabla \bar u \equiv 0 \Rightarrow$$ یک تابع ثابت $G(\bar u)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{یک تابع ثابت } G(\bar u) \\ \bar u \in M \end{array}\right\} \Rightarrow G(\bar u)\equiv 0 \qquad \bar u \in H_0^1$$

$$G(\bar u)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} G(0)=0 \Rightarrow \psi(0)=0$$

به معنی trace

$$\Rightarrow 0 \in M$$

$$T: W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega) \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}\int |\nabla \bar u|^2 = \varphi(\bar u) \le \varphi(0) = 0$$

$$\Rightarrow \bar u = 0$$

$$T\big(G(\bar u)\big) \overset{?}{=} G(T\bar u)$$

$$\bar u \in H_0^1 \Rightarrow h_n \in C_c^\infty(\Omega)\ ,\ h_n \xrightarrow{H^1} \bar u$$

$$T\big(G(h_n)\big) \equiv 0$$

$$G(T\bar u) \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} G(Th_n)$$

$$h_n \xrightarrow{H^1} \bar{u} \quad \Rightarrow \quad G(h_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} G(\bar{u})$$

$$\int |G(h_n) - G(\bar{u})|^p \to 0$$

$$\leq C \int |G(h_n)|^p + |G(\bar{u})|^p$$

$$\leq C \int |h_n|^{2p} + C < C$$

$$\Leftarrow \quad p = 1$$

$$\nabla G(h_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^1} \nabla G(\bar{u}) \ ?$$

$$g(h_n) \nabla h_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} g(\bar{u}) \nabla \bar{u}$$

$$\begin{cases} g(h_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} g(\bar{u}) \\ \nabla h_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \nabla \bar{u} \end{cases} \Rightarrow \quad G(h_n) \xrightarrow{W^{1,1}} G(\bar{u})$$

$$0 = T G(h_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^1(\partial\Omega)} T G(\bar{u})$$

مثال
$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u\,|u|^{p-2} \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

برای هر $\lambda > -\lambda_1$ یک جواب غیربدیهی دارد به شرط آنکه $2 < p < 2^*$

اولین مقدار ویژه ی لاپلاسین $\lambda_1 = \inf_{u \neq 0} \dfrac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}$

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda |u|^2 dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \, dx$$

$$J[u] = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \, dx = 1$$

$$\min_{\substack{u \in H_0^1 \\ J[u]=1}} I[u]$$

$\lambda > -\lambda_1 \Longrightarrow I$ ترکیبی است.

I به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است (چرا؟)

$\{u : J[u]=1\}$ در H_0^1 بطور ضعیف بسته است.

$$u_n \xrightarrow{H_0^1} u \Longrightarrow$$

$$\underset{\text{بطور فشرده}}{H_0^1 \subset\subset L^p} \qquad p<2^* \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow{L^p} u$$

$$\Longrightarrow J[u_n] \longrightarrow J[u]$$

$$I[\bar u] = \min_{J[u]=1} I[u]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} J'[\bar u] \equiv 0 \Longrightarrow \int |\bar u|^{p-2}\bar u\, h\, dx = 0 \quad \forall h \in H_0^1 \\ \qquad \Longrightarrow \bar u = 0 \;\; \times \;\; J[\bar u]=1 \\ I'[\bar u] = \mu J'[\bar u] \end{cases}$$

$$\int \nabla \bar u \cdot \nabla h + \lambda \bar u h = \mu \int \bar u |\bar u|^{p-2} h \xrightarrow{h=\bar u} \mu > 0$$

$$\Longrightarrow \quad -\Delta \bar u + \lambda \bar u = \mu \bar u |\bar u|^{p-2}$$

$$v = \alpha \bar u \Longrightarrow -\Delta v + \lambda v = \underbrace{\mu \alpha^{p-2}}_{=1} v |v|^{p-2}$$

مثال: $\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ ، $f(0)=0$ ، f یک تابع C^1 است و اکیداً صعودی است.

$$\lim_{s\to\pm\infty} f'(s) = f_\pm < \lambda_1 < f'(0)$$

$\downarrow$

اولین مقدار ویژه مثبت نیومن است. $\Longrightarrow \int |\nabla u|^2 \geq \lambda_1 \int |u|^2$

$$I[u] = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u)\, dx \qquad F' = f$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \Longrightarrow 0 = \int \Delta u = \int_\Omega f(u)\, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \min I[u] \\ u \in H^1(\Omega) \\ u \in M = \left\{ u : \int_\Omega f(u)\, dx = 0 \right\} \end{array}}$$

$0 < f' \leq C \Longleftarrow f' > 0 \Longleftarrow$ f اکیداً صعودی

$$\Longrightarrow |f(z)| \leq C(|z|+1)$$

$$|F(z)| \leq c(|z|^2+1)$$

اگر $\bar{u}$ ی مینیمم با شرط $\underbrace{I}$ با شرط تراکی باشد آنگاه $\underbrace{f'(\bar{u})=0}_{\times}$ یا $\underbrace{I'[\bar{u}]=\lambda f'(\bar{u})}$

$$\Downarrow$$

$$-\Delta\bar{u}-f(\bar{u})=\lambda f'(\bar{u}) \longrightarrow \text{بمعنای توزیع}$$

$$\Rightarrow \int \nabla\bar{u}\cdot\nabla\varphi-f(\bar{u})\varphi\,dx=\lambda\int f'(\bar{u})\varphi\,dx \quad \forall\varphi\in H^1(\Omega)$$

$$\varphi\equiv 1 \Rightarrow \underbrace{-\int f(\bar{u})}_{=0}=\lambda\underbrace{\int f'(\bar{u})\,dx}_{>0} \Rightarrow \lambda=0$$

$$\exists\ \alpha < \lambda_1 , \qquad |f(z)| \le \alpha |z| + \beta$$

$$\Rightarrow \quad |F(z)| \le \frac{\alpha}{2} |z|^2 + \gamma$$

$$\boxed{I[u] = \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u)\, dx \ \ge \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{2} |u|^2 - \gamma}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \ge c \int_\Omega \left| u - (u)_\Omega \right|^2 dx$$

نامساوی پوانکاره

$$(u)_\Omega = \fint_\Omega u$$

$$u = v + C \qquad C = (u)_\Omega$$

$$\int_\Omega v\, dx = 0 \Rightarrow \int_\Omega |\nabla v|^2 \ge c \int_\Omega |v|^2 dx$$

$$I[u] = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - F(v+C)$$

اثبات - تمرین

راهنمایی: F محدب است.

لم: (۱) $\int_\Omega F(v+C) \leq \int_\Omega F(v)$

(۲) $\|v_n + C_n\| \to \infty \Rightarrow \|v_n\| \to \infty$

$$I[u] \geq \int \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - F(v)$$

$$\geq \int \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \frac{\alpha}{2}|v|^2 - \gamma$$

$$\geq \int \frac{\lambda_1 - \alpha}{2}|v|^2 - \gamma$$

روشهای تفکیک در آنالیز

جلسه پنجم ۹۵/۷/۱۳

بهینه‌سازی مقید

$V(\cdot, x)$ ، Tـ متناوب باشد. (1)

$$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$$

$\nabla_x V$ پیوسته است

مسئله:
$$\begin{cases} \ddot{x} + \nabla_x V(t,x) = 0 \\ x(0) = x(T) \,, \ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) \end{cases}$$

$$H^1_T = \left\{ x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \middle|\ \int_0^T |\dot{x}|^2 dt < \infty \right\}$$

x به طور مطلق پیوسته، x ، T متناوب است

$$\|x\|^2 = \int_0^T |x|^2 + |\dot{x}|^2$$

معنی جواب: $\forall y \in H^1_T$

$$\int -\dot{x}\dot{y} + \nabla_x V(t, x(t))\, y(t)\, dt = 0$$

$$\varphi(x) = \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 - V(t,x)\, dt$$

یک شرط برای کنترل رشد V لازم است تا φ مشتق‌پذیر باشد.

φ به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است.

لم - (نامساوی پوانکاره) اگر $\int_0^T x\,dt=0$ آنگاه

$$\int_0^T |x|^2\,dt \le \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |\dot{x}|^2\,dt \qquad \forall x\in H_T^1$$

اثبات - تمرین به کمک سری فوریه

شرط کراندار شدن φ:

(2) $\quad 0\le a<\frac{4\pi^2}{T^2}$ که $V(t,x)\le \frac{1}{2}a|x|^2+b$

روی فضای $M=\{x\in H_T^1 : \underbrace{\int_0^T x\,dt=0}_{\psi(x)}\}$ $\leftarrow$ به طور ضعیف بسته است.

$$\exists\, \hat{x}\in M:\quad \varphi(\hat{x})=\min_{x\in M}\varphi(x)$$

$$\begin{cases}\varphi'(\hat{x})=\lambda\,\psi'(\hat{x}) \\ \cancel{\psi'(\hat{x})=0}\end{cases}$$

$\longrightarrow$ چرا $\lambda=0$؟

$$\langle \psi'(\hat{x}), y\rangle=\int_0^T y\,dt$$

$$\langle \varphi'(\hat{x}), y \rangle = \int_0^T \dot{\hat{x}}\dot{y} - \nabla_x V(t,\hat{x})\, y \, dt = \lambda \int_0^T y \, dt$$

$$\forall y \in H^1_T$$

$$y \equiv 1 \Rightarrow T\lambda = -\int_0^T \underbrace{\nabla_x V(t,\hat{x})}_{\text{یک تابع T-متناوب فرد}} \, dt$$

شرط صدق : $(3)\quad \nabla_x V(-t,-x) = -\nabla_x V(t,x)$

این شرط + $\hat{x}(-t) = -\hat{x}(t) \Longrightarrow \lambda = 0 \; .$

$$\eta(x) = x(t) + x(-t)$$

$$\min \varphi = \varphi(\bar{x})$$

$$\begin{cases} x \in M \\ \eta(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{زیرفضای بسته } H^1_T$$

$$\varphi'(\bar{x}) = \lambda_1 \psi'(\bar{x}) + \lambda_2 \eta'(\bar{x})$$

$$\int_0^T \dot{\bar{x}}\dot{y} - \nabla_x V(t,\bar{x})\, y \, dt = \lambda_1 \int_0^T y\, dt + \lambda_2 (y(t) + y(-t))$$

برای هر تابع زوج $y \in H^1_T$:

$$\lambda_1 \int_0^T y\,dt + \cancel{+}2\lambda_2 \left(y(t) + \cancel{y(-t)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \text{ثابت} \quad \text{یا} \quad \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \int_0^T y\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0$$

نتیجه: تحت شرایط (۱)، (۲) و (۳) معادله جواب متناوب وجود دارد.

مثال:

$$\begin{cases} \ddot{u} + k(t)e^{u} = h(t) \\ u(0) = u(2\pi), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi) \end{cases} \qquad (\Omega, k(x)e^{2u}dx) \rightarrow \Delta u + k(x)e^{2u} = 0$$

h, k پیوسته و 2π-متناوب هستند و $\underbrace{\int_0^{2\pi} h(t)\,dt = 0}$

برای وجود جواب در حالت $k = 0$ لازم است.

$$\varphi(u) = \int_0^{2\pi} \overbrace{\tfrac{1}{2}|\dot{u}|^2 - ke^{u} + hu}^{f(t,u,\dot{u})}\,dt \leftarrow \text{از پایین کران دار نیست.}$$

φ روی $H^1_{2\pi}$ به طور ضعیف پیوسته است

$$\Upsilon_1(u) = \int_0^{2\pi} k e^{u}\, dt = 0$$

$$\Upsilon_2(u) = \int_0^{2\pi} u\, dt = 0 \implies \int_0^{2\pi} |\dot{u}|^2\, dt \geq \int_0^{2\pi} |u|^2 dt$$

$$\varphi(u) = \int \frac{1}{2}|\dot{u}|^2 + hu\, dt \geq \int \frac{1}{2}|\dot{u}|^2 - \frac{\frac{1}{\varepsilon}h^2 + \varepsilon u^2}{2}\, dt$$

$$\geq \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)|\dot{u}|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}h^2$$

$\implies$ φ کرسی است.

$$\varphi(\hat{u}) = \min_{\substack{u \in H^1_{2\pi} \\ \Upsilon_1(u) = \Upsilon_2(u) = 0}} \varphi(u)$$

$$\implies \varphi'(\hat{u}) = \lambda_1 \Upsilon_1'(\hat{u}) + \lambda_2 \Upsilon_2'(\hat{u})$$

سوال: $M=\{u\in H^1_{2\pi} : \psi_1(u)=\psi_2(u)=0\}$ چرا خمینه‌ی هموار است؟

$$\alpha\psi_1' + \beta\psi_2' = 0$$

$$\forall v\in H^1_{2\pi} \quad \alpha\int_0^{2\pi} k e^{u} v\,dt + \beta\int_0^{2\pi} v\,dt = 0 \implies \alpha=\beta=0 \ ?$$

$$\left.\begin{aligned} &\implies \alpha K(t) e^{u(t)} + \beta = 0 \\ &\psi_1(u) = \int k e^{u} = 0 \end{aligned}\right\} \implies \beta = 0$$

شرط اینکه $K\not\equiv 0$ آنگاه $\alpha=0$.

$$\int_0^{2\pi} \dot{\hat{u}}\dot{v} + hv = \int_0^{2\pi} (\lambda_1 k e^{\hat{u}} + \lambda_2) v \qquad \forall v\in H^1_{2\pi}$$

$$v\equiv 1 \implies \lambda_2 = 0$$

$$\implies -\ddot{\hat{u}} + h = \lambda_1 k e^{\hat{u}}$$

$=1$ با انتخاب مناسب

$$u=\hat{u}+c \implies -\ddot{u} + h = (\lambda_1 e^{c}) k e^{u}$$

شرط آخر : u_0 جواب تناوبی $-\ddot{u} + h = 0$ وارد هیم اگر

$$\int_0^{2\pi} k(t)\, e^{u_0(t)}\, dt < 0$$ آنگاه $\lambda_1 > 0$.

$$\hat{u} = u_0 + \omega \Rightarrow \int \dot{\omega}\dot{v} = \lambda_1 \int k e^{u_0} \cdot e^{\omega}\, v$$

$$v = e^{-\omega} \Rightarrow -\int (\dot{\omega})^2 e^{-\omega} = \lambda_1 \int k e^{u_0} \Rightarrow \lambda_1 > 0$$

$$\ddot{u} + k e^{u} = h$$

$$u = u_0 + \omega \Rightarrow \ddot{\omega} + \left(k e^{u_0}\right) e^{\omega} = 0$$

$$\int \dot{\omega}\dot{v} - \left(k e^{u_0}\right) e^{\omega}\, v = 0$$

$$v = e^{-\omega} \Rightarrow \int k e^{u_0} < 0$$

نگاشت‌های هارمونیک

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ باز کراندار

$u : \Omega \longrightarrow S^{n-1}$

$$I[u] = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx$$ مینیمم انرژی

$$u = (u_1, \dots, u_n)$$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \vdots \\ \nabla u_n \end{pmatrix}$$

$$u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

$$|u(x)| = 1 \quad a.e.$$

$$\min I[u] = I[v]$$

$\begin{cases} u \in H^1 \\ |u| = 1 \end{cases}$ به طور ضعیف بسته است.

$$\frac{d}{d\varepsilon} I\Big[\underbrace{\frac{v + \varepsilon u}{|v + \varepsilon u|}}_{w_\varepsilon}\Big]\Big|_{\varepsilon = 0} = 0$$

$$\int \nabla w_\varepsilon : \nabla\Big(\frac{d}{d\varepsilon} w_\varepsilon\Big)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} w_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{u|v| - (v \cdot u)\frac{v}{|v|}}{|v|^2} = u - (v \cdot u) v$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla v : \nabla \big(u - \underbrace{(v \cdot u) v}_{|\nabla v|^2 (u \cdot v)}\big)\, dx = 0 \qquad \forall u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

$$|v| = 1 \Rightarrow v \cdot v = 1 \Rightarrow \sum v_i^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum v_i \nabla v_i = 0$$

$$\Rightarrow (\nabla v)^T v = 0$$

$$\Rightarrow \nabla (v \cdot u) v = |\nabla v|^2 (u \cdot v)$$

$$\Rightarrow -\Delta v = |\nabla v|^2 v$$

مسأله استوکس : $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ یک باز کران‌دار و همبند ساده

$f \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ نیروی خارجی

$p : \Omega \to \mathbb{R}$ فشار

u سرعت سیال

$$\begin{cases} -\Delta u = f - \nabla p & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \longrightarrow \text{شرط تراکم ناپذیری} \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$v \in \mathcal{A} \qquad \int_\Omega \nabla u : \nabla v \, dx = \int_\Omega \big(f\cdot v - \cancel{\underbrace{\nabla p \cdot v}_{\cancel{p \operatorname{div} v}}} \big)\, dx$$

$\operatorname{div} v = 0$

$$\emptyset \neq \mathcal{A} = \{ u \in H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0 \}$$

به معنای ضعیف

$$I[u] = \min_{u\in\mathcal{A}} \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f\cdot u$$

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla v \, dx = \int_\Omega f\cdot v \qquad \forall v \in \mathcal{A}$$

$$\underline{\underline{\Delta u - f = \nabla p}}$$

$$\Uparrow$$

$$v = \operatorname{curl} w \ , \quad w \in C_0^\infty$$

$$\int (\Delta u - f)\operatorname{curl} w \, dx = 0 \Longrightarrow \operatorname{curl}(\Delta u - f) = 0$$

$$u \xleftarrow{H^1} \eta_\varepsilon * u = u_\varepsilon \implies \operatorname{Curl}(\Delta u_\varepsilon - f_\varepsilon) = 0 \longrightarrow \text{in } \Omega' \subset\subset \Omega$$

$$f \xleftarrow{\mathcal{L}^2} \eta_\varepsilon * f = f_\varepsilon$$

تحقیق کردن این ادعا: $\omega_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \omega$

$$\operatorname{Curl} \omega_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \operatorname{Curl} \omega$$

$$\int v \cdot (\eta_\varepsilon * u) = \int (\eta_\varepsilon * v)\, u$$

$$\Delta u_\varepsilon - f_\varepsilon = \nabla P_\varepsilon \quad \text{in } \Omega'$$

$$\int_{\Omega'} p^\varepsilon = 0 \text{ به شرط آنکه } \longleftarrow \begin{cases} p^\varepsilon = \operatorname{div} v^\varepsilon & \text{in } \Omega' \\ v^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega' \end{cases}$$

لم: معادله بالا جواب دارد و $\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega')} \leq C \|p^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2(\Omega')}$

C مستقل از ε

$$\|p^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{\Omega'} |p^\varepsilon|^2\, dx = \int p^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon = -\int \nabla p^\varepsilon\, v^\varepsilon$$

$$= -\int (\Delta u_\varepsilon - f_\varepsilon)\, v^\varepsilon = \int \nabla u_\varepsilon : \nabla v^\varepsilon + f_\varepsilon v^\varepsilon$$

$$\|p^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \le C\left(\|u^\varepsilon\|_{H^1} + \|f^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}\right) \le \tilde{C}\left(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{\mathcal{L}^2}\right)$$

$$p^{\varepsilon_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^2(\Omega')} p \implies \Delta u - f = \nabla p \quad \text{in } \Omega'$$

به معنای ضعیف

$$\Delta u - f = \nabla p_k \ , \quad \exists\, p_k \in \mathcal{L}^2(\Omega'_k) \ , \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega'_k$$

$$p_{k+1}\Big|_{\Omega'_k} = p_k \implies \exists\, p \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

$$\Delta u - f = \nabla p \quad \text{in } \Omega$$

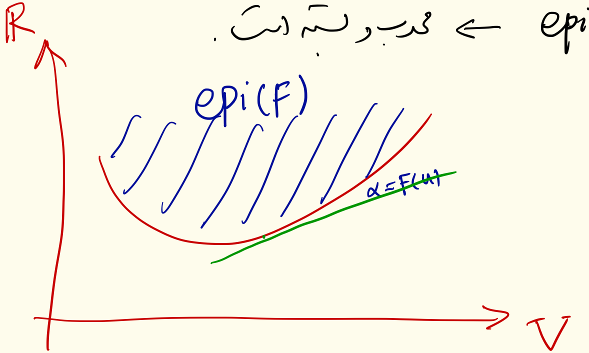
روشهای تفکیکی در آنالیز

جلسه ششم ۹۵/۷/۲۵

روش دوگانی

V فضای باناخ و $F: V \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ نیم پیوسته پایینی و محدب

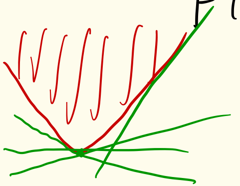
$\mathrm{epi}(F) = \{(u,\alpha)\in V\times\mathbb{R} \ , \ \alpha \geq F(\alpha)\}$ $\Rightarrow$ محدب و بسته است.



قضیه‌ی هان-باناخ $\Leftarrow$ هر مجموعه محدب و بسته را به صورت اشتراک نیم‌فضاهای تشکیل شده توسط یک تعداد ابرفضا

یعنی خانواده L_F از نگاشت‌های آفین وجود دارد که

$$F(u) = \sup\{\, l(u) : l\in L_F \,\}$$



__تعریف:__ زیرمشتق F در نقطه u.

$$\partial F(u) = \{\, Dl : l\in L_F \ , \ l(u)=F(u) \,\}$$

قضیه: فرض کنید $F: V \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ محدب و نیم پیوسته پایینی باشد. اگر F در u مشتق پذیر باشد (به معنای گاتو) آنگاه

$$\partial F(u) = \{DF(u)\} \qquad DF(u) \in V'$$

برعکس اگر F از پایین کران دار (لااقل در یک همسایگی u) و اگر $\partial F(u) = \{u^*\}$ تک مقداری باشد آنگاه

F به معنای گاتو مشتق پذیر است و $\langle DF(u), v\rangle = \langle u^*, v\rangle$.

تبدیل Legendre-Fenchel.

$F: V \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ و $F \not\equiv +\infty$، آنگاه $F^*: V^* \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

$$F^*(u^*) = \sup_{u\in V}\{\langle u^*, u\rangle - F(u)\}$$ ← محدب و نیم پیوسته پایینی

نامساوی Young $\quad \langle u^*, u\rangle \le F(u) + F^*(u^*)$

مثال :

$$F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u)=\frac{1}{p}|u|^p \qquad p>1$$

$$F^*(v) = \sup_{u\in\mathbb{R}^n}\{\underbrace{v\cdot u - F(u)}_{g(u)}\}$$

$$g(\bar{u}) = \sup_u g(u) \Rightarrow Dg(\bar{u}) = 0$$

$$\Rightarrow |\bar{u}|^{p-2}\bar{u} = v \Rightarrow \bar{u} = v\,|v|^{\frac{1}{p-1}-1}$$

$$g(\bar{u}) = |v|^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{1}{p}|v|^{\frac{p}{p-1}} = \left(1-\frac{1}{p}\right)|v|^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1 \Rightarrow F^*(v) = \frac{1}{q}|v|^q$$

نکته :

$$F_1 \le F_2 \Longrightarrow F_2^* \le F_1^*$$

$$F^* : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(F^*)^* : V^{**} \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow F^{**} := (F^*)^*\Big|_V$$

$$V \xrightarrow{\text{نشاندن طبیعی}} V^{**}$$

$$F^{**} : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

محدب و نیم پیوسته پایینی $\leftarrow$ $$F^{**}(u) = \sup_{u^* \in V^*} \left\{ \langle u^*, u \rangle - F^*(u^*) \right\}$$

$$= \sup_{u^* \in V^*} \left\{ \langle u^*, u \rangle - \sup_{v \in V} \big(\langle u^*, v \rangle - F(v) \big) \right\}$$

$$\leq \sup_{u^* \in V^*} \langle u^*, u \rangle - \langle u^*, u \rangle + F(u) = F(u)$$

<u>قضیه:</u> ([illegible]) اگر F محدب و نیم پیوسته پایین باشد و $F \not\equiv +\infty$ آنگاه

$$F^{**} = F$$

قضیه: اگر $F: V \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ محدب و نیم پیوسته پایینی باشد آنگاه تساوی

$$F^*(u^*) + F(u) = \langle u^*, u\rangle$$

هم ارز است با اینکه $u \in \partial F^*(u^*)$ یا $u^* \in \partial F(u)$.

اثبات ⇐ واضح است.

$$\langle u^*, v\rangle - F^*(u^*) := l(v)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{تساوی بالا} \Rightarrow & l(u) = F(u) \\ \text{نامساوی یانگ} \Rightarrow & l(v) \leq F(v) \end{array}\right\} \Rightarrow Dl \in \partial F(u)$$

$$\Rightarrow u^* = Dl \in \partial F(u)$$

$$\langle u^*, v\rangle \leq F(v) + F^*(u^*)$$

عکس:

$$u^* \in \partial F(u) \Rightarrow \begin{cases} l(v) = \langle u^*, v\rangle - \beta \leq F(v) \\ l(u) = F(u) \end{cases}$$

$$F^*(u^*) = \sup_{v\in V} \langle u^*, v\rangle - F(v) = \langle u^*, u\rangle - F(u)$$

$$= \beta$$

مرور در تعریف تحدب:

$$F((1-t)u + tv) \le (1-t)F(u) + tF(v)$$

اگر $F \in C^1$ باشه شرط بالا معادل است با اینکه DF یکنوا باشه یعنی

$$DF : V \longrightarrow V^*$$

$$\langle DF(u) - DF(v) , u - v \rangle \ge 0$$

اگر نامساوی بالا اکید باشد، تابع F اکیداً محدب است. $\Leftarrow$ DF یک به یک است.

فرض کنید در قضیه قبل F اکیداً محدب و C^1 باشد و $u^* = DF(u) \Leftarrow u \in \partial F^*(DF(u))$

$$\Rightarrow \partial F^*(DF(u)) = \{u\}$$

$$v \in \partial F^*(u^*) \Longrightarrow F^*(u^*) + F(v) = \langle u^*, v \rangle$$

$$\Longrightarrow u^* \in \partial F(v)$$

$$\Longrightarrow u^* = DF(v)$$ تناقض با یک به یکی

$$\Longrightarrow DF(u) = DF(v) \Rightarrow$$

اگر $F\in C^1$ و اکیداً محدب $\Longrightarrow$ F^* مشتق‌پذیر است و

$$DF^*(DF(u)) = u$$

گزاره: اگر DF اکیداً یکنوا و تراکمی (به معنای زیر) باشد

$$\langle DF(u)-DF(v),\, u-v\rangle \ge \alpha(\|u-v\|)\cdot\|u-v\|$$

$\alpha:[0,\infty)\xrightarrow{\text{پیوسته}}[0,\infty)$ ، $\alpha(0)=0$ و $\alpha>0$ ، $\lim\limits_{r\to+\infty}\alpha(r)=+\infty$.

آنگاه $F^*\in C^1$.

اثبات: $u^*=DF(u)\,,\ v^*=DF(v) \Longrightarrow u=DF^*(u^*)\,,\ v=DF^*(v^*)$

$$\|u^*-v^*\| \ge \frac{\langle u^*-v^*,\, DF^*(u^*)-DF^*(v^*)\rangle}{\|u-v\|} \ge \alpha(\|u-v\|)$$

نکته: اگر $F\in C^1$ اکیداً محدب باشد و $\frac{F(u)}{|u|}\to\infty$ وقتی $|u|\to\infty$ آنگاه DF پوشا است.

نتیجه: در بعد متناهی این مطلب ثابت می‌کند که $(DF)^{-1}$ نیز پیوسته است. $\Leftarrow$ DF^* پیوسته است.

اثبات نکته: $u\longmapsto F(u)-\langle u^*,u\rangle$ کرسیو است.

$$F(\bar u)-\langle u^*,\bar u\rangle=\inf_{u\in V}\left(F(u)-\langle u^*,u\rangle\right)$$ ، مینیمم دارد $\Leftarrow$

$$=-F^*(u^*)$$

$\Rightarrow \quad DF(\bar u)=u^* \quad \Rightarrow$ DF پوشا است.

__کاربرد:__ $L: D(L) \subseteq X \longrightarrow X$ خودالحاق، $R(L)$ بسته است.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $X = \mathcal{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

(F1) F محدب است و $\nabla F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک به یک و پوشا است.

(به عنوان مثال می‌توان فرض کرد که F اکیداً محدب است و $\frac{F(u)}{|u|}$ کرانی است.)

__مسأله:__ $\exists u \in D(L) : \quad Lu + \nabla F(u) = 0$

فرم تغییراتی

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(Lu, u)_X + \int_\Omega F(u)\,dx$$

(F2) $|\nabla F| \leq a|u| + b \quad \Longrightarrow$ φ مشتق‌پذیر است و نقاط بحرانی آن در جواب مسأله هستند.

$$u^* = \nabla F(u) \quad . \quad \nabla F^*(\nabla F(u)) = u \quad , \quad F^* \in C^1 \Longleftarrow (F1)$$

$$Lu + \nabla F(u) = 0 \qquad (P)$$

$$L(\nabla F^*(u^*)) + u^* = 0$$

$$\Longrightarrow \nabla F^*(u^*) + L^{-1} u^* = 0 \qquad (\tilde{P})$$

ابهام: L لزوماً وارون‌پذیر نیست.

$X = Nul(L) \oplus R(L) \Longleftarrow$ L خودالحاق و $R(L)$ بسته است

$$\Longrightarrow L\big|_{R(L)} : D(L) \cap R(L) \longrightarrow R(L)$$

وارون‌پذیر است

$$K = L^{-1} : R(L) \longrightarrow R(L)$$

$$u^* \in R(L)$$

$$\begin{cases} \nabla F^*(u^*) + K u^* \in Nul(L) \\ u^* \in R(L) \end{cases} \qquad (P^*)$$

$$\varphi^*(v) = \frac{1}{2}(Kv, v)_X + \int_\Omega F^*(v)\,dx$$

$$\varphi^* : R(L) \longrightarrow \mathbb{R}$$

سؤال: آیا نقاط بحرانی φ^* جواب (P^*) هستند؟

$$\exists\, \alpha, \beta, \delta > 0 \qquad \alpha \frac{|u|^2}{2} - \delta \leq F(u) \leq \beta \frac{|u|^2}{2} + \delta \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \; (F2)$$

$$(F2) \Rightarrow \frac{1}{\beta}\frac{|v|^2}{2} - \delta \leq F^*(v) \leq \frac{1}{\alpha}\frac{|v|^2}{2} + \delta$$

$$\Downarrow$$

φ^* مشتق‌پذیر است.

اگر $D\varphi^*(u^*) = 0$ $\Rightarrow (D\varphi^*(u^*), v) = 0 \quad \forall v \in R(L)$

$$X = Nul(L) \oplus R(L) \Rightarrow \nabla F^*(u^*) + Ku^* \in Nul$$

روشهای گرمایی در آنالیز

جلسه هفتم ۲۷/۷/۹۵

دوگانی

* مرور سریع: اگر $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ اکیداً محدب و C^1 ، به علاوه $\frac{F(u)}{|u|}$ تراکمی باشد ،

∇F وارون پذیر است و $(\nabla F)^{-1}=\nabla F^*$

$$F^*(v)=\sup_{u\in\mathbb{R}^n}\langle v\cdot u-F(u)\rangle$$

مسئله (P): $Lu+\nabla F(u)=0$ ، $L:D(L)\subseteq X\to X$ خودالحاق

بسته $R(L)$

$X=L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$

$$\varphi(u)=\int_\Omega \frac{1}{2}(Lu,u)_X+F(u)\,dx$$

(F1) $\nabla F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک به یک و پوشا است.

$$\alpha\frac{|u|^2}{2}-\delta\le F(u)\le\beta\frac{|u|^2}{2}+\delta \quad (F2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta}\frac{|v|^2}{2}-\delta\le F^*(v)\le\frac{1}{\alpha}\frac{|v|^2}{2}+\delta$$

$$v = \nabla F(u) \Longrightarrow u = \nabla F^*(v)$$

$$Kv + \nabla F^*(v) \in \mathrm{Nul}(L) \qquad (P^*)$$

$$K = L^{-1} : R(L) \xrightarrow{\text{فشرده}} R(L)$$

$$\varphi^*(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}(Kv, v) + F^*(v)\, dx$$

$(F2) \Longrightarrow$ نقاط بحرانی $\varphi^* : R(L) \to \mathbb{R}$ جواب‌های مسأله (P^*) هستند.

$$\sigma(L) = \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \quad , \quad \sigma(K) = \{\lambda_j^{-1}\}_{j\in\mathbb{Z}}$$

$$|\lambda_j| \to +\infty$$

$$Kv = \sum \frac{\langle v, v_j\rangle}{\lambda_j} v_j$$

$$K_n v = \sum_{|j|\le n} \frac{\langle v, v_j\rangle}{\lambda_j} v_j$$

$\|K_n - K\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow K$ فشرده است

$$v_n \to v \implies K v_n \to K v$$

$$\langle K v_n , v_n \rangle \to \langle K v , v \rangle$$

$\implies$ φ^* به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است.

شرط تراکمی φ^* :

$$\int_\Omega \frac{1}{2} (K v , v) \geq \frac{1}{2\lambda_{-1}} \|v\|^2$$

λ_{-1} → اولین مقدار ویژه منفی

$$\int F^*(v)\,dx \geq \frac{1}{\beta}\|v\|^2 - \delta|\Omega|$$

اصلاح شده شرط (F2) . فرض می‌کنیم $0 < \alpha \leq \beta < -\lambda_{-1}$

نتیجه: φ^* روی $R(L)$ می‌نیمم دارد.

اگر $|\nabla F(0)| = F(0) = 0$ ، $u=0$ جواب بدیهی مسئله (P) است . و اگر بخواهیم یک جواب غیربدیهی نیز پیدا کنیم شرط زیر را اضافه می‌کنیم تا می‌نیمم φ^* در $v=0$ به دست نیاید

نکته: اگر L عملگر مثبت باشد، $u=0$ تنها جواب مسأله است.

$$Lu+\nabla F(u)=0$$

$$\underbrace{(Lu,u)}_{\geq 0}+\underbrace{(\nabla F(u),u)}=0$$

مثبت است به دلیل محدب بودن

با فرض اینکه L مثبت نیست و تقارن دور و بر صفر شکل دارد، نشان می‌دهیم مینیمم φ^* منفی است.

$$\liminf_{u\to 0}\frac{2F(u)}{|u|^2}>-\lambda_{-1} \qquad (F3)$$

ادعا: $\rho>0$ وجود دارد که اگر $\Sigma_\rho=\{v\in Nul(L-\lambda_{-1}) : \|v\|=\rho\}$ آنگاه $\varphi^*\big|_{\Sigma_\rho}<0$.

$$v\in\Sigma_\rho \Rightarrow Lv=\lambda_{-1}v \Rightarrow Kv=\frac{1}{\lambda_{-1}}v$$

$$\varphi^*(v)=\int\frac{1}{2\lambda_{-1}}|v|^2+F^*(v)<0$$

برای $|v|=\rho$: $\quad F^*(v) < -\frac{1}{2\lambda_{-1}}|v|^2$

$$\Updownarrow$$

$$F(u) > -\frac{\lambda_{-1}}{2}|u|^2 \longleftarrow (F3)$$

مثال: $X = L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ ، $Lx = \ddot{x}$ ، $DL = \{x \in X;\ x(0)=x(T),\ \dot{x}(0)=\dot{x}(T),\ \ddot{x} \in X\}$

مسئله: پیدا کردن جواب تناوبی $\ddot{x} + \nabla V(x) = 0$ غیربدیهی.

(*) $V \in C^1$ اکیداً محدب است. $V(0) = |\nabla V(0)| = 0$

$$\ddot{x} = \lambda x \Rightarrow \sigma(L) = \left\{-\frac{4n^2\pi^2}{T^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{2V(x)}{|x|^2} < \frac{4\pi^2}{T^2} < \liminf_{x\to 0} \frac{2V(x)}{|x|^2} \qquad (**)$$

(*) , (**) $\Longrightarrow$ معادله بالا جواب تناوبی

با دوره تناوب T دارد.

مثال:

$$\begin{cases} Lu = u_{tt} - u_{xx} = -u\,|u|^{p-2} & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,t) = u(x,t+T) \end{cases}$$

قضیه: $\frac{T}{\pi} \in \mathbb{Q}$ معادله موج غیرخطی برای $p>2$ دارای یک جواب T- متناوب غیربدیهی است.

اثبات - $T = 2\pi$.

$1<q<2$ ، $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ که $F^*(v) = \frac{1}{q}|v|^q \Leftarrow F(u) = \frac{1}{p}|u|^p$

$$v = \nabla F(u) \Longrightarrow u = \nabla F^*(v)$$

$$Lu = -v \Longrightarrow L^{-1} v = -\nabla F^*(v)$$

$$\liminf_{u\to 0} \frac{2F(u)}{|u|^2} = \liminf_{u\to 0} \frac{2}{p}|u|^{p-2} = 0 \not> -\lambda_{-1}$$

حالت $p<2$ روش قبل کار می‌کند.

$$Lu = u_{tt} - u_{xx}$$

$$Lu = 0 \implies u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$ (روش دالامبر)

$$u(0,t) = 0 \implies \psi(-t) = -\varphi(t)$$

$$\implies u(x,t) = \varphi(x+t) - \varphi(t-x)$$

$$\text{Nul}\, L = \left\{ \varphi(x+t) - \varphi(t-x) : \varphi \in L^1,\ \varphi(s+2\pi) = \varphi(s),\ \int_0^{2\pi} \varphi(s)\, ds = 0 \right\}$$

$$\sigma(L) = \left\{ n^2 - m^2 : m \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ \sin(nx)\, e^{imt} \right\} \longrightarrow$$ توابع ویژه

$$Lu = -v, \quad v \in (\text{Nul}(L))^{\perp} \implies u = -Kv$$

$$\nabla F^*(v) + K(v) \in \text{Nul}(L)$$

$$\varphi^*(v) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(Kv, v) + \underbrace{F^*(v)}_{= \frac{1}{q}|v|^q}\, dx\,dt$$

مشکل جدی در اینجا مسئله شرایط تراکمی φ^* است. ← راه حل: تبدیل شدن به یک مسئله مقید.

$$\min_{\substack{v \in R(L) \\ \|v\|_q = 1}} \varphi^*(v) = \varphi^*(v^*)$$

$$\int_\Omega \frac{1}{2}(Kv, v) \geq \int_\Omega \frac{\lambda_{-1}}{2} |v|^2 \cancel{\geq} -c \int |v|^q$$

φ^* روی $\{\|v\|_q = 1\}$ کران دار است؟

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (Kv^*, v) + (Kv, v^*) = -\mu \int v^* |v^*|^{q-2} v$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \big(\underbrace{Kv^* + \mu v^* |v^*|^{q-2}}_{\in Nul(L)}, v\big) = 0 \quad \forall v \in R(L)$$

$$\underset{\alpha > 0}{v^* = \alpha v} \Rightarrow Kv + \underbrace{\mu \alpha^{q-2}}_{=1} v |v|^{q-2} \in Nul(L)$$

چرا $0 < \mu$ ؟

اگر v تابع ویژه متناظر یک مقدار ویژه منفی باشد که $\|v\|_q=1$ ، $\varphi^*(v) < 0$

پس مینیمم φ منفی است و نه تنها جواب غیربدیهی است بلکه $\mu > 0$ است.

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه هشتم ۹۵/۸/۲

$$(F3) \qquad \liminf_{u \to 0} \frac{2F(u)}{|u|^2} > -\lambda_{-1}$$

ادعا: $\exists \rho : \|v\| = \rho ,\ v \in Nul(L - \lambda_{-1})$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \lambda_{-1} |v|^2 - F^*(v) < 0$$

$$F(0) = 0 = |DF(0)| \Rightarrow |DF^*(0)| = 0 \Rightarrow \quad |DF^*(v)| \leq \varepsilon \quad \text{for } |v| \leq \rho$$

$$(F3) \Rightarrow \quad \frac{2F(u)}{|u|^2} \geq \lambda_* > -\lambda_{-1} \quad \text{for } |u| \leq \varepsilon$$

بنابر حالت تساوی نامساوی یانگ رابطه پایین برقرار است.

$$|v| \leq \rho \Rightarrow \quad |DF^*(v)| \leq \varepsilon ,$$

$$F^*(v) = \sup_{|w| \leq \varepsilon} \langle v, w \rangle - F(w)$$

$$\leq \sup_{|w| \leq \varepsilon} \langle v, w \rangle - \frac{\lambda_*}{2} |w|^2$$

$$\leq \sup_{w \in \mathbb{R}^n} \langle v, w \rangle - \frac{\lambda_*}{2} |w|^2 = \frac{1}{2\lambda_*} |v|^2$$

مثال - دستگاه‌های همیلتونی

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X = (x_1, x_2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\partial_{x_2} H \\ \dot{x}_2 = \partial_{x_1} H \end{cases}$$

$$\dot{X} = J \nabla H(x) \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} H(X(t)) = \nabla H(X(t)) \cdot \dot{X} = \partial_{x_1} H \cdot \dot{x}_1 + \partial_{x_2} H \cdot \dot{x}_2 = 0$$

سؤال: وجود جواب تناوبی در سطوح تراز H.

قضیه: $H \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$ اکیداً محدب، نامنفی و ترکی، $H(0)=0$. برای هر $\alpha > 0$، یک جواب تناوبی وجود دارد که

$$H(x(t)) = \alpha .$$

$$E(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \langle x, J\dot{x} \rangle \, dt$$

$$C_\alpha = \left\{ x : \ x(t) = x(t+1) \ , \ \int_0^1 H(x(t))\, dt = \alpha \right\}$$

نکته: اگر $E(x) = \min_{y \in C_\alpha} E(y)$ آنگاه

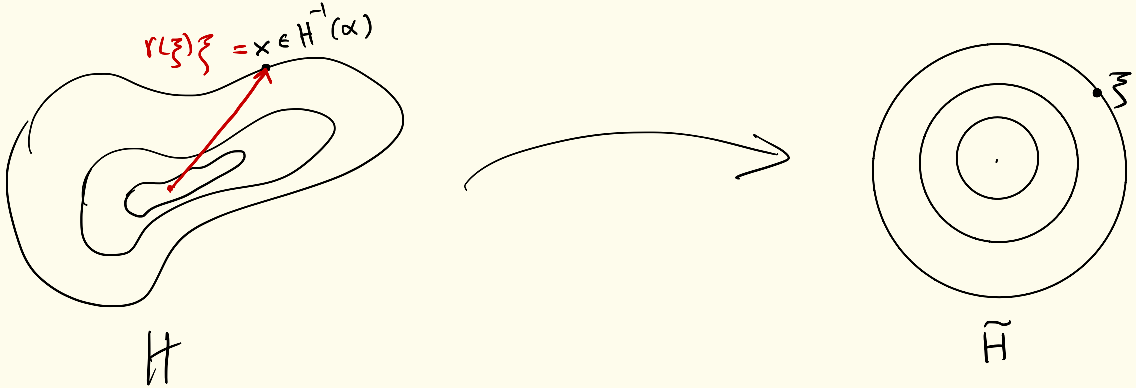
$$\frac{1}{2}\int_0^1 \langle y, J\dot{x} \rangle + \langle x, J\dot{y} \rangle \, dt = \lambda \int_0^1 \nabla H(x) \cdot y \, dt \qquad \forall y, \ y(t) = y(t+1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \langle y, J\dot{x} \rangle - \langle J^t \dot{x}, y \rangle \, dt$$

$$= \int_0^1 \langle y, J\dot{x} \rangle \, dt$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} J\dot{x} = \lambda \nabla H(x) \\ x(t) = x(t+1) \end{cases}$$

$$\tilde{x}(t) = x(\lambda t) \Rightarrow \begin{array}{l} J\dot{\tilde{x}} = \nabla H(\tilde{x}) \\ \tilde{x}(t) = \tilde{x}\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) \end{array}$$



$H^{-1}(\alpha)$ اکیداً محدب و ستاره، برای هر $x\in H^{-1}(\alpha)$ ، $\xi \in S^{2n-1}$ و $r(\xi)\in \mathbb{R}$ وجود دارد

$$x = r(\xi)\,\xi$$

$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} r\left(\frac{x}{|x|}\right)^{-q} \cdot |x|^{q} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$1 < q < 2$

نکته: شارهای سیستم $\dot{x} = \nabla H(x)$ با $\dot{X} = \nabla \tilde{H}(X)$ یکسان است.

$$\nabla H^* = (\nabla \tilde{H})^{-1}$$

$$H^*(ry) = r^p H^*(y)$$

. است p همگن مرتبه H^*

$2 < p$

$$\frac{H^*(ry)}{r^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{(ry)\cdot x - \tilde{H}(x)}{r^p}$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(y \cdot \frac{x}{r^{p-1}} - \underbrace{\tilde{H}\left(\frac{x}{r^{p-1}}\right)}_{=\left(\frac{1}{r^{p-1}}\right)^q \tilde{H}(x)} \right) = H^*(y)$$

$$\dot{x} = J \nabla \tilde{H}(x)$$

$$y = \nabla \tilde{H}(x) \Longrightarrow Jy = \dot{x} \Longrightarrow x(t) = x(0) + \int_0^t Jy(s)\,ds$$

$$x = \nabla H^*(y)$$

$$(Ky)(t) = \int_0^t Jy(s)\,ds$$

$$x = x_0 + Ky$$

مسأله دوگان $\quad Ky - \nabla H^*(y) =$ ثابت

$$L = \frac{d}{dt} \qquad D(L) = \{ x : x(t) = x(t+1) \}$$

$$R(L) = \{ y : \int_0^1 y \, dt = 0 \}$$

$$K : R(L) \longrightarrow D(L)$$

$$E^*(y) = \int_0^1 H^*(y) - \frac{1}{2} \langle Ky, y \rangle \, dt$$

$$\min_{y \in R(L)} E^* \Longrightarrow \int_0^1 \nabla H^*(y) \cdot z - \frac{1}{2} \left(\langle Ky, z \rangle + \langle Kz, y \rangle \right) dt = 0$$

$$\forall z \in R(L)$$

$$\int_0^1 \langle \nabla H^*(y) - Ky , z \rangle \, dt = 0$$

$\Longrightarrow \nabla H^*(y) - Ky =$ ثابت

چرا مینیمم E^* منفی است؟

$$K(y) = \lambda y \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \dot{y} = Jy \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = a\, e^{2\pi m i t}$$

$$\int_0^1 y\, dt = 0 \qquad\qquad y(t+1) = y(t) \qquad\qquad Ja = \mu a$$

$$E^*(\alpha a\, e^{2\pi m i t}) = \int_0^1 \alpha^p H^*(a\, e^{2\pi m i t}) - \frac{\lambda \alpha^2}{2} |a|^2 \, dt$$

$$= C\alpha^p - D\alpha^2 = \alpha^2 (C\alpha^{p-2} - D) < 0$$

برای α به اندازه‌ی کافی کوچک

$\exists$ تناوبی x s.th. $\dot{x} = J \nabla \tilde{H}(x)$

$$y(t) = \gamma\, x(\beta t)$$

$$\alpha = \tilde{H}(y) = \gamma^q \tilde{H}(x) \rightarrow \gamma = ?$$

$$\gamma \beta\, \dot{x}(\beta t) = J \nabla \tilde{H}(\gamma x(\beta t)) = J \gamma^{q-1} \nabla \tilde{H}(x(\beta t))$$

$$\boxed{\gamma \beta = \gamma^{q-1}} \longrightarrow \beta = ?$$

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه نهم ۴/۸/۹۵

توابع شبه محدب

یادآوری: $F(x,u,p): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ کاراتئودوری

$p \longmapsto F(x,u,p)$ محدب و C^1 باشد آنگاه $\int F(x,u,\nabla u)\,dx$ روی

$W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ به‌طور ضعیف نیم‌پیوسته پایینی است.

اگر $F \geq -C$ ، می‌توان شرط C^1 را به پیوستگی تقلیل داد.

قضیه: اگر $F(x,u,p)$ کاراتئودوری باشد و $F(\cdot\,,u,p)$ به‌طور موضعی انتگرال‌پذیر باشد و برای هر $u \in \mathbb{R}^N$

$$p \longmapsto \int_\Omega F(x,u,p(x))\,dx$$

نیم‌پیوسته پایینی است در توپولوژی ضعیف $*$ - L^∞_{loc} برای توابع $p: \Omega \to \mathbb{R}^m$

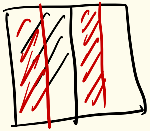
آنگاه برای تقریباً هر $x \in \Omega$ و هر $u \in \mathbb{R}^N$ تابع $F(x,u,\cdot)$ محدب است.

توضیح: توپولوژی ضعیف * روی $L^\infty_{loc} = (L^1_{loc})'$.

$$P_n \xrightarrow{*} P \quad \text{in } L^\infty_{loc}$$

$$\iff \int_\Omega P_n \varphi \longrightarrow \int_\Omega P\varphi \qquad \forall \varphi \in L^1_{loc}$$

تمرین: Q مکعب برای هر $\lambda \in [0,1]$ دنباله χ_h از توابع مشخصه مجموعه اندازه‌پذیر $E_h \subseteq Q$ وجود دارد که



$$\chi_h \xrightarrow{*} \lambda \chi_Q$$

یعنی

$$\int_{E_h} \varphi \longrightarrow \lambda \int_Q \varphi$$

$\lambda \in [0,1]$
$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^m$

اثبات: $\boxed{*}$ $\quad \lambda F(x,u,a) + (1-\lambda) F(x,u,b) \geq F(x,u,\lambda a + (1-\lambda) b)$

تعریف $P(x) = \lambda a + (1-\lambda) b$ داخل مکعب $Q \subseteq \Omega$ و λ $\;\chi_h \xrightarrow{*} \lambda$ مطابق تمرین قبل در نظر بگیرید.

(با صفر به Ω توسعه می‌دهیم.)

$$a\chi_h + b(1-\chi_h) \xrightarrow{*} P$$

$$\liminf \int_Q F(x,u,a\chi_h + b(1-\chi_h))\,dx \geq \int_Q F(x,u,\lambda a + (1-\lambda) b)\,dx$$

$$\int_Q F(x,u,a)\chi_h + F(x,u,b)(1-\chi_h)\,dx \longrightarrow \int_Q \lambda F(x,u,a) + (1-\lambda) F(x,u,b)$$

بنابر قضیه نقاط لبگ برای تقریباً هر x نامساوی $*$ درست است.

(مجموعه اندازه صفری که این نامساوی برای آن درست نیست وابسته به x, a, b, λ است.)

در نتیجه شمارا تا زیرمجموعه اندازه صفر $A_n \subseteq \Omega$ وجود دارد که برای هر $x \in \Omega \setminus \bigcup A_n$

رابطه $(*)$ برای همه a, b, u و λ گویا درست است.

با توجه به خاصیت کاراتئودوری که $F(x,\cdot,\cdot)$ تقریباً برای هر x پیوسته است نتیجه می‌شود که $(*)$ برای هر n، a، b و λ درست است.

$p=\nabla u$ توپولوژی ضعیف $*$ در $C^{0,1}=W^{1,\infty}$

$u_n \xrightarrow[W^{1,\infty}]{*} u$ شرط $\|Du_n\|_\infty\le M$ اضافه کنید. $\Leftarrow$ $u_n \xrightarrow{unif} u$

توضیح: $u_n\in W^{1,\infty}(\Omega)$ را ل‌ـ همگرا گوییم هرگاه $\|Du_n\|_\infty\le M$ به ازای یک مقدار ثابت M به علاوه

$u_n \longrightarrow u$ به طور یکنواخت.

در حقیقت ل‌ـ همگرایی، همگرایی ضعیف در هر فضای $W^{1,p}(\Omega)$ را نتیجه می‌دهد.

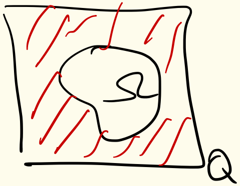
قضیه: Ω باز کران‌دار، $F(p)$ پیوسته و

$$\mathcal{F}(u)=\int_\Omega F(Du)\,dx$$

نسبت به ل‌ـ همگرایی نیم‌پیوسته پایینی است. آنگاه برای هر $\varphi\in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ و هر $P_0\in\mathbb{R}^{n\times N}$

$$F(P_0) \leq \fint_{\Omega} F(P_0 + D\varphi)\, dx$$

<u>اثبات</u>: $\Omega \subseteq Q = [0,1]^n$ و قرار دهید $\varphi|_{Q\setminus\Omega} \equiv 0$. φ را به صورت متناوب به کل $\mathbb{R}^n$ گسترش دهید.



$$\varphi_h(x) = \frac{1}{h}\varphi(hx) \qquad \forall h \in \mathbb{Z}.$$

$$u_h(x) = P_0 x + \varphi_h(x) \xrightarrow{\ L\ } P_0 x \quad \text{in } Q$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} F(P_0)\, dx \leq \liminf_{h\to\infty} \int_{\Omega} F(Du_h)\, dx$$

$$= \liminf \int_Q F(P_0 + D\varphi(hx))\, dx - \int_{Q\setminus\Omega} F(P_0)\, dx$$

$$= \liminf \int_{hQ} h^{-n} F(P_0 + D\varphi(y))\, dy - \int_{Q\setminus\Omega} F(P_0)\, dx$$

$$= \int_Q F(p_0 + D\varphi(x))\,dx - \int_{Q\setminus\Omega} F(p_0)\,dx$$

$$= \int_\Omega F(p_0 + D\varphi(x))\,dx$$

قضیه: $F(x,u,p)$ در $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N}$ پیوسته است و

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x,u,Du)\,dx$$

نسبت به L- همگرایی نیم‌پیوسته پایینی است. آنگاه برای هر $\varphi \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ و هر Ω و $x_0 \in \Omega$ و $u_0 \in \mathbb{R}^N$ و $p_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$ داریم:

$$F(x_0,u_0,p_0) \le \fint_\Omega F(x_0,u_0,p_0 + D\varphi(x))\,dx$$

اثبات_ $\Omega \subseteq Q=[0,1]^n$ باشد. به تناوب φ را توسیع دهید. W را مکعب به ضلع t به مرکز x_0 در نظر بگیرید که $W \subseteq Q$.

$$u(x) = u_0 + \langle P_0 , x - x_0 \rangle$$

$$\varphi_h(x) = \frac{t}{h}\, \varphi\left(\frac{h(x-x_0)}{t}\right)$$

$$u_h(x) = u(x) + \tilde{\varphi}_h(x) \xrightarrow{L} u$$

$$\tilde{\varphi}_h(x) = \begin{cases} \varphi_h(x) & \text{if } x \in W \\ 0 & \text{if } x \in \Omega \setminus W \end{cases}$$

$$\int_\Omega F(x, u(x), P_0)\, dx \leq \liminf \int_\Omega F(x, u_h(x), Du_h(x))\, dx$$

$$= \liminf \int_\Omega F(x, u(x) + \tilde{\varphi}_h(x), P_0 + D\tilde{\varphi}_h(x))\, dx$$

$$\Rightarrow \int_W F(x, u(x), P_0)\, dx \leq \liminf \int_W F\left(x, u + \varphi_h, P_0 + D\varphi\left(\frac{h(x-x_0)}{t}\right)\right) dx$$

$$\int_W F\left(x, u+\varphi_h, P_0 + D\varphi\left(\frac{h(x-x_0)}{t}\right)\right) dx \qquad \varphi_h(x) = \frac{t}{h}\,\varphi\left(\frac{h(x-x_0)}{t}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{h^n} \int_{W_i} F\left(x, u+\varphi_h, P_0 + D\varphi\left(\frac{h(x-x_0)}{t}\right)\right) dx =$$

W_i ← مکعب به ضلع $\frac{t}{h}$

$$= \overbrace{\sum_{i=1}^{h^n} \int_{W_i} F\left(x_i, u(x_i), P_0 + D\varphi\left(\frac{h(x-x_0)}{t}\right)\right) dx}^{=A_h}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{h^n} \left[\int_{W_i} F(x, u+\varphi_h, P_0 + D\varphi) - F(x_i, u(x_i), P_0 + D\varphi)\, dx\right]}_{B_h}$$

$$A_h = \sum_{i=1}^{h^n} \int_{W_i} F\left(x_i, u(x_i), P_0 + D\varphi\left(\frac{h(x-x_0)}{t}\right)\right) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{h^n} \left(\frac{t}{h}\right)^n \underbrace{\int_Q F(x_i, u(x_i), P_0 + D\varphi(x))\, dx}_{g(x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{h^n} g(x_i)\, |W_i| \xrightarrow{h \to \infty} \int_W g(y)\, dy$$

$$= \int_W \int_Q F(y, u(y), P_0 + D\varphi(x))\, dx\, dy$$

$$\Longrightarrow \fint_W F(x, u(x), P_0)\, dx \le \fint_W \int_Q F(y, u(y), P_0 + D\varphi(x))\, dx\, dy$$

$$|W| \to 0 \quad \Rightarrow \quad F(x_0, u(x_0), P_0) \le \int_Q F(x_0, u(x_0), P_0 + D\varphi(x))\, dx$$

$$= \int_\Omega F(x_0, u(x_0), P_0 + D\varphi(x))\, dx$$

$$+ \int_{Q \setminus \Omega} F(x_0, u(x_0), P_0)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega F(x_0, u(x_0), P_0)\, dx \le \int_\Omega F(x_0, u(x_0), P_0 + D\varphi(x))\, dx$$

$$B_h = \sum_{i=1}^{h^n} \int_{W_i} \left[F(x, u+\varphi_h, P_0 + D\varphi) - F(x_i, u(x_i), P_0 + D\varphi) \right] dx$$

می‌دانیم F پیوسته یکنواخت است پس وقتی h به اندازه کافی بزرگ باشد،

$$\left| F(x, u+\varphi_h, P_0 + D\varphi) - F(x_i, u(x_i), P_0 + D\varphi) \right| < \varepsilon$$

برای هر $1 \le i \le h^n$.

$$\Rightarrow |B_h| \le \sum_{i=1}^{h^n} \int_{W_i} \varepsilon \, dx = \sum_{i=1}^{h^n} \varepsilon \left(\frac{t}{h}\right)^n = \varepsilon t^n$$

روشهای تفکیکی در آنالیز

جلسه دهم ۹۵/۸/۹

شبه تحدب

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \qquad \int_\Omega F(x_0,u_0,P_0+D\varphi(x))\,dx \geq \int_\Omega F(x_0,u_0,P_0)\,dx$$

$$F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

محدب $\Leftarrow$ شبه محدب

$F(x_0,u_0,P_0+D\varphi) - F(x_0,u_0,P_0) \geq \langle \lambda_0, D\varphi \rangle$ برای حداقل یک $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{n\times N}$ برقرار است.

$$\Rightarrow \int_\Omega F(x_0,u_0,P_0+D\varphi(x)) - F(x_0,u_0,P_0)\,dx \geq \int_\Omega \langle \lambda_0, D\varphi(x)\rangle\,dx = 0$$

یک راه دیگر: نامساوی Jensen :

$$\fint_\Omega g(x)\,dx \geq g\left(\fint_\Omega dx\right)$$

$$\Rightarrow \fint_\Omega F(x_0,u_0,P_0+D\varphi(x))\,dx \geq F\left(x_0,u_0,\fint_\Omega P_0+D\varphi\right)$$

$$= F(x_0,u_0,P_0)$$

برعکس درست نیست. شبه محدب $\not\Leftarrow$ محدب

مثال- $F(P) = \det P$ در حالتی که $n=N$.

کوژ محدب: $\det(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda \det A + (1-\lambda)\det B$

می‌توان $\det A = \det B = 0$ و $I = \lambda A + (1-\lambda)B$. $\Leftarrow$ F محدب نیست.

F شبه محدب است:
$$\int_\Omega \det(\underbrace{P_0 + D\varphi(x)}_{D(P_0x+\varphi(x))})\,dx \underset{=}{\geq} \int_\Omega \det P_0\,dx$$

$$\int_\Omega \det D\psi\,dx_1\cdots dx_n = \int_\Omega d\psi_1\wedge\cdots\wedge d\psi_n = \int_{\partial\Omega} \psi_1\wedge d\psi_2\wedge\cdots\wedge d\psi_n$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad P_0x = \begin{bmatrix} P_1x \\ \vdots \\ P_nx \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \quad \psi_i = P_ix + \varphi_i$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \det D\psi = \int_{\partial\Omega} (P_1x + \varphi_1)\,d\psi_2\wedge\cdots\wedge d\psi_n$$

$$= \int_{\partial\Omega} P_1x\,d\psi_2\wedge\cdots\wedge d\psi_n = \int_\Omega d(P_1x)\wedge d\psi_2\wedge\cdots\wedge d\psi_n$$

$$= \int_\Omega d(P_1x)\wedge\cdots\wedge d(P_nx) = \int_\Omega \det P$$

فرض کنید $n\neq N$ و P ماتریس $n\times N$.

$$T:\mathbb{R}^{n\times N}\longrightarrow\mathbb{R}^{\tau(n,N)}$$

$$T(P)=(P,\operatorname{adj}_2 P,\operatorname{adj}_3 P,\dots,\operatorname{adj}_{n\wedge N} P)$$

$$\tau=\sum_{s=1}^{n\wedge N}\binom{n}{s}\binom{N}{s}$$

$\operatorname{adj}_s P$ همه زیرماتریس‌های $s\times s$ ، $2\le s\le n\wedge N=\min(n,N)$

اگر $g:\mathbb{R}^{\tau(n,N)}\xrightarrow{\text{محدب}}\mathbb{R}$ تابع

$$F(P)=g(T(P))$$

را polyconvex (چند محدب) گوییم.

<u>گزاره:</u> هر چندمحدب، شبه‌محدب است.

<u>اثبات:</u> $\fint_\Omega g(w(x))dx\ge g\left(\fint_\Omega w(x)dx\right)$ نابرابری Jensen

$$w(x)=T(P_0+D\varphi(x))\Longrightarrow\fint_\Omega F(P_0+D\varphi(x))dx\ge F(P_0)$$

محدب $\Leftarrow$ چندمحدب $\Leftarrow$ شبه محدب $\Leftarrow$ رتبه یک محدب

تعریف: $F(x,u,P)$ را تابع رتبه یک محدب (rank-one convex) گوییم هرگاه

$$g(\xi,\eta)=F(x_0,u_0,P_0+\xi\otimes\eta)$$

به طور جداگانه نسبت به $\xi\in\mathbb{R}^n$ و $\eta\in\mathbb{R}^N$ محدب باشد.

$$\xi\otimes\eta=[\xi_i\eta_j]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le N}}\in\mathbb{R}^{n\times N}$$

یا به طور معادل تابع $\varphi(t)=F(x_0,u_0,P_0+t\,\xi\otimes\eta)$ محدب باشد.

همین طور معادل است با اینکه $F(\lambda P+(1-\lambda)Q)\le\lambda F(P)+(1-\lambda)F(Q)$ برقرار است برای هر $\lambda\in[0,1]$ و $P,Q\in\mathbb{R}^{n\times N}$ که $\operatorname{rank}(P-Q)\le 1$.

تعریف اول $\Leftarrow$ تعریف آخر

$$P-Q=\xi\otimes\eta$$

$$F(\lambda P+(1-\lambda)Q)=F(Q+\lambda\,\xi\otimes\eta)$$

$$=F(Q+(\lambda\xi+(1-\lambda)0)\otimes\eta)$$

$$\le\lambda F(\underbrace{Q+\xi\otimes\eta}_{P})+(1-\lambda)F(\underbrace{\cancel{Q+0\otimes\eta}}_{Q})$$

برعکس:

$$F\big(\underbrace{P_0+(\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2)}_{\lambda P+(1-\lambda)Q}\otimes\eta\big)\leq \lambda F(\underbrace{P_0+\xi_1\otimes\eta}_{P})+(1-\lambda)F(\underbrace{P_0+\xi_2\otimes\eta}_{Q})$$

$$P-Q=(\xi_1-\xi_2)\otimes\eta$$

گزاره: هر تابع پیوسته شبه محدب، رتبه یک محدب است.

$$\forall\varphi\in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)\qquad \int_\Omega F(P_0)\,dx\leq\int_\Omega F(P_0+D\varphi(x))\,dx$$

اثبات: فرض کنید $F\in C^2$ باشد. داریم:

$$G(t):=\int_\Omega F(P_0+tD\varphi(x))\,dx$$

شرط شبه محدب نتیجه می‌دهد که

$$G(0)=\min_{t\in\mathbb{R}}G(t)$$

$$\Rightarrow\quad G'(0)=0\leq G''(0)$$

$$\int_\Omega \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ 1\le\alpha,\beta\le N}} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^\alpha \partial p_j^\beta}(P_0)\,\partial_i\varphi^\alpha\,\partial_j\varphi^\beta\,dx \ge 0$$

اگر $\varphi=\lambda+i\mu$ مقدار مختلط بگیرد. نامساوی بالا را برای λ و μ جداگانه بنویسیم و با هم جمع کنیم:

$$\operatorname{Re}\left[\int_\Omega \sum \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^\alpha \partial p_j^\beta}(P_0)\,\partial_i\varphi^\alpha\,\partial_j\overline{\varphi}^\beta\,dx\right] \ge 0$$

اکنون قرار دهید $\varphi(x)=\eta\, e^{i\tau\langle\xi.x\rangle}\gamma(x)$ که $\xi\in\mathbb{R}^n$ ، $\eta\in\mathbb{R}^N$ ، $\gamma\in C_0^1(\Omega;\mathbb{R})$

$$\int_\Omega \sum \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^\alpha \partial p_j^\beta}(P_0)\,\eta^\alpha\eta^\beta\left[\tau^2\xi_i\xi_j\gamma^2+D_i\gamma\,D_j\gamma\right]dx\ge 0$$

نامساوی را به τ^2 تقسیم کنید و اجازه دهید $\tau\to\infty$

در نتیجه

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N,\ \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \sum \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^\alpha \partial p_j^\beta}(P_0)\,\eta^\alpha \eta^\beta \xi_i \xi_j \geq 0$$

تابع $F(P_0+\xi\otimes\eta)$ نسبت به ξ و η جداگانه محدب است.

اگر F پیوسته باشد، $F_\varepsilon = F * \varphi_\varepsilon$ آنگاه F_ε نیز رتبه محدب است:

$$\fint_\Omega F_\varepsilon(P_0+D\psi)\,dx = \fint_\Omega \int_{\mathbb{R}^{n\times N}} F(P_0+D\psi-\omega)\,\varphi_\varepsilon(\omega)\,d\omega\,dx$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^{n\times N}} F(P_0-\omega)\,\varphi_\varepsilon(\omega)\,d\omega = F_\varepsilon(P_0)$$

بنابر قسمت اول اثبات F_ε رتبه یک محدب است.

$$F_\varepsilon(P_0+\xi\otimes\eta) \longrightarrow F(P_0+\xi\otimes\eta) \Longrightarrow$$

F رتبه یک محدب است.

rank-one Convex $\Leftarrow$ quasiConvex $\Leftarrow$ PolyConvex $\Leftarrow$ Convex

$\det P$

نکته: درحالتی که $N=1$ یا $n=1$ همه تعاریف بالا معادل هستند. (از تعریف واضح است)

مثال $n=N=2$

$$F(P) = |P|^2\left(|P|^2 - 2\gamma \det P\right)$$

1) Convex $\iff$ $|\gamma| \leq \frac{2}{3}\sqrt{2}$

2) polyConvex $\iff$ $|\gamma| \leq 1$

3) quasi-Convex $\iff$ $|\gamma| \leq 1+\varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$

4) rank-one Convex $\iff$ $|\gamma| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

مثال rank-one $\not\Rightarrow$ quasi $N=3$, $n=2$

$$w(x) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \sin 2\pi x_1 \\ \sin 2\pi x_2 \\ \sin 2\pi (x_1+x_2) \end{pmatrix} \qquad \Omega = [0,1]^2$$

$$Dw = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi x_2 \\ \cos 2\pi(x_1+x_2) & \cos 2\pi(x_1+x_2) \end{pmatrix} \in L = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} : r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} = -rst$$

f روی L رتبه-یک محدب است ولی

$$\int_{[0,1]^2} f(Dw)\, dx < f(0) = 0$$

$$\|$$

$$\int_{[0,1]^2} -\cos 2\pi x_1 \cos 2\pi x_2 \cos 2\pi(x_1+x_2)\, dx_1 dx_2 = -\int (\cos(2\pi x_1))^2 (\cos(2\pi x_2))^2 dx_1 dx_2$$

لازم است که f را به کل $\mathbb{R}^{2\times 3}$ به صورت یک تابع رتبه-یک محدب توسعه دهیم

بخش 5.3 کتاب Dacorogna.

نکته: اگر F نسبت به P ربعی باشد شرط رتبه-یک محدب با شبه‌محدب معادل است.

$$F(x,u,P) = \sum A^{ij}_{\alpha\beta}(x,u)\, P_i^{\alpha} P_j^{\beta}$$

شرط شبه‌محدب:

$$\int_\Omega F(P_0 + D\varphi(x))\,dx \geq \int_\Omega F(P_0)\,dx$$

$$= \int_\Omega \sum A^{ij}_{\alpha\beta} \left(P_i^{\alpha} + D_i\varphi^{\alpha}(x)\right)\left(P_j^{\beta} + D_j\varphi^{\beta}(x)\right) dx$$

$$= \int_\Omega \sum A^{ij}_{\alpha\beta} \left(P_i^{\alpha} P_j^{\beta} + D_i\varphi^{\alpha}(x)\, D_j\varphi^{\beta}(x)\right) dx$$

$$= \int_\Omega F(P_0) + F(D\varphi(x))\,dx$$

شرط شبه محدب $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\int_\Omega \sum A_{\alpha\beta}^{ij} D_i\varphi^\alpha D_j\varphi^\beta \geq 0$ برای هر $\varphi \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$

رتبه یک محدب $\Longleftrightarrow$ $\sum A_{\alpha\beta}^{ij} \xi_i \xi_j \eta^\alpha \eta^\beta \geq 0$ برای هر $\eta \in \mathbb{R}^N,\ \xi \in \mathbb{R}^n$

<u>گزاره</u> فرض کنید A یک ماتریس ثابت باشد که برای هر $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^N$ داریم:

$$\sum A_{\alpha\beta}^{ij} \xi_i \xi_j \eta^\alpha \eta^\beta \geq c|\xi|^2|\eta|^2$$

برای تعدادی ثابت $c \geq 0$. در این صورت برای هر $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ داریم:

$$\int_\Omega \sum A_{\alpha\beta}^{ij} D_i\varphi^\alpha D_j\varphi^\beta\, dx \geq c\int_\Omega |D\varphi|^2 dx$$

$$\int_{\Omega} \sum A_{\alpha\beta}^{ij} D_i\varphi^\alpha D_j\varphi^\beta \, dx \qquad \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(\xi)\overline{g(\xi)}$$

$$= \sum A_{\alpha\beta}^{ij} \int_{\mathbb{R}^n} D_i\varphi^\alpha(x)\, D_j\varphi^\beta(x)\,dx = \sum A_{\alpha\beta}^{ij} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_i \xi_j\, \hat{\varphi}^\alpha(\xi)\, \overline{\hat{\varphi}^\beta(\xi)}\, d\xi$$

$$\geq c \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \, |\hat{\varphi}|^2 \, d\xi$$

$$= c \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi(x)|^2 \, dx$$

$$= c \int_{\Omega} |D\varphi(x)|^2 \, dx$$

روشهای تفکیکی در آنالیز

جلسه یازدهم ۹۵/۸/۱۱

قضیه: $F:\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ شبه محدب و برای $1\le p<\infty$

$$0\le F(\xi)\le c\,(1+|\xi|^p)$$

در این صورت عملگر

$$\mathcal{F}(u)=\int_\Omega F(Du)\,dx$$

در $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ به طور ضعیف نیم پیوسته پایینی است.

نکته: شرط شبه بودن F را می‌توان با $-c\,(1+|\xi|^q)\le F(\xi)\le c\,(1+|\xi|^p)$ جایگزین کرد که $1\le q<p$. در حالت $p=1$ می‌توان $q=1$ قرار داد.

نکته: اگر $p=\infty$ عملگر بالا در $W^{1,\infty}$ به طور ضعیف* نیم پیوسته پایینی است هرگاه

$$|F(\xi)|\le \eta\,(|\xi|)$$

که $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و صعودی است.

مثال -

$$F(\xi) = \det \xi \quad , \quad n = N = 2$$

$$|F(\xi)| \leq c\,(1 + |\xi|^2)$$

$$u_n(x,y) = \frac{1}{\sqrt{n}}(1-y)^n(\sin nx, \cos nx)$$

$$\Omega = (0,a)\times(0,a)$$

$$u_n \longrightarrow 0 \quad \text{in} \quad W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^2)$$

$$Du_n = \begin{pmatrix} \sqrt{n}\,(1-y)^n \cos nx & -\sqrt{n}\,(1-y)^{n-1} \sin nx \\ -\sqrt{n}\,(1-y)^n \sin nx & -\sqrt{n}\,(1-y)^{n-1} \cos nx \end{pmatrix}$$

$$\|Du_n\|_{L^2}^2 = \int_\Omega n\left[(1-y)^{2n} + (1-y)^{2n-2}\right] dx\,dy < 2a$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \det(Du_n) \geq \int_\Omega \det(0) = 0$$ شرط نیم پیوستگی پایینی

$$\int_\Omega \det(Du_n) = -n \int_\Omega (1-y)^{2n-1} \cos 2nx \, dx\,dy$$

$$= -an\left[\frac{1}{2n} - \frac{(1-a)^{2n}}{2n}\right] \longrightarrow -a/2 \Rightarrow$$ خلاف شرط نیم پیوستگی

لم: تحت شرایط قضیه اگر $u_h \longrightarrow 0$ در $W^{1,p}$ آنگاه

$$\liminf_{h\to\infty} \int_\Omega F(\xi + Du_h)\,dx \geq \int_\Omega F(\xi)\,dx$$

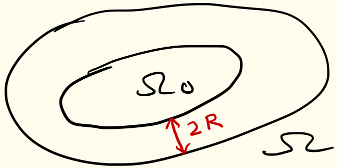
برای هر $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$.

اثبات: با توجه به رشد چندجمله‌ای F که در صورت قضیه آمده است عملگر F در $W^{1,p}$ با توپولوژی قوی پیوسته است.

در نتیجه شرط شبه‌محدب

$$\int_\Omega F(\xi + Du)\,dx \geq \int_\Omega F(\xi)\,dx$$

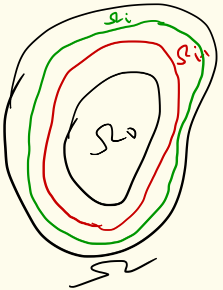
نه تنها برای هر $u \in C_0^\infty(\Omega)$ برقرار است بلکه برای هر $u \in W_0^{1,p}$ نیز درست است. در نتیجه اگر توابع u_h در صورت لم عضو $W_0^{1,p}$ باشند نتیجه بدیهی است. در حالت کلی $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ دلخواه در نظر بگیرید



$$R = \frac{1}{2}\,dist(\Omega_0, \partial\Omega)$$

L یک عدد صحیح دلخواه و برای $0 \le i \le L$.

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega_0) < \tfrac{i}{L} R\}$$



$$\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i), \quad 0 \le \psi_i \le 1, \quad \psi_i\big|_{\Omega_{i-1}} \equiv 1$$

$$|D\psi_i| \le \frac{2L}{R}$$

$$v_{i,h} = u_h \cdot \psi_i \in W_0^{1,p}$$

طبق شبه تحدب $\Rightarrow$

$$\int_\Omega F(\xi + Dv_{i,h})\,dx \ge \int_\Omega F(\xi)\,dx$$

$$= \int_{\Omega - \Omega_i} F(\xi)\,dx + \int_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} F(\xi + Dv_{i,h})\,dx + \int_{\Omega_{i-1}} F(\xi + Du_h)\,dx$$

$$\le \int_{\Omega - \Omega_0} F(\xi)\,dx + \int_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} \cdots + \int_\Omega F(\xi + Du_h)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_0} F(\xi)\,dx \le \int_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} F(\xi + D v_{i,h})\,dx + \int_{\Omega} F(\xi + D u_h)\,dx \qquad 1 \le i \le L$$

$$|D v_{i,h}| = |D(u_h \cdot \psi_i)| = |D u_h \cdot \psi_i + u_h D\psi_i|$$

$$\int_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} F(\xi + D v_{i,h})\,dx \le c \int_{\Omega_i \setminus \Omega_{i-1}} 1 + |\xi|^p + |D u_h|^p + \left(\frac{2L}{R}\right)^p \cdot |u_h|^p \, dx$$

رابطه بالا را برای $1 \le i \le L$ با هم جمع بزنیم :

$$\int_{\Omega_0} F(\xi)\,dx \le \frac{c}{L} \int_{\Omega_L - \Omega_0} \left(1 + |\xi|^p + |D u_h|^p + \left(\frac{2L}{R}\right)^p \cdot |u_h|^p\right) dx + \int_{\Omega} F(\xi + D u_h)\,dx$$

بنابراین وقتی $h \to \infty$ داریم :

$$\begin{cases} u_h \xrightarrow{L^p} 0 \\ \|D u_h\|_{L^p} \text{ کران دار است} \end{cases} \Leftarrow u_h \xrightarrow{W^{1,p}} 0$$

$$\int_{\Omega_0} F(\xi)\,dx \le \frac{C}{L} + \liminf_{h\to\infty} \int_{\Omega} F(\xi + Du_h)$$

اکنون $L \to \infty$ و سپس با توجه به اینکه $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ دلخواه بود می‌توان لم را نتیجه گرفت.

<u>لم</u>: اگر $F(\xi)$ رتبه-یک محدب باشد و $|F(\xi)| \le c(\lambda + |\xi|)^p$ برای $\lambda \ge 0$ و $1 \le p$.

آنگاه

$$|F(\xi) - F(\eta)| \le c(\lambda + |\xi| + |\eta|)^{p-1} |\xi - \eta|$$

اثبات قضیه: $u_h \longrightarrow u$ in $W^{1,p}$ باید نشان دهیم

$$\liminf \int_\Omega F(Du_h)\,dx \geq \int_\Omega F(Du)\,dx$$

لم اول $\Leftarrow$ اگر $u(x) = \xi \cdot x$ باشد قضیه درست است.

Ω را با اجتماع مکعب‌های Q_i به ضلع به اندازه کافی کوچک تقریب بزنید به طوری که $|\Omega - \cup Q_i| \leq \varepsilon$

$$\xi_i = \fint_{Q_i} Du\,dx \qquad \sum \int_{Q_i} |Du - \xi_i|^p\,dx < \varepsilon^p$$

$$v_h^{(i)}(x) = u_h(x) - u(x) + \langle \xi_i, x \rangle \quad \text{in } Q_i$$

$$v_h^{(i)} \longrightarrow \langle \xi_i, x \rangle \quad \text{in } W^{1,p}(Q_i)$$

$$\liminf_{h\to\infty} \int_{Q_i} F(Dv_h^{(i)})\,dx \geq \int_{Q_i} F(\xi_i)\,dx$$

$$\left| \int_{\Omega} F(Du_h)\,dx - \sum_i \int_{Q_i} F(Dv_h^{(i)})\,dx \right| \leq$$

$$\leq c \sum_i \int_{Q_i} \left| F(Du_h) - F(Dv_h^{(i)}) \right| dx + \int_{\Omega - \cup Q_i} |F(Du_h)|\,dx$$

$$\leq C\varepsilon + c \sum_i \int_{Q_i} (1 + |Du_h| + |Dv_h^{(i)}|)^{p-1} \cdot \big|\underbrace{Du_h - Dv_h^{(i)}}_{= Du - \xi_i}\big|\,dx$$

نامساوی هولدر $\rightarrow$

$$\leq C\varepsilon + C \sum_i \left[\int_{Q_i} (1 + |Du_h| + |Dv_h^{(i)}|)^{(p-1)q} dx \right]^{1/q} \left[\int_{Q_i} |Du - \xi_i|^p dx \right]^{1/p} \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

$$\leq C\varepsilon + C \sum_i \left[\int_{Q_i} (1 + |Du_h|^p + |Dv_h^{(i)}|^p)\,dx \right]^{1/q} \cdot \left[\dots \right]^{1/p}$$

$$\leq C\varepsilon$$

$$\liminf \int_{\Omega} F(Du_h) - F(Du)\,dx \geq -C\varepsilon + \liminf \sum_i \int_{Q_i} F(Dv_h^{(i)}) - F(Du)\,dx$$

$$\geq -C\varepsilon + \sum_i \int_{Q_i} F(\xi_i) - F(Du)\,dx$$

لم ۲ $\longrightarrow$

$$\geq -C\varepsilon - \sum_i C \int_{Q_i} \left(1+|\xi_i|+|Du|\right)^{p-1} \cdot |\xi_i - Du|\,dx$$

$$\geq -C\varepsilon$$

قضیه در حالت کلی: وقتی F به (x,u,Du) وابسته است

با شرط شبه‌تحدب نیم‌پیوستگی را اثبات کنیم.

پوشش شبه محدب: $F:\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ ، $QF:\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ را پوشش شبه محدب F گوییم که

$$QF(\xi)=\sup\left\{H(\xi):\ H\le F,\ \text{H شبه محدب است}\right\}$$

$$QF(\xi,\Omega):=\inf\left\{\fint_{\Omega}F(\xi+D\varphi(x))\,dx\ :\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}$$

ادعا: $QF(\xi)=QF(\xi,\Omega)$.

ابتدا نشان می‌دهیم تعریف دوم مستقل از Ω است.

$$\Omega_1=x_0+\lambda\Omega$$

$\varphi_1\in C_0^\infty(\Omega_1)$ که $\varphi(x)=\lambda^{-1}\varphi_1(x_0+\lambda x)\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\fint_{\Omega}F(\xi+D\varphi)\,dx=\fint_{\Omega_1}F(\xi+D\varphi_1)\,dx$$

$$\Rightarrow\ QF(\xi,\Omega_1)=QF(\xi,\Omega)$$

لم: اگر A و Ω دو مجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ باشند که $|\partial\Omega|=0$. برای هر $\varepsilon>0$، تعداد متناهی باز جدا از هم

$A \supseteq \Omega_i$ وجود دارند که Ω_i ها انتقال آفین Ω است و $\left|A - \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i\right| < \varepsilon$

گزاره: اگر A و Ω دو مجموعه باز دلخواه باشند، آنگاه

$$QF(\xi,\Omega) = QF(\xi, A)$$

اثبات: فرض کنید $|\partial\Omega|=0$ و Ω_i ها را بنابر لم قبل انتخاب کنید. $A \supseteq U = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$

بنابر تعریف QF تابع $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ وجود دارد که

$$QF(\xi,\Omega) \geq \fint_\Omega F(\xi + D\varphi(x))\,dx - \varepsilon$$

متناظر با Ω_i تابع $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ وجود دارد که

$$\fint_\Omega F(\xi + D\varphi(x))\,dx = \fint_{\Omega_i} F(\xi + D\varphi_i)\,dx$$

$$\psi = \sum \varphi_i \in C_0^\infty(U) \subseteq C_0^\infty(A)$$

$$\fint_U F(\xi+D\varphi)\,dx = \frac{1}{|U|}\sum_i \int_{\Omega_i} F(\xi+D\varphi_i)\,dx$$

$$= \sum_i \frac{|\Omega_i|}{|U|} \fint_{\Omega} F(\xi, D\varphi)\,dx$$

$$\leq QF(\xi,\Omega)+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad QF(\xi,U) \leq QF(\xi,\Omega)+\varepsilon$$

$$U \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad QF(\xi,A) \leq QF(\xi,U) \leq QF(\xi,\Omega)+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad QF(\xi,A) \leq QF(\xi,\Omega) \qquad (*)$$

اگر $|\partial A|=0$ با جابجایی نقش Ω و A نامساوی برعکس درست و گزاره اثبات می‌شود.

اگر $|\partial A|>0$ $\Leftarrow$ $A \subseteq A'$ می‌توان گرفت که $|\partial A'|=0$ در این صورت نامساوی برعکس

(*) برای A' درست است یعنی

$$QF(\xi,\Omega) \le QF(\xi,A') \le QF(\xi,A)$$

تنها حالت باقیمانده $|\partial\Omega|>0$ و $|\partial A|>0$.

$\Omega' \supseteq \Omega$ درنظر بگیرید به طوری‌که $|\partial\Omega'|=0$ $\Leftarrow$ نامساوی (*) برای Ω' برقرار است:

$$QF(\xi,A) = QF(\xi,\Omega') \le QF(\xi,\Omega)$$

همینطور برای $\Omega'' \subseteq \Omega$ و $|\partial\Omega''|=0$ داریم:

$$QF(\xi,A) = QF(\xi,\Omega'') \ge QF(\xi,\Omega).$$

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه دوازده - ۹۵/۸/۱۶

پوشش شبه محدب

$$F : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$QF(\xi) = \sup\{ H(\xi) \ : \ H \leq F \ ,\ \text{H شبه محدب است} \}$$

$$Q'F(\xi) = QF(\xi, \Omega) = \inf\left\{ \fint_{\Omega} F(\xi + D\varphi(x))\,dx \ : \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^N) \right\}$$

<u>قضیه</u>: $QF = Q'F$. (تحت شرایطی برای F)

اثبات: <u>ادعا</u>: $Q'F$ شبه محدب است.

در تعریف QF قرار دهید $\varphi \equiv 0$ و نتیجه بگیرید که $Q'F(\xi) \leq F(\xi)$ چون $Q'F$ شبه محدب است پس

$$Q'F(\xi) \leq QF(\xi)$$

از طرف دیگر فرض کنید H یک تابع شبه محدب دلخواه باشد که $H \leq F$.

$$\Rightarrow \fint_{\Omega} F(\xi + D\varphi(x))\,dx \geq \fint_{\Omega} H(\xi + D\varphi(x))\,dx \geq H(\xi)$$

$$\Rightarrow Q'F(\xi) \geq H(\xi)$$

$$\Rightarrow Q'F(\xi) \geq QF(\xi).$$

لم: فرض کنید

$$\begin{cases} \nu|\xi|^p \le F(\xi) \le c(1+|\xi|^p) \\ |F(\xi)-F(\eta)| \le (1+|\xi|^p+|\eta|^p)\,\omega(|\xi-\eta|) \end{cases}$$

که ω یک تابع پیوسته است و $\omega(0)=0$.

در این صورت $Q'F$ تابع پیوسته است.

اثبات:

$$Q'F(\xi) = \inf\left\{ \fint_\Omega F(\xi+D\varphi)\,dx \;:\; \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\right\}$$

$$Q'F(\eta) = \inf\left\{ \fint_\Omega F(\eta+D\varphi)\,dx \;:\; \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\right\}$$

$$\fint_\Omega |F(\xi+D\varphi)-F(\eta+D\varphi)|\,dx \le c\fint_\Omega \omega(|\xi-\eta|)\,(1+|\xi|^p+|\eta|^p+|D\varphi|^p)\,dx$$

این منجر به پیوستگی $Q'F$ می‌شود به شرط آنکه اینفیمم در مجموعه‌های فوق روی φ هایی گرفته شود که $\|D\varphi\|_{L^p}$ کران‌دار باشد.

که این کران تنها به ξ و η و F وابسته است.

$$\nu\int |D\varphi|^p-|\xi|^p \le \fint_\Omega \nu|\xi+D\varphi|^p \le \fint_\Omega F(\xi+D\varphi) \le Q'F(\xi)+\varepsilon$$

قضیه: تحت شرایط لم قبل ، $Q'F$ شبه محدب است.

اثبات: فرض کنید Ω یک مکعب در $\mathbb{R}^n$ باشد و ψ یک تابع قطعه قطعه آفین با تکیه‌گاه فشرده در Ω

$$D\psi = \omega_i \quad \text{in } A_i \subseteq \Omega \qquad 1 \le i \le K$$

$$\int_\Omega Q'F(\xi + D\psi)\,dx = \sum_{i=1}^{K} Q'F(\xi + \omega_i)\,|A_i| \qquad (*)$$

تعریف Q' مستقل از دامنه است. $\Rightarrow$

$$\exists \varphi_i \in C_0^\infty(A_i), \quad \fint_{A_i} F(\xi + \omega_i + D\varphi_i) \le Q'F(\xi + \omega_i) + \varepsilon$$

$$\eta = \psi + \sum_{i=1}^{K} \varphi_i$$

$$Q'F(\xi) \le \fint_\Omega F(\xi + D\eta)\,dx =$$

$$= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i=1}^{K} \int_{A_i} F(\xi + \omega_i + D\varphi_i)$$

$$\le \sum_{i=1}^{K} \frac{|A_i|}{|\Omega|} \left(Q'F(\xi + \omega_i) + \varepsilon\right) \overset{(*)}{=} \varepsilon + \fint_\Omega Q'F(\xi + D\psi)\,dx$$

تا اینجای کار $Q'F$ شبه محدب است نسبت به توابع قطعه قطعه آفین

$$Q'F(\xi) \le \fint_{\Omega} Q'F(\xi + D\psi)\, dx$$

چون $Q'F$ پیوسته است و توابع قطعه قطعه آفین ψ در $W_0^{1,p}$ چگال هستند نتیجه می‌شود که رابطه بالا برای $\psi \in W_0^{1,p}$ درست است.

اگر Ω ناحیه باز دلخواه باشد مکعب $\Omega \subseteq D$ را در نظر بگیرید اکنون اگر $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ در نتیجه

$$Q'F(\xi) \le \fint_{D} Q'F(\xi + D\psi)\, dx$$

$$= \frac{1}{|D|}\left[\int_{\Omega} Q'F(\xi + D\psi)\, dx + (|D| - |\Omega|)\, Q'F(\xi)\right]$$

$$\Rightarrow |\Omega|\, Q'F(\xi) \le \int_{\Omega} Q'F(\xi + D\psi)\, dx$$

قضیه: $F(x,u,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ کاراتئودوری باشد و

$$-a\left(|\xi|^r + |u|^t\right) - h(x) \leq F(x,u,\xi) \leq g(x,u)\left(1+|\xi|^p\right)$$

که $1<p$ ، $1\leq r<p$ ، $1\leq t<p^*=\frac{np}{n-p}$. (حالت $p>n$ ، $t\geq 1$ دلخواه است.)

$h\in L^1(\Omega)$ و $0\leq g(x,u)$ کاراتئودوری است.

تحت این شرایط اگر F شبه محدب باشد آنگاه

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x,u,Du)\,dx$$

به طور ضعیف در $W^{1,p}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ نیم پیوسته پایینی است.

اثبات: گام اول: فرض کنید کران پایین F، $\nu|\xi|^p$ باشد.

$$\theta_i(t)=\begin{cases} 1 & t\le i-1 \\ 0 & t\ge i \end{cases} \quad \text{پیوسته}$$

$$\eta_i(x,u)=\begin{cases} \theta_i(|u|) & \text{if } g(x,u)\le i \\ \dfrac{i\,\theta_i(|u|)}{g(x,u)} & \text{if } g(x,u)>i \end{cases}$$

$$F_i(x,u,\xi)=\eta_i(x,u)\,F(x,u,\xi)+(1-\eta_i(x,u))\,\nu|\xi|^p$$

F_i شبه محدب، از طرفی F_i یک دنباله صعودی است که به F همگرا است.

$$F=\sup F_i$$

اگر نیم‌پیوستگی F_i را ثابت کنیم، نیم‌پیوستگی F نتیجه می‌شود. از طرفی داریم:

$$\nu|\xi|^p\le F_i\le \eta_i\,g\,(1+|\xi|^p)+(1-\eta_i)\,\nu|\xi|^p$$

$$\le (i+\nu)(1+|\xi|^p)$$

در این رابطه کافی است قضیه را با شرط

$$(*)\begin{cases} \nu|\xi|^p \le F(x,u,\xi) \le A(1+|\xi|^p) \\ F \equiv \nu|\xi|^p \quad \text{for} \quad |u| \ge \mu \end{cases}$$

اثبات کنیم.

همین کار را به صورت برای ξ انجام دهیم:

$$G_i(x,u,\xi) = \theta_i(|\xi|)F(x,u,\xi) + (1-\theta_i(|\xi|))\nu|\xi|^p$$

G_i در $(*)$ صدق می‌کند. به علاوه اگر $|\xi|>i$ داریم $G_i \equiv \nu|\xi|^p$.

G_i به طور صعودی به F همگرا است.

مشکل چیه! توابع G_i شبه محدب نیستند. وارد هید $g_i = QG_i$ پوشش شبه محدب G_i.

$$(*)\begin{cases} \nu|\xi|^p \le g_i(x,u,\xi) \le A(1+|\xi|^p) \\ g_i \equiv \nu|\xi|^p \quad \text{for} \quad |u| \ge \mu \quad \text{or} \quad |\xi| \ge i \end{cases}$$

به علاوه g_i کاراتئودوری است.

$$g_i \le G_i \le A(1+|\xi|^p)$$

از طرف دیگر $\nu|\xi|^p \le G_i$ و تابع $\nu|\xi|^p$ شبه محدب است بنابراین $\nu|\xi|^p \le g_i$.

$$\nu|\xi|^p \le g_i \le G_i \qquad \text{در نتیجه}$$

و $g_i = \nu|\xi|^p$ وقتی $|u| \ge M$ و $|\xi| \ge i$. یعنی شرط (*) برقرار است.

$$g_i(x,u,\xi) = QG_i = \inf\left\{ \fint_\Omega G_i(x,u,\xi + D\varphi)\,dx \;:\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

G_i برای تقریباً هر x نسبت به (u,ξ) پیوسته است در نتیجه در ناحیه $|u| \le M$ و $|\xi| \le i$ بطور یکنواخت پیوسته است.

به کمک لمی که پیوستگی پوشش شبه محدب را نشان می‌داد نتیجه می‌شود برای این x،

g_i نسبت به (u,ξ) پیوسته است. یعنی g_i کاراتئودوری است.

لم: $\lim_{i\to\infty} g_i(x,u,\xi) = F(x,u,\xi)$

اثبات: $g_i(x,u,\xi) > \fint_\Omega G_i(x,u,\xi+Dw_i(y))\,dy - \frac{1}{i}$ $\quad \exists\, w_i \in C_0^\infty(\Omega)$ s.th.

$$\Omega_i = \{y : |\xi + Dw_i(y)| > i-1\}$$

در $\Omega\setminus\Omega_i$ داریم $G_i \equiv F$.

$$g_i + \frac{1}{i} > \fint_\Omega G_i = \frac{1}{|\Omega|}\left[\int_{\Omega\setminus\Omega_i} F + \int_{\Omega_i} G_i\right]$$

$$= \fint_\Omega F(x,u,\xi+Dw_i(y))\,dy + \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega_i} (G_i - F)\,dy$$

$$\geq F(x,u,\xi) + \underbrace{\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega_i} (G_i - F)\,dy}_{\text{ادعا: } \liminf\, \geq 0}$$

$$\Rightarrow \quad \liminf g_i \geq F$$

از طرفی $g_i \le G_i \le F$ و داریم $\limsup g_i \le F$. در نتیجه $\lim g_i = F$.

تنها کافی است نشان دهیم

$$0 = \lim_{i\to\infty} \int_{\Omega_i} F(x,u,\xi+Dw_i(y))\,dy$$

در واقع نشان می‌دهیم

$$0 = \lim_{i\to\infty} \int_{\Omega_i} \left(1+|\xi+Dv_i(y)|^p\right) dy$$

که

$$g_i+\frac{1}{i}+\varepsilon_i > \fint_{\Omega} G_i(x,u,\xi+Dv_i(y))\,dy$$

برای این منظور باید نشان دهیم $|\Omega_i| \to 0$ و $\int_{\Omega_i} |Dv_i(y)|^p \to 0$.

$$\nu \int_{\Omega} |\xi+Dv_i|^p dy \le \int_{\Omega} G(x,u,\xi+Dv_i(y))\,dy \le g_i+\frac{1}{i}+\varepsilon_i$$

$$|\Omega_i|\,\nu(i-1)^p \le \nu\int_{\Omega_i} |\xi+Dv_i|^p \le g_i+1 \le F+1 \Rightarrow |\Omega_i| \to 0$$

لم: $1<p<\infty$ و Ω بازکران‌دار با مرز لیپ‌شیتز

$$u_n \rightharpoonup u \quad in \ W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$$

آنگاه دنباله $v_n \in W^{1,p}$ وجود دارد و زیردنباله‌ای از $\{u_n\}$ که

$$v_n \rightharpoonup u \quad in \ W^{1,p}$$

و $\lim_{n\to\infty} |\tilde{\Omega}_n| = 0$ و $\{|\nabla v_n|^p\}$ هم‌انتگرال‌پذیر باشند.

$$\tilde{\Omega}_n = \{x : u_n(x) \neq v_n(x)\} \cup \{x : \nabla u_n(x) \neq \nabla v_n(x)\}$$

$$\left(\forall \varepsilon \ \exists \delta \ \text{sth} \ |U|<\delta \Rightarrow \forall n: \int_U |\nabla v_n|^p \, dx < \varepsilon\right)$$ هم‌انتگرال‌پذیر

برگردیم به ادامه اثبات: $\{Dw_i\}$ در $L^p(\Omega)$ کران دار است (بنابر نامساوی آخر صفحه)

پس فرض می‌کنیم $w_i \rightharpoonup w$. بنابر لم قبل، w_i را با v_i جایگزین کنید.

خاصیت هم انتگرال پذیری v_i اثبات را تمام می‌کند.

$$\fint_{\Omega} G(x,u,\xi+Dw_i(y))\,dy < g_i + 1/i$$

$$\int_{\Omega} G(x,u,\xi+Dv_i(y))\,dy = \int_{\tilde\Omega_i} G(x,u,\xi+Dv_i)\,dy + \int_{\Omega\setminus\tilde\Omega_i} G(x,u,\xi+Dw_i(y))\,dy$$

$$\le \int_{\Omega} G(x,u,\xi+Dw_i(y))\,dy + \underbrace{\int_{\tilde\Omega_i} G(\xi+Dv_i)\,dy}_{\varepsilon_i|\Omega|}$$

$$\varepsilon_i|\Omega| \le A\int_{\tilde\Omega_i}(1+|\xi|^p+|Dv_i|^p)\,dy \longrightarrow 0$$

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه سیزده - ۹۵/۸/۱۸

قضیه: $F(x,u,\xi): \Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ کاراتئودوری باشد و

$$-a(|\xi|^r+|u|^t)-h(x)\le F(x,u,\xi)\le g(x,u)(1+|\xi|^p)$$

که $1<p$ ، $1\le r<p$ ، $1\le t<p^*=\frac{np}{n-p}$. (حالت $p>n$ ، $t\ge 1$ دلخواه است.)

$h\in L^1(\Omega)$ و $0\le g(x,u)$ کاراتئودوری است.

تحت این شرایط اگر F شبه محدب باشد آنگاه

$$\mathcal{F}(u)=\int_\Omega F(x,u,Du)\,dx$$

به طور ضعیف در $W^{1,p}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ نیم پیوسته پایین است.

تا اینجا کار دیدیم که کافی است برای حالت

$$\nu|\xi|^p \le F(x,u,\xi) \le A(1+|\xi|^p)$$

F نسبت به (u,ξ) پیوسته یکنواخت $\Leftarrow$ $F(x,u,\xi) = \nu|\xi|^p \quad \text{for} \quad |u|\ge M \text{ or } |\xi|\ge M$

اثبات شود.

لم: Σ مجموعه اندازه‌پذیر باشد که $|\Sigma|<+\infty$ و $S\subseteq \mathbb{R}^s$. $h(x,y)$ یک تابع تعریف شده روی $\Sigma\times S$ باشد که برای هر $y\in S$ نسبت به x اندازه‌پذیر است و برای تقریباً هر $x\in\Sigma$ نسبت به y پیوسته یکنواخت دارای صورت برای هر $\varepsilon>0$، مجموعه فشرده $K\subseteq\Sigma$ وجود دارد که $|\Sigma-K|\le\varepsilon$ و تحدید h به $K\times S$ پیوسته است.

نتیجه لم: $K\subseteq\Omega$ فشرده وجود دارد که $|\Omega-K|<\varepsilon$ و F روی $K\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{N\times n}$ پیوسته است.

لم: تابع پیوسته $\omega(t)$ با شرط $\omega(0)=0$ وجود دارد که

$$|F(x,u,\xi) - F(y,v,\xi)| \le \omega(|x-y| + |u-v|)$$

برای هر $x,y \in K$ و $u,v \in \mathbb{R}^N$ و $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$.

اثبات قضیه: فعلاً با فرض $\nu|\xi|^p \le F$ قضیه را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $u_\nu \longrightarrow u$ در $W^{1,p}(\Omega)$

Q_i مکعب‌های جدا از هم که $|\Omega - \bigcup_i Q_i| = 0$ و $\bar{x}_i$ مرکز Q_i و

$$\bar{u}_i = \fint_{Q_i} u$$

$\bar{X}$ و $\bar{U}$ توابع قطعه ثابت که روی Q_i مقدار ثابت $\bar{x}_i$ و $\bar{u}_i$ را به ترتیب اختیار می‌کنند.

اگر با افراز $R = \bigcup Q_i$ شروع کنیم و R_h را از تقسیم هر مکعب R_{h-1} به 2^n مکعب مساوی می‌سازیم و متناظر آن $\bar{X}_h$ و $\bar{U}_h$ را تعریف کنید.

$$\bar{X}_h(x) \longrightarrow x, \quad \bar{U}_h \longrightarrow u \quad a.e.$$

افراز R_h را به گونه‌ای انتخاب کنید که

$$\int_{\Omega} \omega\left(|x-\bar{x}_h| + |u-\bar{U}_h|\right)dx < \varepsilon$$

$$\int_{\Omega} F(x,u_\nu,Du_\nu)\,dx = \int_{\Omega-K} F(x,u_\nu,Du_\nu) - F(\bar{x}_h,\bar{U}_h,Du_\nu)\,dx$$

$$+\int_{K} F(x,u_\nu,Du_\nu) - F(x,u,Du_\nu)\,dx$$

$$+\int_{K} F(x,u,Du_\nu) - F(\bar{x}_h,\bar{U}_h,Du_\nu)\,dx$$

$$+\int_{\Omega} F(\bar{x}_h,\bar{U}_h,Du_\nu)\,dx$$

$u_\nu \xrightarrow{W^{1,p}} u$ درنتیجه این دنباله در $W^{1,p}$ کران دار است.

$$|F(x,u,\xi)| \le A(1+|\xi|^p)$$

$$\geq -c|\Omega - K| - \int_K \omega(|u_\nu - u|)\,dx -$$

$$- \int_K \omega\left(|x - \bar{x}_h| + |u - \bar{U}_h|\right) dx$$

$$+ \int_\Omega F(\bar{x}_h, \bar{U}_h, Du_\nu)\,dx$$

داریم $0 \leftarrow \int_K \omega(|u_\nu - u|)\,dx \quad , \quad u_\nu \xrightarrow{L^p} u \;\Leftarrow\; u_\nu \xrightarrow{W^{1,p}} u$

$$\liminf \int_\Omega F(x, u_\nu, Du_\nu)\,dx \geq -C\varepsilon + \liminf_{\nu \to \infty} \int_\Omega F(\bar{x}_h, \bar{U}_h, Du_\nu)\,dx$$

$$\liminf_{\nu\to\infty}\int_\Omega F(\bar{x}_h,\bar{u}_h,Du_\nu)\,dx=\sum_i \liminf\int_{Q_i} F(\bar{x}_i,\bar{u},Du_\nu)\,dx$$

$$\geq \sum_i \int_{Q_i} F(\bar{x}_i,\bar{u},Du)\,dx$$

$$=\int_\Omega F(\bar{x}_h,\bar{u}_h,Du)\,dx$$

$$\liminf\int_\Omega F(x,u_\nu,Du_\nu)\,dx \geq -c\varepsilon+\int_\Omega F(\bar{x}_h,\bar{u}_h,Du)\,dx$$

اکنون $h\to\infty$ و بنابر قضیهٔ تسلطی لبگ سمت راست را می‌توان با

$$\int_\Omega F(x,u,Du)\,dx$$

جایگزین کرد. در پایان $\varepsilon\to 0$.

گام آخر اثبات: حذف شرط کران پایین

$$-a(|\xi|^r+|u|^t)-h(x)\le F$$

$$F_\varepsilon = F + a|u|^t + h(x) + 2\varepsilon|\xi|^p + M$$

$$\ge 2\varepsilon|\xi|^p + M - a|\xi|^r$$

و ثابت $r<p$ است. در نتیجه M را به قدری بزرگ انتخاب کرد که

$$F_\varepsilon \ge \varepsilon|\xi|^p$$

$\Leftarrow$ F_ε نیم پیوسته پایینی است.

حال دنباله $u_\nu \rightharpoonup u$ در $W^{1,p}$ چون $t<p^*$ بنابراین در حد یک زیردنباله

$u_\nu \xrightarrow{L^t} u$ در نتیجه

$$\liminf\int_\Omega F(x,u_\nu,Du_\nu)\,dx = \liminf\int_\Omega F_\varepsilon - a|u_\nu|^t - h(x) - 2\varepsilon|Du_\nu|^p - M$$

$$\ge \int_\Omega F_\varepsilon(x,u,Du) - h(x) - M - a|u|^t\,dx + 2\varepsilon\liminf\int_\Omega -|Du_\nu|^p\,dx$$

$$\geq \int_\Omega F(x,u,Du) + 2\varepsilon |Du|^p \, dx \; - 2\varepsilon C$$

وقتی $\varepsilon \to 0$ قضیه ثابت می‌شود.

<u>مثال</u>- شرط $r<p$ ضروری است. مثال- $F(\xi)=\det(\xi)$ به طور ضعیف نیم‌پیوستگی پایینی نیست برای کران پایین

با بر $r=p$ گرفت. مثلاً در $n=N=2$، $|F| \leq c|\xi|^2$.

مثال- شرط $t<p^*$ ضروری است. می‌دانیم که $W^{1,p} \not\subset\subset L^{p^*}$ درنتیجه دنباله $u_k \to 0$ در $W^{1,p}$

ولی $u_k \not\to 0$ در L^{p^*}.

$$b = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k|^{p^*} dx > 0$$

$$a = \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |Du_k|^p dx$$

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega |Du|^p - \frac{a+1}{b} |u|^{p^*} dx$$

نقض

$$F(u,\xi) = |\xi|^p - \frac{a+1}{b}|u|^{p^*}$$

عملگر مربوط نیم پیوسته پایینی نیست.

$$\liminf \mathcal{F}(u_k) = \liminf \int |Du_k|^p - \frac{a+1}{b}|u_k|^{p^*}$$

$$= a - \frac{a+1}{b}\cdot b = -1$$

$$u_k \xrightarrow{W^{1,p}} 0 \quad , \quad \mathcal{F}(0) = 0$$

شرط تراکمی :

فرض کنید مسئله می‌نیمم‌سازی روی فضای $V=\{u\in W^{1,p}(\Omega) : u=U \text{ on } \partial\Omega\}$

$$= U + W_0^{1,p}(\Omega)$$

قضیه: اگر

$$|F(x,u,\xi)| \leq L|\xi|^p + b(x)|u|^\delta + a(x)$$

$$F(x,u,\xi) \geq \tilde{F}(\xi) - b(x)|u|^\delta - a(x)$$

که $\delta<p$ و $b\in L^{\frac{p}{p-\delta}}$ و $a\in L^1$ و $\tilde{F}$ تابع اکیداً شبه‌محدب در $\xi=0$ باشد یعنی

$$\nu\int_\Omega |D\varphi|^p dx \leq \int_\Omega \tilde{F}(D\varphi) - \tilde{F}(0)\, dx$$

در این صورت $\mathcal{F}(u)=\int_\Omega F(x,u,Du)$ تراکمی است.

مثال : $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ⟵ تغییر شکل داده شده باشد.

$\det(Du)$ ⟵ تغییرات موضعی حجم

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega |Du|^2 + g(\det Du)\, dx$$

انتظار داریم وقتی $\det(Du)$ نزدیک صفر شود یا خیلی بزرگ شود مقدار انرژی بی‌نهایت شود.

$$\lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t \to \infty}} g(t) = \infty$$

اگر g محدب باشد تابع $F(\xi) = |\xi|^2 + g(\xi)$ شبه‌محدب است.

اگر $g \geq 0$ ⟵ F نیم‌پیوسته پایینی است.

برای تراکمی $|F(\xi)| \leq L|\xi|^p + M$ و $c|\xi|^p \leq F$

اثبات کرسیو بودن

$$\varphi = u - U \in W_0^{1,p}$$

$$\int_\Omega |Du|^p dx \leq c \int_\Omega |D\varphi|^p + |DU|^p \, dx$$

$$\leq c \int_\Omega \tilde{F}(D\varphi) dx + C$$

$$\leq c \int_\Omega F(x, u(x), D\varphi(x)) + b|u|^\delta + a \, dx + C$$

از فرض

$$\int_\Omega F(x, u, D\varphi) dx = \int_\Omega F(x, u, Du) dx + \int_\Omega F(x, u, D\varphi) - F(x, u, Du) dx$$

لم: اگر F رتبه-یک محدب باشد و $|F(\xi)| \leq c(\lambda + |\xi|)^p$ آنگاه

$$|F(\xi) - F(\eta)| \leq c(\lambda + |\xi| + |\eta|)^{p-1} \cdot |\xi - \eta|$$

اگر $\lambda = \left| b|u|^{\delta} + a \right|^{1/p}$ بنابر لم قبل داریم:

$$\left| F(x,u,D\varphi) - F(x,u,Du) \right| \le C\left(\lambda + |Du| + |D\varphi|\right)^{p-1} \cdot |Du - D\varphi|$$

از طرفی $\varphi = u - U$ پس

$$\int_\Omega F(x,u,D\varphi)\,dx \le \int_\Omega F(x,u,Du)\,dx + C\int_\Omega \left(\lambda + |Du| + |D\varphi|\right)^{p-1} \cdot |DU|\,dx$$

$$\le \int_\Omega F(x,u,Du)\,dx + C\int_\Omega |DU|^p\,dx + C\varepsilon\int_\Omega \lambda^p + |Du|^p + |D\varphi|^p$$

$$A^{p-1} \cdot B \le \varepsilon A^p + C(\varepsilon) B^p$$

$$\nu\int_\Omega |Du|^p\,dx \le \int_\Omega F(x,u,Du)\,dx + C + \int b|u|^{\delta} + a$$ تا اینجای کار

$$\int_\Omega b|u|^\delta dx \le \int b|U|^\delta + b|\varphi|^\delta dx$$

$$\le C + \varepsilon \int_\Omega |\varphi|^p dx + c\int |b|^{\frac{p}{p-\delta}} dx$$

نامساوی پوانکاره $\quad \le C + c\varepsilon \int_\Omega |D\varphi|^p dx$

$$\le C + c\varepsilon \int_\Omega |Du|^p dx$$

$$\bar{\nu} \int_\Omega |Du|^p dx \le \int_\Omega F(x,u,Du)\,dx + C$$

روشهای تفکیکی در آنالیز

جلسه چهارده - ۹۵/۸/۲۳

Relaxation Theorem

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x,u,Du)\,dx$$

$$\inf_{u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)} \mathcal{F}(u) = \inf_{u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)} Q\mathcal{F}(u)$$

$$Q\mathcal{F}(u) = \int_\Omega QF(x,u,Du)\,dx$$

QF: پوشش شبه محدب F است.

$QF(\xi) = \sup\{h(\xi) : h \leq F,$ شبه محدب است $h\}$

$$QF(\xi) = \inf\left\{ \fint_\Omega F(\xi + D\varphi(x))\,dx : \varphi \in C_0^1(\Omega) \right\}$$

$$F^*(\xi^*) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} \langle \xi^*, \xi \rangle - F(\xi)$$

F^{**} بزرگترین تابع محدب کوچکتر از F است.

$$F^{**}(\xi) = \sup_{\xi^* \in \mathbb{R}^m} \langle \xi^*, \xi \rangle - F^*(\xi^*)$$

$$\inf \int_\Omega F^{**}(x,u,Du)\,dx = ?$$

$$F^{**} \leq F$$

مثال :

$N = n \geq 2$ ، $F(\xi) = |\det \xi|^2$

$\downarrow$

$QF = F \longleftarrow$ polyconvex

$$F^{**} = 0$$

$$\inf_{u - u_0 \in W_0^{1,p}} \int_\Omega |\det Du|^2\,dx = \int_\Omega |\det Du_0|^2 > 0$$

قضیه: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ باز و کران دار و $F : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ اندازه پذیر که برای $1 \leq p < \infty$ در شرایط زیر صدق می‌کند

$$|F(\xi)| \leq C\,(1+|\xi|^p)$$

در این صورت

$$\inf_{u-u_0 \in W_0^{1,p}} \mathcal{F}(u) = \inf_{u-u_0 \in W_0^{1,p}} Q\mathcal{F}(u)$$

به طور دقیق‌تر، برای هر $p \leq q \leq \infty$ و $u \in W^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ دنباله $u_m \in u + W_0^{1,q}$ وجود دارد که

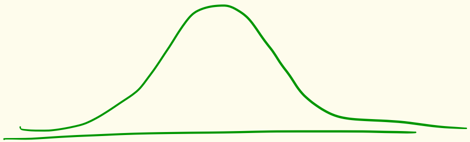
$$u_m \xrightarrow{L^q} u$$

و

$$\mathcal{F}(u_m) \longrightarrow Q\mathcal{F}(u)$$

مثال: کرانداری دنباله $\{u_m\}$ در L^q است نه در $W^{1,p}$. $F(\xi)=e^{-|\xi|}$ و $n=N=1$. $\Omega=(0,1)$

$$\mathcal{F}(u)=\int_0^1 e^{-|u'(t)|}\,dt$$



$$Q\mathcal{F}\equiv 0$$

بنابر تعریف دنباله $\{u_m\}$ در $W^{1,1}(0,1)$ وجود دارد که $\mathcal{F}(u_m)\longrightarrow 0$, $u_m \xrightarrow{L^\infty} u$.

$$0\longleftarrow \mathcal{F}(u_m)=\int_0^1 e^{-|u_m'(t)|}\,dt \;\underset{\text{Jensen نامساوی}}{\geq}\; e^{\int_0^1 -|u_m'(t)|\,dt}\geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |u_m'(t)|\,dt \longrightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ $\{u_m\}$ در $W^{1,1}$ کراندار نیست.

اثبات: گام اول: فرض کنید $\Omega=(0,1)^n$ و u یک تابع آفین باشد یعنی $Du=\xi$ ثابت است.

$$\exists\, \varphi_m\in W_0^{1,\infty}(\Omega)$$

$$\fint_\Omega F(\xi+D\varphi_m(x))\,dx-\frac{1}{m}\le QF(\xi)\le \fint_\Omega F(\xi+D\varphi_m(x))\,dx$$

- $\mathcal{F}(u_m)=\int_\Omega F(Du_m)\,dx\longrightarrow\int_\Omega QF(\xi)\,dx$: را نشان دهیم

$$\mathcal{F}(u+\varphi_m)\longrightarrow Q\mathcal{F}(\xi)$$

- $u_m\longrightarrow u \text{ in } L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$

یا به طور معادل $\varphi_m\xrightarrow{L^\infty}0$.

با جایگزینی φ_m با تابع جدید ψ_m شرط دوم را احراز کنیم با حفظ شرط اول.

$$m\|\varphi_m\|_\infty\lesssim S(m)\longrightarrow\infty$$

φ_m را به صورت تناوبی به $\mathbb{R}^n$ گسترش دهید.

$$\psi_m(x) = \frac{1}{S(m)} \varphi_m(S(m)\, x) \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$$

$$\|\psi_m\|_\infty = \frac{\|\varphi_m\|_\infty}{S(m)} \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \psi_m \xrightarrow{L^\infty} 0$$

$$\mathcal{F}(u+\psi_m) = \int_\Omega F(\xi + D\psi_m)\, dx$$

$$= \int_\Omega F(\xi + D\varphi_m(S(m)\, x))\, dx$$

$$= \int_{S(m)\Omega} F(\xi + D\varphi_m(x))\, S_m^{-n}\, dx$$

$$= \int_\Omega F(\xi + D\varphi_m)\, dx \longrightarrow \int_\Omega QF(\xi)\, dx$$

گام دوم: مکعب‌های $Q_1,\dots,Q_k$ وجود دارند که جدا از هم هستند و

$$\left|\Omega - \bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right| < \varepsilon$$

$$\xi_i = \fint_{Q_i} Du \, dx$$

$v \in u + W_0^{1,p}(\Omega)$ وجود دارد که $Dv = \xi_i$ in Q_i و $\|u-v\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$.

باید نشان دهیم:

$$\int_\Omega |QF(Du) - QF(Dv)| \, dx < C\varepsilon$$

یکی از لم‌های جلسات قبل که برای پیوستگی QF استفاده کردیم:

$$|QF(\xi) - QF(\eta)| \le C(1+|\xi|+|\eta|)^{p-1} |\xi-\eta|$$

$$\int_\Omega |QF(Du) - QF(Dv)| \, dx \le C\left[\int_\Omega (1+|Du|+|Dv|)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left[\int_\Omega |Du-Dv|^p\right]^{1/p}$$

$$\le C\varepsilon$$

پس می‌توانیم در اثبات قضیه برای u تابع v را جایگزین کنیم.

برای هر Q_i دنباله $u_{i,m} \in v + W_0^{1,\infty}(Q_i)$ که

$$\int_{Q_i} F(Du_{i,m})\,dx \longrightarrow \int_{Q_i} QF(\xi_i)\,dx$$

$$\|u_{i,m} - v\|_{L^\infty(Q_i)} \longrightarrow 0 \qquad \text{as } m \to \infty$$

$$u_m(x) = \begin{cases} u_{i,m}(x) & x \in Q_i \\ v(x) & x \in \Omega - \bigcup_i Q_i \end{cases}$$

$$u_m \in v + W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$u_m \longrightarrow v \quad \text{in } L^\infty(\Omega)$$

$$\int_\Omega F(Du_m)\,dx \xrightarrow{?} \int_\Omega QF(Dv(x))\,dx$$

تنها کافی است نشان دهیم!

$$0 \le \int_{\Omega - \cup Q_i} F(Du_m)\,dx - \int_{\Omega - \cup Q_i} QF(Dv)\,dx = \int_{\Omega - \cup Q_i} F(Dv) - QF(Dv)\,dx$$

$$\le \int_{\Omega - \cup Q_i} F(Dv)\,dx \le C \int_{\Omega - \cup Q_i} (1 + |Dv|^p)\,dx$$

$$\le C\,|\Omega - \cup Q_i| \le C\varepsilon$$

u را با v جایگزین کردیم در دنباله $\{u_m\}$ ساختیم که

$$\limsup \int_{\Omega} |F(Du_m) - QF(Dv)|\,dx < C\varepsilon$$

$$\Rightarrow \limsup \int_{\Omega} |F(Du_m) - QF(Du)|\,dx < C\varepsilon$$

قضیه: اگر $|F(x,u,\xi)| \leq C(1+|u|^p+|\xi|^p)$ برای تقریباً هر $x\in\Omega$ و هر $u\in\mathbb{R}^N$ و $\xi\in\mathbb{R}^{N\times n}$ برقرار باشد، آنگاه نتیجه قضیه قبل درست است. به علاوه اگر

$$\alpha|\xi|^p+\beta \leq F(x,u,\xi)$$

برای ثابت‌های مثبت α و β. آنگاه در نتیجه قضیه قبل می‌توان فرض کرد $u_m \longrightarrow u$ در $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$

روشهای تغییراتی در آنالیز

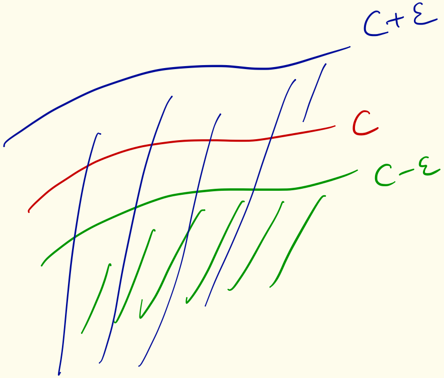
جلسه پانزده ۹۵/۸/۲۵

نقاط زینی

X فضای باناخ ، $\varphi : X \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$

$K_c = \{u \in X : \varphi'(u) = 0 \ , \ \varphi(u) = c\}$ نقاط بحرانی روی سطح تراز c

$$\varphi^c = \{u \in X : \varphi(u) \le c\}$$



c را مقدار بحرانی گوییم هرگاه $K_c \neq \emptyset$. در غیراینصورت c مقدار عادی است.

هدف این جلسه: اگر c مقدار عادی باشد می‌توانیم $\varphi^{c+\varepsilon}$ را به $\varphi^{c-\varepsilon}$ با یک همسان‌ریختی تبدیل کنیم.

تعریف: یک شبه گرادیان برای تابع $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ یک تابع موضعاً لیپ‌شیتز $v: Y \to X$ است که $Y = \{u \in X : \varphi'(u) \neq 0\}$ و در شرایط زیر صدق می‌کند

$$1) \quad \|v(u)\| \leq 2\|\varphi'(u)\|$$

$$2) \quad \langle \varphi'(u), v(u) \rangle \geq \|\varphi'(u)\|^2$$

اگر φ' لیپ‌شیتز باشد و X فضای هیلبرت باشد، آنگاه $\nabla\varphi : Y \to X$ تعریف می‌شود و یک شبه گرادیان است.

اثبات وجود شبه گرادیان برای هر تابع C^1 روی فضای باناخ X به کتاب Willem ارجاع می‌شود.

قضیه دگردیسی : $\varphi : X \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ ، $S \subseteq X$ ، $c \in \mathbb{R}$ ، $\varepsilon, \delta > 0$ به طوری که

$$\|\varphi'(u)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta} \quad \text{for } u \in \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \cap S_{2\delta}$$

که $S_\alpha = \{u \in X : \operatorname{dist}(u,S) \leq \alpha\}$. در این صورت نگاشت پیوسته $\eta \in C([0,1] \times X ; X)$ وجود دارد به طوری که

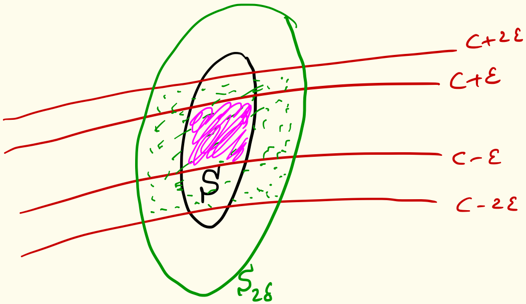
1) $\eta(0,u) = u \quad \forall u \in X$

2) $\eta(t,u) = u$ if $u \notin \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \cap S_{2\delta}$

3) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subseteq \varphi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$

4) $\eta(t,\cdot) : X \longrightarrow X$ برای هر $0 \leq t \leq 1$ نگاشت

یک همسانریختی است.



$$A = \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \cap S_{2\delta}$$

$$B = \varphi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \cap S_{\delta}$$

$$Y = \{u : \varphi'(u) \neq 0\}$$

$$B \subseteq A \subseteq Y$$

شبه‌گرادیان $v : Y \longrightarrow X$

p موضعاً لیپشیتز وجود دارد که $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} p = 1 & \text{in } B \\ p = 0 & \text{in } X \setminus A \end{cases}$$

$$f : X \longrightarrow X$$

$$f(u) = -p(u)\,\frac{v(u)}{\|v(u)\|}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = f(w) \\ w(0) = u \end{cases}$$

برای هر $u \in X$ معادله روبرو جواب

یکتا دارد. از طرفی چون $\|f(u)\| \le 1$

دامنه تعریف جواب بیکران است.

$$\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$$

$$\eta(t,u) = \omega(\delta t, u)$$

خواص ۱، ۲ و 4 به وضوح برقرار است.

$$\| \omega(t,u) - u \| = \| \omega(t,u) - \omega(0,u) \|$$

$$= \left\| \int_0^t f(\omega(s,u))\, ds \right\|$$

$$\leq \int_0^t \| f(\omega(s,u)) \| \, ds \leq t$$

$$\eta(1,u) \in S_\delta \quad \text{for } u \in S$$

$$\frac{d}{dt} \varphi(\omega(t,u)) = \langle \varphi'(\omega(t,u)), f(\omega(t,u)) \rangle$$

$$= -\frac{\rho(\omega)}{\| \vartheta(\omega) \|} \langle \varphi'(\omega), \vartheta(\omega) \rangle$$

تا وقتی که $\omega \in B$

$$\leq \frac{-\rho}{\| \vartheta \|} \cdot \| \varphi' \|^2 \leq -\frac{\rho}{2} \| \varphi' \| \leq -\frac{2\varepsilon}{\delta}$$

$$\Rightarrow \varphi(\eta(1,u)) - \varphi(u) \le -2\varepsilon$$

به شرط آنکه $\omega(t,u) \in B$ برای $0 \le t \le \delta$.

و این نامساوی نشان می‌دهد که $\eta(1,u) \in \varphi^{c-\varepsilon}$ هرگاه $u \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$.

$$B = \varphi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \cap S_\delta$$

فرض کنید برای $\hat{t} \in [0,\delta)$ داشته باشیم $\varphi(\omega(\hat{t},u)) = c-\varepsilon$ در نتیجه $\varphi(\eta(1,u)) \le c-\varepsilon$

چون φ روی شار نزولی است. در هر صورت $\eta(1,u) \in \varphi^{c-\varepsilon}$.

قضیه (Clark). فرض کنید $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ در شرط palais-Smale صدق کند

(PS) هر دنباله $\{u_n\}$ که $\varphi(u_n)$ کران دار باشد، $\varphi'(u_n) \to 0$ یک زیر دنباله همگرا دارد.

اگر $c \in \mathbb{R}$ یک مقدار بحرانی نباشد، آنگاه برای هر $\varepsilon_0 > \varepsilon$ به اندازه کافی کوچک تابع $\eta \in C([0,1] \times X ; X)$ وجود دارد که

1) $\eta(0,u) = u, \quad \forall u \in X$

2) $\eta(t,u) = u$ اگر $u \notin \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]$

3) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subseteq \varphi^{c-\varepsilon}$

4) $\eta(t,\cdot) : X \xrightarrow{\text{homeomorphism}} X$

اثبات ممکن است نشان دهیم ثابتهای $\alpha, \delta > 0$ وجود دارند که

$$\|\varphi'(u)\| \geq \delta > 0 \qquad \text{for} \quad u \in \varphi^{-1}[c-2\alpha, c+2\alpha]$$

در این صورت بنابر قضیه تغییر شکل برای هر $\varepsilon \leq \alpha$ قضیه اثبات می‌شود.

فرض خلف $\Leftarrow$ $\quad \|\varphi'(u_n)\| < \frac{1}{n}$, $\quad c - \frac{1}{n} \leq \varphi(u_n) \leq c + \frac{1}{n}$

$(PS) \Rightarrow \{u_n\}$ زیردنباله همگرا دارد اگر $u_n \longrightarrow u$, $\varphi(u) = c$, $\varphi'(u) = 0 \Rightarrow c$ مقدار بحرانی است X

نکته: شرط (PS) از قضیه قبل را می‌توان ضعیف‌تر کرد.

Brezis–Coron–Nirenberg (1980)

$(BCN)_c$ اگر برای دنباله $\{u_n\}$ داشته باشیم $\varphi(u_n) \to c$, $\varphi'(u_n) \to 0$

آنگاه c یک مقدار بحرانی φ است.

مثال - اگر φ تابع تناوبی باشد می‌توان نشان داد که $(BCN)_c \not\Rightarrow (PS)$.

<u>قضیه</u>: $\varphi\in C^1(X;\mathbb{R})$ در شرط (PS) صدق می‌کند. $c\in\mathbb{R}$ و U همسایگی باز از K_c.

آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ به اندازه کافی کوچک تابع $\eta\in C([0,1]\times X;X)$ وجود دارد که

1) $\eta(0,u)=u$

2) $\eta(t,u)=u$ for $u\notin\varphi^{-1}[c-2\varepsilon,c+2\varepsilon]$

3) $\eta(1,\varphi^{c+\varepsilon}\setminus U)\subseteq\varphi^{c-\varepsilon}$

4 $\eta(t,\cdot):X\longrightarrow X$ is a homeomorphism

اثبات: $S=X-U$ کافی است $\alpha,\delta>0$ وجود داشته باشد که

$$\|\varphi'(u)\|\geq\frac{4\alpha}{\delta}\quad\text{for}\quad u\in\varphi^{-1}[c-2\alpha,c+2\alpha]\cap S_{2\delta}$$

در این صورت برای هر $\varepsilon<\alpha$ قضیه درست است.

$$u_n\in S_{\frac{1}{n}}\ ,\ c-\frac{1}{n^2}\leq\varphi(u_n)\leq c+\frac{1}{n^2}$$

$$\|\varphi'(u_n)\|<\frac{4}{n}$$

$K_c\cap S\neq\emptyset$ ※

$$(PS)\Longrightarrow\quad u_n\xrightarrow[\text{در صورت یک زیر دنباله}]{}u\Rightarrow u\in S\ ,\ \varphi(u)=c\ ,\ \varphi'(u)=0\ \Uparrow$$

روشهای تجزیه‌ای در آنالیز

جلسه شانزده ۹۵/۹/۲

(PS) $\{\varphi(u_n)\}$ کران‌دار ، $\varphi'(u_n) \to 0 \Rightarrow$ زیردنباله‌ای از u_n همگرا است.

$(BCN)_c$ $\varphi(u_n) \to c$ ، $\varphi'(u_n) \to 0 \Rightarrow$ c مقدار بحرانی است.

قضیه: $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ و X فضای باناخ ، φ از پایین کران‌دار و $c = \inf\limits_X \varphi$ در شرط $(BCN)_c$ صدق کند آنگاه φ می‌نیمم خود را اتخاذ می‌کند.

اثبات: اگر c مقدار عادی باشد، $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subseteq \varphi^{c-\varepsilon}$ از طرفی $\varphi^{c-\varepsilon} = \emptyset$. $\times$

مثال:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + p(x) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(1) f تابع تناوبی [پیوسته] است با دوره تناوب p و $\int_0^p f(s)\,ds = 0$.

$F(u) = \int_0^u f(s)\,ds$

(2) $\int_\Omega p(x)\,dx = 0$

$$\varphi(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u) - p(x)u \, dx$$

$\varphi(u+p) = \varphi(u) \longrightarrow$ φ کرالکی نیست.

p: تابع ثابت

$\varphi \in C^1(H^1(\Omega);\mathbb{R})$ ،

F تابع تناوبی و پیوسته و به شرط $\int_0^p f = 0$ ، F کران دارد است.

$$\int_\Omega p(x)\,u\,dx = \int p\,(u-\bar{u})\,dx \le \|p\|_{L^2}\cdot\|u-\bar{u}\|_{L^2} \le C_\varepsilon \|p\|^2 + \varepsilon\|\nabla u\|^2$$

نامساوی پوانکاره $\int_\Omega |u-\bar{u}|^2 \le C\int_\Omega |\nabla u|^2$

$$\Rightarrow \quad \varphi(u) \geq C + \left(\tfrac{1}{2} - \varepsilon\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

شرط (BCN) : $\varphi(u_n) \longrightarrow c \,, \quad \varphi'(u_n) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow$ $\|\nabla u_n\|_{L^2}$ کران دار $\xRightarrow{\text{پوانکاره}}$ $\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^2}$ کران دار

$w_n = u_n - \bar{u}_n$ در $H^1(\Omega)$ کران دار

$w_n \xrightarrow{H^1} w$ در حد زیر دنباله

$$\varphi(u_n) = \varphi(u_n + mp) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}$$

m را به گونه ای انتخاب کنید که $0 \leq \overline{(u_n + mp)} = \bar{u}_n + mp|\Omega| \leq p|\Omega|$

و $u_n + mp$ را جایگزین u_n کنید. در واقع با این کار می‌توان فرض کرد که

$0 \leq \bar{u}_n \leq p|\Omega|$ و در حد یک زیر دنباله $\bar{u}_n \longrightarrow \alpha$.

$$H^1(\Omega) = \langle 1 \rangle \oplus X \qquad u_n = \bar{u}_n + w_n$$

$$w_n \xrightarrow{H^1} w \implies w_n \xrightarrow{L^2} w \implies u_n \xrightarrow{L^2} w+\alpha$$

$$0 \leftarrow \langle \varphi'(u_n), v \rangle = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v - f(u_n)v - \rho v \, dx$$

$$\to \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v - f(w+\alpha)v - \rho v \, dx$$

$$= \langle \varphi'(w+\alpha), v \rangle$$

$$\implies \varphi'(w+\alpha) = 0$$

کافی است ثابت کنیم $\varphi(w+\alpha)=c$ تا c مقدار بحرانی باشد.

$$0 \leftarrow \langle \varphi'(u_n), u_n \rangle = \int |\nabla u_n|^2 - f(u_n)u_n - \rho u_n$$

از طرفی چون $u_n \xrightarrow{L^2} w+\alpha$ داریم $\int f(u_n)u_n - \rho u_n \to \int f(w+\alpha)(w+\alpha) - \rho(w+\alpha)$

$$= \langle \cancel{\varphi'(w+\alpha)}_{0}, w+\alpha \rangle - \int |\nabla w|^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \|u_n\|_{H^1} \longrightarrow \|w+\alpha\|_{H^1} \\ u_n \xrightarrow{H^1} w+\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow{H^1} w+\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(w+\alpha) = c$$

قضیه: (گذرگاه کوهستانی) X فضای باناخ، $\varphi\in C^1(X;\mathbb{R})$ در شرط (PS) صدق می‌کند (یا در $(BCN)_c$)

اگر $e\in X$ و $0<r<\|e\|$ وجود داشته باشند که

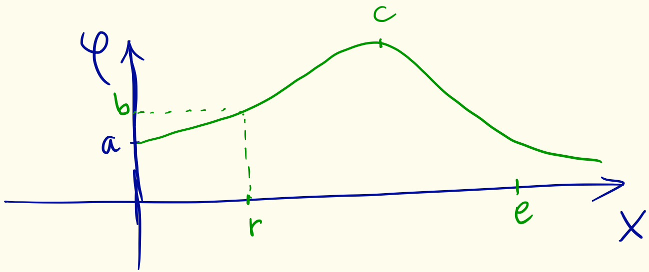
$$a=\max\{\varphi(0),\varphi(e)\}<\inf_{\|u\|=r}\varphi(u):=b$$

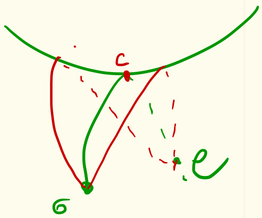
در این صورت

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t))$$

یک مقدار بحرانی است که $c\geq b$.

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1];X)\;:\;\gamma(0)=0,\ \gamma(1)=e\}$$





اثبات:

$$\exists \gamma \in \Gamma : \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} \varphi(\gamma(t)) \leq c+\varepsilon$$

اگر c مقدار عادی باشد، $\eta \in C([0,1] \times X ; X)$ وجود دارد که

$$\begin{cases} \eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subseteq \varphi^{c-\varepsilon} \\ \eta(t, u) = u \quad \text{for} \quad u \notin \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \end{cases}$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t)) \subseteq \varphi^{c-\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\tilde{\gamma}(t)) \leq c-\varepsilon$$

این تناقض است به شرط آنکه $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. کافی است

$$\tilde{\gamma}(0) = 0, \quad \tilde{\gamma}(1) = e$$

این درست اگر ε به اندازه کافی کوچک انتخاب شود به گونه‌ای که $0, e \notin \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]$

$$\varphi(0), \varphi(e) \leq a < b$$

و به وضوح $b \leq c$.

مثال:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

جواب غیربدیهی دارد.

$$\varphi(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{4}u^4 \, dx$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad H_0^1(\Omega) \subseteq L^{2^*}, \quad 2^* = \frac{N+2}{N-2} = 5$$

$$\|u\|_{H_0^1} = r \Rightarrow \varphi(u) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4$$

$$\geq \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 = r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}r^2\right) > 0$$

$0 < \inf\limits_{\|u\|_{H_0^1} = r} \varphi(u) \Leftarrow$ برای یک مقدار r به اندازه کافی کوچک.

از طرفی اگر $0 \neq v \in H_0^1$

$$\varphi(tv) = \frac{t^2}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{t^4}{4}\|v\|_{L^4}^4$$

برای t به اندازه کافی بزرگ $\varphi(tv) < 0$.

شرط (PS).

$$\left.\begin{cases} \varphi(u_n) \text{ کران‌دار} \\ \varphi'(u_n) \longrightarrow 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ زیردنباله همگرا داریم

$$\langle \varphi'(u_n), v \rangle = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v - u_n^3 v$$

چون $\varphi'(u_n) \to 0$:

$$|\langle \varphi'(u_n), u_n \rangle| \leq C \|u_n\|_{H_0^1}$$

$$-\langle \varphi'(u_n), u_n \rangle + 4\varphi(u_n) = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \|u_n\|^2$$

$\Rightarrow$ کران‌دار $\|u_n\|^2 + C\|u_n\|$ $\Longrightarrow$ $\|u_n\|$ کران‌دار

$$u_n \xrightarrow{H_0^1} u$$

$$0 \leftarrow \langle \varphi'(u_n), u_n - u \rangle = \int |\nabla u_n|^2 - \nabla u_n \cdot \nabla u - u_n^3 (u_n - u)\, dx$$

$$\Longrightarrow \|u_n\|_{H_0^1} \longrightarrow \|u\|_{H_0^1} \Longrightarrow u_n \xrightarrow{H_0^1} u$$

نکته: به طور مشابه معادله $-\Delta u = u|u|^{p-1}$ جواب غیربدیهی در H_0^1 دارد اگر $p+1 < 2^*$.

روشهای جداسازی در آنالیز

جلسه هفدهم ۹۵/۹/۷

مثال

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کاراتئودوری

(f_1) $|f(x,s)| \le c|s|^\sigma + d$ که $0 \le \sigma < \frac{N+2}{N-2}$

(f_2) $f(x,s) = o(|s|)$ وقتی $s \to 0$ به طور یکنواخت نسبت به x

(f_3) $r > 0$ و $\mu > 2$ وجود دارند که $0 < \mu F(x,s) < s f(x,s)$ برای $|s| \ge r$

$$\boxed{(f_3) \to \quad F(x,s) \ge c|s|^\mu - d \quad \forall s \in \mathbb{R}}$$

شرط فوق خطی

$$\varphi(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\,dx \quad , \quad \varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$u=0$ نقطه مینیمم موضعی است. ✓

$\forall \varepsilon\ \exists \delta :\quad |f(x,s)| \leq \varepsilon |s| \quad$ for $\quad |s| \leq \delta$

$$\hookrightarrow \quad |F(x,s)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon |s|^2$$

$(f_1) \Rightarrow \quad |F(x,s)| \leq A|s|^{\sigma+1} \quad$ for $\quad |s| \geq \sigma$

$f_1, f_2 \Rightarrow \quad |F(x,s)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|s|^2 + A|s|^{\sigma+1} \quad$ for $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\|u\|_{L^2}^2 - A\|u\|_{L^{\sigma+1}}^{\sigma+1}$$

$\sigma+1 < 2^* \quad , \quad H_0^1 \hookrightarrow L^{\sigma+1}$

$$\|u\|_{\sigma+1} \leq C\|u\|_{H^1}$$

poincare $\longrightarrow \quad \|u\|_2 \leq C\|u\|_{H^1}$

$$\varphi(u) \geq c\|u\|_{H^1}^2 - \tilde{A}\|u\|_{H^1}^{\sigma+1} = \|u\|^2 \left(C - A\|u\|^{\sigma-1}\right)$$

اگر $\|u\|=r$ کوچک باشد، $\varphi(u)\geq b>0$.

برای هر تابع $v\in H_0^1$ ، مقدار $\rho>0$ وجود دارد که $\varphi(\rho v)\leq 0$.

$$\varphi(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - c\|u\|_{L^\mu}^\mu - d|\Omega|$$

$$\varphi(\rho v) \leq \frac{1}{2}\rho^2\|v\|_{H^1}^2 - c\rho^\mu\|v\|_{L^\mu}^\mu - d|\Omega| \quad , \quad \mu>2$$

اگر $\rho\to\infty$ آنگاه $\varphi(\rho v)<0$.

<u>شرط (PS)</u> : $|\varphi(u_n)| \le C \,,\ \varphi'(u_n) \to 0 \Leftarrow$ یک زیردنباله همگرا از $\{u_n\}$ وجود دارد.

$$\left|\langle \varphi'(u_n), u_n \rangle\right| = \left| \int |\nabla u_n|^2 - f(x,u_n)u_n \, dx \right| \le \|u_n\|$$

$$O(\|u_n\|) = \varphi(u_n) - \alpha \langle \varphi'(u_n), u_n \rangle = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - \alpha\right)\|u_n\|^2 + \int \alpha f(x,u_n)u_n}_{\ge \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\|u_n\|^2} - F(x,u_n)$$

$$\alpha = 1/\mu < 1/2 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ $\{\|u_n\|\}$ کران دار است.

در نتیجه $u_n \xrightarrow{H^1} u$ در حد زیردنباله

$$0 \leftarrow \langle \varphi'(u_n), u_n - u \rangle = \int |\nabla u_n|^2 - \nabla u_n \cdot \nabla u - f(x,u_n)(u_n - u)\,dx$$

$$\Longrightarrow \|u_n\| \longrightarrow \|u\|$$

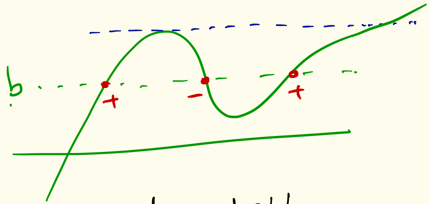
درجه توپولوژیک براور:

$\Phi \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$ که $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

تعداد جواب‌های $\Phi(x) = b$ ؟

$b \in \mathbb{R}^n \setminus \Phi(\partial U)$ مقدار منظم (regular) باشد یعنی $\Phi'(\xi)$ وارون‌پذیر است برای هر $\xi \in \Phi^{-1}(b)$.

$$\deg(\Phi, U, b) = \sum_{\xi \in \Phi^{-1}(b)} \operatorname{sgn} \det [\Phi'(\xi)]$$



خواص:

1) (Normalization) $Id : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow \deg(Id, U, b) = \begin{cases} 1 & b \in U \\ 0 & b \notin U \end{cases}$

2) (Existence) $\deg(\Phi, U, b) \neq 0 \Longrightarrow$ حداقل یک ریشه دارد $\Phi(x) = b$

3) (Additivity) $U = U_1 \cup U_2 , \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$

$b \notin \Phi(\partial U_1) \cup \Phi(\partial U_2)$

$$\Longrightarrow \deg(\Phi, U, b) = \deg(\Phi, U_1, b) + \deg(\Phi, U_2, b)$$

4) (Continuity) اگر Ψ به اندازه کافی نزدیک به Φ باشد $\Rightarrow \deg(\Psi, U, b) = \deg(\Phi, U, b)$

5) (Homotopy Invariance) $H \in C([0,1] \times \bar{U}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin H([0,1] \times \partial U)$

$$\deg(H(t, \cdot), U, b) = \text{Constant} \quad \forall t \in [0,1]$$

6) (Boundary Dependence) $\Psi = \Phi$ on $\partial U \Rightarrow \deg(\Phi, U, b) = \deg(\Psi, U, b)$

$$H(t, x) = t\Phi(x) + (1-t)\Psi(x)$$

اگر Φ تابع پیوسته باشد، دنباله‌ای از توابع C^1 ، Φ_k پیدا کنیم که $\Phi_k \xrightarrow{\text{unif}} \Phi$

$$\deg(\Phi, U, b) = \lim_{k \to \infty} \deg(\Phi_k, U, b)$$

درجه توپولوژیک Leray-Schauder

X فضای باناخ، $U \subseteq X$ باز و $\Phi \in C(\bar{U}, X)$ که $\Phi = I - T$ و T فشرده است.

نیز این دنباله توابع رتبه متناهی T_n وجود دارند که $T_n \longrightarrow T$. فرض کنید $T_n : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\Phi_n = I - T_n$$

$$\deg(\Phi, U, b) := \lim_{n \to \infty} \deg\left(\Phi_n\big|_{U \cap \mathbb{R}^n} , U \cap \mathbb{R}^n , b \right)$$

خواص صفحه قبل برای این درجه نیز برقرار است.

قضیه: $X=V\oplus W$ یک فضای باناخ، $\dim V<\infty$ و $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$ در شرط (PS) صدق می‌کند.

D یک همسایگی مبدأ در V بطوری که

$$a=\max_{\partial D}\varphi<\inf_{W}\varphi=b$$

آنگاه

$$c=\inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\bar{D}}\varphi(h(u))$$

یک مقدار بحرانی است که $b\le c$ و

$$\Gamma=\{h\in C(D,X):\ h|_{\partial D}=id\}$$

<u>اثبات</u>: فرض کنید c مقدار بحرانی نباشد آنگاه η وجود دارد که $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$

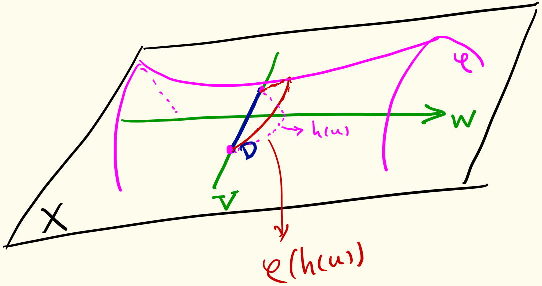
$$\eta(t,u) = u \qquad u \notin \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]$$

$$\exists\, h \in \Gamma, \quad \sup_{u \in \overline{D}} \varphi(h(u)) < c+\varepsilon$$

$$\hat{h}(u) = \eta(1, h(u)) \in \varphi^{c-\varepsilon}$$

$$\hat{h}\big|_{\partial D} = \eta(1,u) \overset{?}{=} u \Leftarrow \varphi(u) \le a < c-2\varepsilon$$

این رابطه از $b \le c$ نتیجه می‌شود.



$$\sup_{u\in\bar{D}} \varphi(h(u)) \geq b = \inf_{W} \varphi$$

$$h(\bar{D}) \cap W \neq \emptyset$$

نگاشت تصویر $\quad p : X \longrightarrow V$

$$p\circ h : \bar{D} \longrightarrow V \quad , \quad p\circ h\big|_{\partial D} = id$$

$$\deg(p\circ h, D, 0) = \deg(Id, D, 0) = +1$$

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \in D \ , \ p(h(x_0)) = 0 \Rightarrow h(x_0) \in W$$

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه هیجده - ۹۵/۹/۱۴

قضیه: $X=V\oplus W$ یک فضای باناخ، $\dim V<\infty$ و $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$ در شرط (PS) صدق می‌کند.

D یک همسایگی مبدأ در V به طوری که

$$a=\max_{\partial D}\varphi < \inf_{W}\varphi = b$$

آنگاه

$$c=\inf_{h\in\Gamma}\ \sup_{u\in\bar{D}}\varphi(h(u))$$

یک مقدار بحرانی است که $b\le c$ و

$$\Gamma=\left\{h\in C(D,X):\ h\big|_{\partial D}=id\right\}$$

نکته: برای کاربرد این قضیه تجزیه $X = V \oplus W$ در نظر می‌گیریم که

$$\varphi(u) \longrightarrow -\infty \qquad \|u\| \to \infty \,,\ u \in V$$

$$\varphi(u) \longrightarrow +\infty \qquad \|u\| \to \infty \,,\ u \in W$$

مثال:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_k u + g(x,u) \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

λ_k، k-امین مقدار ویژه $-\Delta$ با شرط مرزی دیریکله

$$(g_1) \begin{cases} g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{پیوسته و کران دار} \\ |g(x,u)| \le M \end{cases}$$

$$(g_2^{\pm}) \qquad \int_{\Omega} G(x, v(x))\,dx \longrightarrow \pm\infty$$

وقتی $\|v\| \to \infty$ و $v \in N_k$

(N_k فضای ویژه متناظر λ_k)

نکته: اگر $\lim_{|s|\to\infty} G(x,s) = \pm\infty$ به طور یکنواخت برای $x \in \bar{\Omega}$.

آنگاه شرط $(g_2^{\pm})$ برقرار است.

$v = \rho\omega$, $\rho = \|v\|$, $\omega \in \{u \in N_k : \|u\| = 1\}$

شرط بالا $\Rightarrow$ $\exists \alpha$, $|s| \geq \alpha$, $G(x,s) \geq K$.

$$\int_\Omega G(x,v(x))\,dx \geq \int_{\{|v|\geq\alpha\}} K\,dx + \int_{\{|v|<\alpha\}} G(x,v(x))\,dx$$

که $G \geq -M_0$

$$\geq K\left|\{|v|\geq\alpha\}\right| - M_0|\Omega|$$

$$\{|v|\geq\alpha\} = \{\rho|\omega|\geq\alpha\} \geq \frac{|\Omega|}{2}$$

برای ρ به اندازه کافی بزرگ

$$\geq \left(\frac{K}{2} - M_0\right)|\Omega|$$

$$\varphi(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2\right) - G(x,u)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle - \int_\Omega G(x,u)\,dx$$

فرض کنید (g_2) برقرار باشد.

$$H_0^1 = X_- \oplus X_0 \oplus X_+$$

$$X_0 = N_k$$

$X_- =$ زیرفضای تولید شده با توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه کوچکتر از λ_k

$X_+ =$ 〃 〃 〃 بزرگتر 〃 〃 〃

$\langle Lu, u\rangle \le -\alpha\|u\|^2$ روی X_- منفی است

$\ge \alpha\|u\|^2$ 〃 روی X_+ مثبت است.

〃 روی X_0 مساوی صفر است

اگر g_2 برقرار باشد

$$\varphi(u) \longrightarrow -\infty, \quad \|u\| \to +\infty, \quad u \in X_-$$

$$\varphi(u) \longrightarrow +\infty, \quad \|u\| \to +\infty, \quad u \in X_0 \oplus X_+$$

$$u \in X_-, \quad \varphi(u) \leq -\frac{\alpha}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega G(x,u)\,dx$$

$$\leq -\frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + M\int_\Omega |u|\,dx$$

$$\leq -\frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + C\|u\|$$

$$u \in X_0 \oplus X_+, \quad u = P_0 u + P_+ u, \quad P_+ : H_0^1 \xrightarrow[\text{عملگر تصویر}]{} X_+$$

$$\langle Lu, u\rangle = \langle L(P_+u), P_+u\rangle + \underbrace{\cancel{\langle L(P_0u), P_+u\rangle}}_{0} + \underbrace{\cancel{\langle L(P_+u), P_0u\rangle}}_{0}$$

$$\geq \alpha\|P_+u\|^2$$

$$\varphi(u) \geq \frac{\alpha}{2}\|P_+u\|^2 - \int_\Omega G(x,u)\,dx$$

$$= \frac{\alpha}{2}\|P_+u\|^2 - \int_\Omega G(x,u) - G(x,P_0u)\,dx - \int_\Omega G(x,P_0u)\,dx$$

$$\geq \frac{\alpha}{2}\|P_+u\|^2 - M\int_\Omega |\underbrace{u - P_0u}_{P_+u}|\,dx - \int_\Omega G(x,P_0u)\,dx$$

$$\geq \frac{\alpha}{2}\|P_+u\|^2 - C\|P_+u\| - \int_\Omega G(x,P_0u)\,dx$$

$$\|u\|^2 = \|P_0u\|^2 + \|P_+u\|^2 \longrightarrow \infty$$

نکته: φ روی W به طور ضعیف نیم‌پیوسته پایینی است از طرفی ثابت کردیم که روی W تراکمی است بنابراین $-\infty < \inf_W \varphi$ اتخاذ می‌شود. درنتیجه یک گوی به اندازه کافی بزرگ در $X_- = V_2$

وجود دارد که

$$\max_{\partial D} \varphi < \inf_W \varphi$$

تنها باید ثابت کنیم که φ در شرط (PS) صدق می‌کند.

$$|\varphi(u_n)| \leq C \quad , \quad \varphi'(u_n) \longrightarrow 0$$

$$\|h\| \geq \left|\langle \varphi'(u_n), h \rangle\right| = \left| \int \underbrace{\nabla u_n \cdot \nabla h - \lambda_k u_n h}_{\langle L u_n, h\rangle} - g(x,u_n) h \, dx \right|$$

برای n به اندازه کافی بزرگ

قرار دهید $h = P_+ u_n$

$$\|P_+ u_n\| \geq \left| \langle L P_+ u_n, P_+ u_n \rangle - \int g(x,u_n) P_+ u_n \, dx \right|$$

$$\geq \alpha \|P_+ u_n\|^2 - \tilde{M} \|P_+ u_n\|$$

$\Longrightarrow$ $\{P_+ u_n\}$ کران‌دار است.

$$-\|P_- u_n\| \le \langle \varphi'(u_n), P_- u_n \rangle \longleftarrow h = P_- u_n$$ اکنون قرار دهیم

$$= \langle L(P_- u_n), P_- u_n \rangle - \int g(x,u_n)\, P_- u_n \, dx$$

$$\le -\alpha \|P_- u_n\|^2 + M \|P_- u_n\|$$

$\Longrightarrow$ $\{P_- u_n\}$ کران دار است.

$u_n = P_- u_n + P_0 u_n + P_+ u_n \Longrightarrow$ $u_n - P_0 u_n$ کران دار است.

کران دار $\leftarrow$

$$\varphi(u_n) = \frac{1}{2}\langle L u_n, u_n \rangle - \int_\Omega G(x,u_n)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\langle L(u_n - P_0 u_n), u_n - P_0 u_n \rangle}_{\text{کران دار}} - \int_\Omega G(x,u_n) - G(x,P_0 u_n)\, dx - \int_\Omega G(x,P_0 u_n)\, dx$$

$$\ge C - M \|u_n - P_0 u_n\| - \int_\Omega G(x, P_0 u_n)\, dx$$

$\Longrightarrow$ $P_0 u_n$ کران دار است

$\Longrightarrow$ u_n کران دار است.

$$\Longrightarrow \quad u_n \longrightarrow u \ \text{ in } H_0^1 \Rightarrow u_n \xrightarrow{L^2} u$$

$$0 \longleftarrow \left| \langle \varphi'(u_n), u_n - u \rangle \right| = \left| \int \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) - \lambda_k u_n (u_n - u) - g(x, u_n)(u_n - u) \ldots \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - |\nabla u|^2 \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \quad \|u_n\| \longrightarrow \|u\|$$

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه نوزده - ۲۱/۹/۹۵

نقاط بحرانی تحت تقارن :

اگر φ زوج باشد، "تحت شرایطی" حداقل k جفت نقطه بحرانی دارد.

$$2^X \supseteq \mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2 \supseteq \mathcal{A}_3 \supseteq \cdots$$

که خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X

$$c_i = \inf_{A \in \mathcal{A}_i} \max_{u \in A} \varphi(u)$$

$$-\infty \le c_1 \le c_2 \le c_3 \le \cdots$$

c_j مقدار بحرانی است. $\Leftarrow$ $-\infty < c_j$

نظریه Lusternik-Schnirelman

X فضای باناخ، G یک گروه فشرده که روی X عمل می‌کند.

$$\forall g \in G, \quad T(g) : X \xrightarrow{\text{ایزومتری}} X$$

1) $T(g_1 + g_2) = T(g_1) \circ T(g_2)$

2) $T(0) = Id$

3) $(g, u) \longmapsto T(g)u$

یک تابع پیوسته $G \times X \longrightarrow X$ است.

تعاریف اولیه: - برای $u \in X$ مدار تولید شده توسط u را با

$$\mathcal{O}(u) = \{ T(g)u \ : \ g \in G \}$$

- $A \subseteq X$ را ناوردا گوییم هرگاه همه مدارهای تولید شده توسط اعضای A در A باقی باشند.

یا به عبارتی $T(g) A = A$ برای هر $g \in G$.

- تابعک $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را ناوردا گوییم هرگاه

$$\varphi(T(g)u) = \varphi(u) \quad \forall g \in G \,,\ u \in X$$

- اگر $A_1, A_2 \subseteq X$ ناوردا نگاشت $R : A_1 \longrightarrow A_2$ را هم‌وردا (equivariant) گوییم هرگاه

$$R \circ T(g) = T(g) \circ R$$

تعریف: یک G-اندیس روی فضای X نگاشت $ind : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0, +\infty\}$ که دارای خواص زیر باشد:

$$\mathcal{A} = \{ A \subseteq X \ : \ A \text{ بسته و ناوردا است} \}$$

1) $ind(A) = 0 \iff A = \emptyset$

2) $R : A_1 \xrightarrow{\text{هم‌وردا}} A_2 \implies ind(A_1) \leq ind(A_2)$

3) $ind(A_1 \cup A_2) \leq ind(A_1) + ind(A_2)$

4) اگر $A \in \mathcal{A}$ فشرده باشد، یک همسایگی از A مانند N وجود داشته باشد که

$$ind(A) = ind(N)$$

مثال - $G=\mathbb{Z}_2$ ، $T(0)=Id$ ، $T(1)=-Id$

$\varphi: X \longrightarrow \mathbb{R}$ ناوردا است وقتی $\varphi(-u)=\varphi(u)$. یعنی φ زوج باشد .

$A\subseteq X$ ناوردا است هرگاه $A=A-$ یا به عبارتی نسبت به مبدأ متقارن باشد .

__گزاره:__ اگر $\mathcal{A}$ شامل همه زیرمجموعه بسته و متقارن X باشد ، $\gamma(A)=K$ برای هر $A\in\mathcal{A}$ هرگاه K کوچکترین عدد صحیح باشد که یک نگاشت پیوسته و فرد $\Phi: A \longrightarrow \mathbb{R}^K-\{0\}$ وجود داشته باشد . اگر چنین K ای وجود نداشت ، $\gamma(A)=\infty$ قرار دهید.

در این صورت γ یک $\mathbb{Z}_2$- اندیس است .

اثبات (1) $\gamma(A)=0 \Longleftrightarrow A=\phi$ از تعریف واضح است .

(2) اگر $R: A_1 \longrightarrow A_2$ هم وردا باشد آنگاه $R(-u)=-R(u)$. اگر $ind(A_2)=\infty$ که چیزی برای اثبات نداریم.

اگر $ind(A_2)=K<\infty$ آنگاه نگاشت $\Phi: A_2 \to \mathbb{R}^K-\{0\}$ پیوسته و فرد وجود دارد در این صورت

$\Phi\circ R: A_1 \longrightarrow \mathbb{R}^K-\{0\}$ پیوسته و فرد است پس $ind(A_1)\le K$.

۳) $\gamma(A_1 \cup A_2) \leq \gamma(A_1) + \gamma(A_2)$ فرض کنید $\gamma(A_1) = k_1 < \infty$ و $\gamma(A_2) = k_2 < \infty$ پس $\Phi_1 : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{k_1} - \{0\}$ و

$\Phi_2 : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{k_2} - \{0\}$ نگاشت‌های پیوسته وجود دارند. چون A_i بسته هستند می‌توان Φ_i را به صورت پیوسته

X توسیع داد. $\tilde{\Phi}_i : X \to \mathbb{R}^{k_i} - \{0\}$ قرار دهید $\Psi_i(u) = \dfrac{\tilde{\Phi}_i(u) - \tilde{\Phi}_i(-u)}{2}$ و

$\Psi : A_1 \cup A_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{k_1 + k_2} - \{0\}$ تعریف کنید

$$\Psi(u) = (\Psi_1(u), \Psi_2(u))$$

۴) A فشرده است و $\gamma(A) = k < \infty$ و $\Phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^k - \{0\}$. بنابراین نگاشت فرد پیوسته $\Psi : X \to \mathbb{R}^k$

وجود دارد که توسیع Φ است. چون $0 \notin \Psi(A)$ و A فشرده پس همسایگی A مثل N وجود دارد که

$0 \notin \Psi(N)$ در نتیجه $\Psi : N \to \mathbb{R}^k - \{0\}$ پیوسته و فرد است و

$\gamma(N) \leq k$ از طرفی $A \subseteq N$ و $\gamma(A) \leq \gamma(N)$.

پس $\gamma(N) = \gamma(A) = k$.

گزاره: (۱) اگر $C\subseteq X$ بسته باشد و $C\cap(-C)=\emptyset$ آنگاه $\gamma(C\cup(-C))=1$.

(۲) اگر $A\in\mathcal{A}$ که $0\notin A$ و $\gamma(A)\geq 2$ آنگاه A شامل بینهایت نقطه است.

(۳) اگر $A\in\mathcal{A}$ و $h:A\longrightarrow S^{k-1}$ یک همانریختی فرد باشد آنگاه $\gamma(A)=k$.

اثبات: ① $\Phi: C\cup(-C)\to\mathbb{R}-\{0\}$ تعریف کنید که $\Phi|_{C}\equiv 1$ و $\Phi|_{-C}\equiv -1$.

② اگر A شامل متناهی نقطه باشد، به راحتی می‌توان به صورت $A=C\cup(-C)$ نوشت که $C\cap(-C)=\emptyset$ و بنا بر قسمت ①، $\gamma(A)=1$.

③ $A\xrightarrow{h}S^{k-1}\hookrightarrow\mathbb{R}^{k}-\{0\}$ در نتیجه $\gamma(A)\leq K$. اگر $\gamma(A)=m<K$ آنگاه

$\Phi: A\longrightarrow\mathbb{R}^{m}-\{0\}$ پیوسته و فرد وجود دارد در این صورت

$$S^{k-1}\xrightarrow{h^{-1}}A\xrightarrow{\Phi}\mathbb{R}^{m}-\{0\}\longrightarrow S^{m-1}$$

تناقض دارد با قضیه بورساک.

X باناخ، G گروه فشرده روی X و $\mathcal{A}$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های بسته و ناوردای X.

$ind : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}\cup\{0,+\infty\}$ یک G-اندیس باشد.

$$\mathcal{A}_i = \{ A\in\mathcal{A} : A \text{ فشرده} ,\ ind(A)\geq i \}$$

$$\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2 \supseteq \mathcal{A}_3 \supseteq \cdots$$

اگر $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت ناوردا باشد

$$c_i = \inf_{A\in\mathcal{A}_i} \max_{u\in A} \varphi(u)$$

$$-\infty \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots$$

قضیه ① فرض کنید $\varphi\in C^1(X;\mathbb{R})$ ناوردا که در شرط (PS) صدق می‌کند.

اگر $c_j > -\infty$ برای $j\geq 1$ آنگاه c_j یک مقدار بحرانی است. به علاوه اگر

برای $c_k = c_j = c > -\infty$ ، $k \geq j$ آنگاه $ind(K_c) \geq k-j+1$

$$K_c = \{ u\in X : \varphi(u)=c ,\ \varphi'(u)=0 \}$$

قضیه ۲ (قضیهٔ دگردیسی هم‌وردا) $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ یک نگاشت هم‌وردا باشد که در (PS) صدق می‌کند. اگر U یک همسایگی باز ناوردا از K_c باشد، آنگاه برای هر ε به اندازهٔ کافی کوچک نگاشت دگردیسی $\eta \in C([0,1]\times X; X)$ وجود دارد که

1) $\eta(0,u) = u$

2) $\eta(t,u) = u$ if $u \notin \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]$

3) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \setminus U) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$

4) $\eta(t,\cdot) : X \longrightarrow X$ یک همسانریختی هم‌وردا باشد.

اثبات قضیه ۱ : چون φ هم‌وردا است پس K_c یک مجموعه ناوردا است. از طرفی K_c فشرده است به علت شرط (PS).

بنابر خواص G-اندیس همسایگی N از K_c وجود دارد که $ind(N)=ind(K_c)$. $U:=int(N)$ در قضیه دگردیسی را استفاده می‌کنیم. بنابر تعریف $c=c_k$ مجموعه ناوردای $A\in\mathcal{A}_k$ وجود دارد که

$$ind(A)\geq k \quad \text{و} \quad \max_{u\in A}\varphi(u)\leq c+\varepsilon$$

$B=A\setminus U$ یک مجموعه ناوردا و بسته است.

$$k\leq ind(A)\leq ind(B\cup N)\leq ind(B)+ind(N)$$

کافی است نشان دهیم $ind(B)\leq j-1$. اگر $C:=\eta(1,B)$ آنگاه بنابر خواص G-اندیس $ind(C)\geq ind(B)$. (دقت کنید $\eta(t,\cdot)$ به ازای هر t هم‌وردا است.)

از طرفی بنابر قضیه ۲

$$\max_{u\in C}\varphi(u)\leq c-\varepsilon$$

اگر $C\in\mathcal{A}_i$ آنگاه $c_i\leq c-\varepsilon$ پس $i<j$ و $C\notin\mathcal{A}_j$

یعنی $ind(C)\leq j-1$.

قضیه ۳ فرض کنید $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ تابعک زوج باشد که در (PS) صدق می‌کند. به‌علاوه

(۱) φ از پایین کران‌دار است

(۲) مجموعه فشرده و متقارن K وجود دارد که $\gamma(K)=k$ و $\max\limits_{K} \varphi < \varphi(0)$.

آنگاه φ حداقل k جفت نقطه بحرانی دارد که مقادیر آن‌ها کمتر از $\varphi(0)$ است.

اثبات - $\mathcal{A}_j = \{A \mid \gamma(A)\ge j$ ، فشرده و متقارن $A\}$

$$c_j = \inf_{A\in\mathcal{A}_j} \max_{u\in A}\varphi(u)$$

$$-\infty \le c_1 \le c_2 \le c_3 \le \cdots$$

بنابر خاصیت (۱) همه مقادیر $-\infty < c_j$ و در نتیجه مقادیر بحرانی هستند. از طرفی بنابر (۲)
$c_k<\varphi(0)$. اگر $c_1<c_2<\cdots<c_k<\varphi(0)$ آنگاه یک جفت نقطه بحرانی متناظر
c_i وجود دارد. اگر $c_i=\cdots=c_j=c$ که $i<j\le k$ آنگاه بنابر قضیه ۱
$\operatorname{ind}(K_c)\ge j-i+1\ge 2$ و در نهایت نقطه بحرانی داریم.

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه بیستم ۹۵,۹,۲۳

قضیه ۲) قضیه دگردیسی هم‌وردا) $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ یک نگاشت هم‌وردا باشد که در (PS) صدق می‌کند. اگر U یک همسایگی باز ناوردا از K_c باشد، آنگاه برای هر ε به اندازه کافی کوچک نگاشت دگردیسی $\eta \in C([0,1]\times X; X)$ وجود دارد که

1) $\eta(0,u) = u$

2) $\eta(t,u) = u$ if $u \notin \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]$

3) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \setminus U) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$

4) $\eta(t,\cdot) : X \longrightarrow X$

یک همسانریختی هم‌وردا باشد.

لم: فرض کنید $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ ناوردا باشد در این صورت شبه‌گرادیانی وجود دارد که

$v: Y \longrightarrow X$ موضعاً لیپ‌شیتز

$$Y = \{u \in X : \varphi'(u) \neq 0\}$$

1) $\|v(u)\| \leq 2\|\varphi'(u)\|$

2) $\varphi'(u) . v(u) \geq \|\varphi'(u)\|^2$

3) v هم ناوردا است.

اثبات: فرض کنید ω شبه‌گرادیانی است که برای φ وجود دارد (نه لزوماً هم‌وردا)

$$v(u) = \int_G T(-g)\,\omega(T(g)u)\,dg \qquad \forall u \in Y$$

$$\|v(u)\| \leq \int_G \|\omega(T(g)u)\|\,dg \leq 2\int_G \|\varphi'(T(g)u)\|\,dg$$

$$\varphi(T(g)u) = \varphi(u) \Longrightarrow \qquad = 2\int_G \|\varphi'(u)\|\,dg = 2\|\varphi'(u)\|$$

$$\varphi'(u)\cdot v(u) = \int_G \underbrace{\varphi'(u)\, T(-g)}_{\varphi'(T(g)u)}\, \omega(T(g)u)\, dg \geq \int_G \underbrace{\|\varphi'(T(g)u)\|^2}_{\|\varphi'(u)\|^2}\, dg$$

$$\varphi(T(g)u) = \varphi(u) \Rightarrow \varphi'(T(g)u)\circ T(g) = \varphi'(u) \Rightarrow \varphi'(T(g)u) = \varphi'(u)\circ T(-g)$$

$$v(T(\hat{g})u) = \int_G T(-g)\,\omega(T(g)\,T(\hat{g})u)\, dg$$

$$= \int_G T(-g)\,\omega(T(g+\hat{g})u)\, dg$$

$$= T(\hat{g}) \int_G T(-g-\hat{g})\,\omega(T(g+\hat{g})u)\, dg$$

$$= T(\hat{g})\, v(u)$$

اثبات قضیه دگردیسی: مشابه اثبات قضیه دگردیسی در حالت عادی، تنها باید میدان

$$f(u) = -\rho(u)\,\frac{v(u)}{\|v(u)\|}$$

هم وردا باشد. برای این منظور باید تابع ρ که به صورت زیر تعریف شده هم وردا باشد.

$\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ موضعاً لیپشیتز وجود دارد که

$$\begin{cases} \rho = 1 & \text{in } B \\ \rho = 0 & \text{in } X \setminus A \end{cases}$$

$$S = X - U$$

$$A = \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \cap S_{2\delta}$$

$$B = \varphi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \cap S_{\delta}$$

U ناوردا است پس S ناوردا است از طرفی تبدیل‌های $T(g)$ ایزومتری هستند

پس S_δ و $S_{2\delta}$ هم ناوردا هستند در نتیجه A و B که در بالا تعریف شده اند

ناوردا هستند. (ρ را مشابه اثبات لم قبل می‌توان هم وردا کرد.)

قضیه ۳) فرض کنید $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ تگاشت زوج باشد که در (PS) صدق می‌کند. به علاوه

(۱) φ از پایین کران دار است

(۲) مجموعه فشرده و متقارن K وجود دارد که $\gamma(K)=k$ و $\max\limits_{K} \varphi < \varphi(0)$.

آنگاه φ حداقل k جفت نقطه بحرانی دارد که مقادیر آن نقاط کمتر از $\varphi(0)$ است.

مثال- مسأله $\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$ که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ بی‌نهایت جواب دارد.

$$\varphi(u) = \int_\Omega \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 - \tfrac{1}{4}u^4 \, dx \quad , \quad \varphi \in C^1(H_0^1;\mathbb{R})$$

$$\psi(u) = \left(\int |\nabla u|^2 dx\right)^3 - \int_\Omega u^4 = \|u\|^6 - \|u\|_{L^4}^4$$

اگر $\Psi'(u)=0$ آنگاه $\varphi'(\alpha u)=0$ که

$$\langle \Psi'(u), h \rangle = 6\|u\|^4 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h - 4\int_\Omega u^3 h = 0$$

$$\langle \varphi'(\alpha u), h \rangle = \alpha \int \nabla u \cdot \nabla h - \alpha^3 u^3 h$$

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{4}{6\|u\|^4}}$$

- Ψ از پایین کران دار است

فشرده. $H_0^1 \subset L^4 \qquad 4 < 2^* = 5 \quad (n=3)$

$$\|u\|_{L^4} \leq C\|u\|$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(u) \geq \|u\|^6 - C\|u\|^4 = \|u\|^4 \left(\|u\|^2 - C\right)$$

- ψ در (PS) صدق می‌کند: $\psi'(u_n) \to 0$ ، $\psi(u_n)$ کران‌دار

$$|\langle \psi'(u_n), u_n \rangle| = \left|6\|u_n\|^6 - 4\|u_n\|_{L^4}^4\right| \le \|u_n\|$$

$$\psi(u_n) = \|u_n\|^6 - \|u_n\|_{L^4}^4$$

$$\left|\langle \psi'(u_n), u_n \rangle - 4\psi(u_n)\right| = 2\|u_n\|^6 \le \|u_n\| + C$$

در نتیجه $\{u_n\}$ کران‌دار است و فرض کنید $u_n \rightharpoonup u$ $\Rightarrow$ $u_n \xrightarrow{L^4} u$

$$0 \leftarrow \langle \psi'(u_n), u_n - u \rangle = 6\|u_n\|^4 \int \nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) - 4\int u_n^3 (u_n - u)$$

$$\Rightarrow \int \nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) \to 0 \Rightarrow \|u_n\| \to \|u\|$$

فرض کنید $\{w_n\}$ دنباله توابع ویژه عملگر لاپلاسین با شرط مرزی دیریکله باشد و

$X_k = \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$ در این فضا A را کره به شعاع r در نظر بگیرید

یک مجموعه بسته و متقارن است که $\operatorname{ind}(A)=k$. r را به اندازه کافی کوچک می‌گیریم که

$$\max_{u \in A} \psi(u) < 0$$

$$\psi(u) = \|u\|^6 - \|u\|_{L^4}^4$$

از آنجایی روی فضای متناهی البعد X_k دو نرم H_0^1 و L^4 هم‌ارز هستند پس

$$\alpha \|u\| \leq \|u\|_{L^4} \leq \beta \|u\|$$

$$\Rightarrow \quad \psi(u) \leq \|u\|^6 - \alpha^4 \|u\|^4$$

$$= \|u\|^4 \left(\|u\|^2 - \alpha^4 \right) < 0$$

کافی است $r < \alpha^2$ باشد.

روشهای تفکیکی در آنالیز

جلسه بیست و نهم ۹۵/۹/۲۸

گروه تقارنی S^1

$\{T(\theta) : \theta \in S^1\}$ خانواده‌ای از ایزومورفیسم‌ها روی فضای X.

مثال: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ و $X = L^2(\Omega)$، $R(\theta)$ دوران با زاویه θ

$$(T(\theta)u)(x) = u(R(\theta)x)$$

$$Fix(S^1) = \{u \in X : T(\theta)u = u \quad \forall \theta \in S^1\}$$

در مثال بالا $Fix(S^1)$ شامل توابع شعاعی است یعنی $u(x) = u(|x|)$.

گزاره: A مجموعه بسته و ناوردا، $ind(A)=k$ تعریف می‌کنیم اگر k کوچکترین عدد صحیح باشد که نگاشت پیوسته $\Phi : A \longrightarrow \mathbb{C}^k - \{0\}$ به همراه عدد صحیح n وجود داشته باشد که

$$\Phi(T(\theta)u) = e^{in\theta}\,\Phi(u) \quad \forall \theta \in S^1$$

در صورتی که چنین k ای وجود نداشته باشد، $ind(A) = \infty$ قرار می‌دهیم همچنین $ind(\emptyset) = 0$

تعریف فوق یک S^1ـ اندیس است.

اثبات - خاصیت ① بدیهی است.

خاصیت ②: $R: A_1 \longrightarrow A_2$ هم‌وردا است و $\Phi : A_2 \longrightarrow \mathbb{C}^k - \{0\}$ که $\Phi(T(\theta)u) = e^{in\theta}\Phi(u)$ به ازای هر $u \in A_2$.

در این صورت $\Phi \circ R : A_1 \longrightarrow \mathbb{C}^k - \{0\}$ و به ازای هر $v \in A_1$ داریم:

$$\Phi(\underbrace{T(\theta)R}_{=R\circ T(\theta)} v) = e^{in\theta}\,\Phi(Rv)$$

در نتیجه $\operatorname{ind}(A_1) \le k$.

خاصیت ③ $\operatorname{ind}(A_1 \cup A_2) \le \operatorname{ind}(A_1) + \operatorname{ind}(A_2)$.

$$\Phi_j(T(\theta)u) = e^{in_j\theta}\,\Phi_j(u), \quad \Phi_j : A_j \longrightarrow \mathbb{C}^{k_j} - \{0\}$$

ابتدا نگاشت‌های Φ_j را به کل X توسیع پیوسته می‌دهیم:

$$\hat{\Phi}_j : X \longrightarrow \mathbb{C}^{k_j} \Rightarrow$$

$$\psi_j(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in_j\theta}\,\hat{\Phi}_j(T(\theta)u)\,d\theta$$

$$\Psi = (\psi_1^{n_2}, \psi_2^{n_1}) : A_1 \cup A_2 \longrightarrow \mathbb{C}^{k_1+k_2} - \{0\}$$

$$\Psi(T(\theta)u) = \left(\left(\psi_1(T(\theta)u)\right)^{n_2}, \left(\psi_2(T(\theta)u)\right)^{n_1} \right)$$

$$= \left(\left(e^{in_1\theta}\psi_1(u)\right)^{n_2}, \left(e^{in_2\theta}\psi_2(u)\right)^{n_1} \right)$$

$$= e^{in_1n_2\theta} \left(\left(\psi_1(u)\right)^{n_2}, \left(\psi_2(u)\right)^{n_1} \right) = e^{in_1n_2\theta}\,\Psi(u)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{ind}(A_1 \cup A_2) \le \mathrm{ind}(A_1) + \mathrm{ind}(A_2)$$

خاصیت (۴) A مجموعه فشرده و ناوردا باشد که $\mathrm{ind}(A)=k$ و $\Phi: A \to \mathbb{C}^k-\{0\}$ شبیه به قسمت قبل در نتیجه برسیم

$\psi: X \to \mathbb{C}^k$ وجود دارد که در رابطه $\psi(T(\theta)u)=e^{in\theta}\psi(u)$ صدق می‌کند.

از طرفی $0 \notin \psi(A)$ و A فشرده است پس همسایگی $A \subseteq N$ وجود دارد که

$0 \notin \psi(N)$ بنابراین $\psi: N \to \mathbb{C}^k-\{0\}$ تعریف می‌گردد. در نتیجه

$$\mathrm{ind}(N) \le k$$

و چون $A \subseteq N \Longleftarrow k = \mathrm{ind}(A) \le \mathrm{ind}(N)$.

$$Fix(S^1) = \{u : T(\theta)u = u\}$$

$u \in Fix(S^1) \Leftarrow ind(\{u\}) = \infty$ زیرا نگاشتی که در رابطه زیر صدق کند وجود ندارد

$$\Phi(\underbrace{T(\theta)u}_{=u}) = e^{in\theta}\Phi(u)$$

اگر $u \notin Fix$ ، $\{T(\theta)u\}_{0\le\theta\le 2\pi} := O(u)$ یک مدار بسته در X است. کوچکترین n صحیح را بگیرید که

$$T\left(\frac{2\pi}{n}\right)u = u$$

اکنون $\Phi : O(u) \longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$ را تعریف کنید

$$\Phi(T(\theta)u) = e^{in\theta}$$

به ازای $v \in O(u)$ داریم $T(\hat{\theta})u = v \Leftarrow$

$$\Phi(T(\theta)v) = \Phi(T(\theta+\hat{\theta})u) = e^{in(\theta+\hat{\theta})} = e^{in\theta}\cdot e^{in\hat{\theta}}$$

$$= e^{in\theta}\,\Phi(T(\hat{\theta})u) = e^{in\theta}\Phi(v)$$

گزاره: اگر $u \notin Fix$ آنگاه $ind(O(u)) = 1$.

نکته: هر مجموعه ناوردای A تشکیل شده از یکسری نقاط ثابت $Fix(S^1)$ و تعدادی (که ممکن است بی‌نهایت باشد) مدار بسته .

اگر $A = O(u_1) \cup \dots \cup O(u_k)$ که $u_i \notin Fix$ آنگاه به کمک اثبات گزاره فوق می‌توان دید که $ind(A) = 1$.

نتیجه: اگر A مجموعه ناوردایی باشد که $A \cap Fix = \phi$ و $2 \le ind(A)$ آنگاه A شامل بی‌نهایت مدار مجزا است .

نکته: اگر $Y \subset X$ زیرفضای بسته و ناوردا باشد که یک مولفه مکمل دارد $(Y^{\perp} \oplus Y = X)$ می‌توان این مولفه را ناوردا فرض کرد

زیرا اگر $P: X \to Y$ نگاشت تصویری باشد تعریف کنید

$$Qu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(-\theta)(I-P)T(\theta)u \, d\theta$$

اگر $Z = Q(X)$ آنگاه Z یک مکمل Y است . $Z \oplus Y = X$.

تذکر: $Z \cap Fix = \{0\}$ ؟

نکته: اگر $Y \subset X$ زیرفضای ناوردای با بعد متناهی باشد که $Y \cap Fix = \{0\}$ آنگاه $\dim Y = 2n$ (زوج است)

و ایزومورفیسم $J : Y \longrightarrow \mathbb{C}^n$ وجود دارد که

$$T(\theta) = J^{-1} \circ \hat{T}(\theta) \circ J$$

$$\hat{T}(\theta)\zeta = (e^{ik_1\theta}\zeta_1 , e^{ik_2\theta}\zeta_2 , \dots , e^{ik_n\theta}\zeta_n)$$

قضیه (۱) فرض کنید $Y \subset X$ زیرفضای ناوردای با نقص بعد متناهی باشد و $A \subset X$ زیرمجموعه بسته و ناوردا که $A \cap Y = \phi$.

آنگاه $\operatorname{codim} Y$ زوج است و $\operatorname{ind}(A) \leq \frac{1}{2} \operatorname{codim} Y$

(۲) اگر $Z \subset X$ زیرفضای ناوردا با بعد متناهی باشد و $D \subset Z$ یک همسایگی باز مبدأ که ناوردا است. اگر

$Z \cap Fix(S^1) = \{0\}$ آنگاه $\dim Z$ زوج است و

$$\operatorname{ind}(\partial D) = \frac{1}{2} \dim Z$$

اثبات - با توجه به نکات قبل Y یک مؤلفه مکمل ناوردا مانند $Y^{\perp}$ دارد که $\dim Y^{\perp} = 2n$ و ایزومورفیسم

$$J : Y^{\perp} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

با ضابطه مشخص شده وجود دارد.

$$\hat{\Phi} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$\hat{\Phi}(\zeta) = \left(\zeta_1^{n/k_1}, \zeta_2^{n/k_2}, \dots, \zeta_n^{n/k_n}\right)$$

$A \cap Y = \emptyset$ $Q : A \longrightarrow Y^{\perp} - \{0\}$ هم‌وردا است.

$$\Rightarrow \operatorname{ind}(A) \leq \operatorname{ind}(Y^{\perp} - \{0\}) \underset{?}{\leq} n$$

$$\hat{\Phi} \circ J : Y^{\perp} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$$

$$\hat{\Phi} \circ J(T(\theta)u) = e^{in\theta}\, \hat{\Phi} \circ J(u)$$

قضیه: $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$ تابع ناوردا که در شرط (PS). فرض کنید $Y, Z \subseteq X$ زیرفضاهای بسته و ناوردا باشند که

$$\mathrm{Codim}\, Y < \dim Z$$

(1) $\inf_{Y} \varphi = a > -\infty$

(2) $\sup_{\partial D_r} \varphi = b < +\infty$ برای مقدار $r > 0$ که D_r گوی به شعاع r در Z است.

(3) $\varphi(u) > b$ برای هر $u \in Fix$ که $\varphi'(u) = 0$.

(4) $Fix \subset Y$, $Z \cap Fix = \{0\}$.

آنگاه حداقل $m = \frac{1}{2}(\dim Z - \mathrm{Codim}\, Y)$ مدار مجزا از نقاط بحرانی φ وجود دارد
با مقدار در بازه $[a,b]$.

اثبات. $p=\frac{1}{2}\operatorname{codim} Y$ بنابر قضیه قبل اگر A مجموعه بسته ناوردا باشد که $\operatorname{ind}(A)>p$ آنگاه

$A\cap Y\neq\emptyset$ در نتیجه برای $j\geq p+1$ ،

$$\text{مقدار بحرانی} \longleftarrow c_j=\inf_{A\in\mathcal{A}_j}\sup_{A}\varphi \geq \inf_{Y}\varphi = a > -\infty$$

از طرفی بنابر قضیه قبل اگر $q=\frac{1}{2}\dim Z$ آنگاه، $\operatorname{ind}(\partial D_r)=q$ اگر $j\leq q$ آنگاه، $c_j<+\infty$.

$$\partial D_r\in\mathcal{A}_j \Rightarrow \inf_{A\in\mathcal{A}_j}\sup_{A}\varphi \leq \sup_{\partial D_r}\varphi = b < +\infty$$

جمع بندی: تمام مقادیر $c_{p+1}\leq c_{p+2}\leq\dots\leq c_q$ بحرانی هستند.

اگر همه این مقادیر متمایز باشند $q-p$ مقدار بحرانی داریم و متناظر هر یک حداقل یکی از نقاط بحرانی. اگر بعضی از این مقادیر برابر باشند یک مجموعه با شاخص حداقل ۲ داریم و...

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه بیست و دو　　۹۵/۹/۳۰

عدم فشردگی

$u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ $\qquad -\Delta u + u = h(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H(u)\,dx$$

φ در شرط (PS) صدق نمی‌کند. $\leftarrow$ $u_n(x) = u(x+z_n)$, $\varphi(u_n) = \varphi(u)$

خمینه Nehari $\leftarrow$ $M = \{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \langle \varphi'(u), u \rangle = 0 \}$

$$\psi(u) = \langle \varphi'(u), u \rangle = \int |\nabla u|^2 + u^2 - \int h(u) u$$

$$= \|u\|^2 - \int h(u) u \, dx$$

$$(h_1) \quad h \in C^1(\mathbb{R}),\ h(0)=0,\ \lim_{|s|\to 0} \frac{|h'(s)|}{s^\delta} < +\infty \quad \text{for some } \delta>0$$

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{|h'(s)|}{|s|^{p-2}} < +\infty \quad \text{for some } 2<p<2^*$$

$$(h_2) \quad H(s),\ sh(s)-H(s) \text{ are strictly convex and}$$

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{H(s)}{s^2} = +\infty$$

گزاره ۱ با فرض (h_1) اگر $\lim\limits_{|s|\to\infty} \frac{h(s)}{s} = +\infty$ و $sh(s) - 2H(s)$ اکیداً محدب باشد آنگاه

(i) $M \neq \phi$ و یک خمینهٔ C^1 در $H^1(\mathbb{R}^N)$ است با نقص بعد یک و $0 \notin \bar{M}$.

(ii) $u \neq 0$ نقطه بحرانی φ است اگر و تنها اگر u نقطه بحرانی $\varphi|_M$ باشد.

گزاره ۲ با فرضیات **گزاره ۱** اگر $C_* = \inf\limits_{M} \varphi$ آنگاه $C_* > 0$ و

$$C_* = \inf\{\varphi(u) \; : \; u \neq 0 \text{ جواب است } \}$$

گزاره ۳ با فرض (h_1) و (h_2) هر دنباله مینیمم ساز (u_n) برای C_* کران دار است.

گزاره ۴ با فرض (h_1) و (h_2) برای هر دنباله مینیمم ساز (u_n) برای C_*، دنباله مینیمم ساز (v_n) وجود دارد که $\nabla\varphi(v_n) \to 0$.

اثبات گزاره ۱

$$\psi(u) = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(u)u \, dx$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H(u)\, dx$$

$$\left| \int h(u)u \right| \leq \int A|u|^{2+\delta} + B|u|^p$$

$$2 < p < 2^*$$

$$H^1 \hookrightarrow L^{2^*}$$

$$\leq \tilde{A}\|u\|^{2+\delta}_{L^{2+\delta}} + \tilde{B}\|u\|^p_{L^p}$$

$$\leq \varepsilon\|u\|^2_{L^2} + C_\varepsilon \|u\|^p_{L^p}$$

$\psi : H^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ خوش‌تعریف و C^1 است.

$$\psi(tu) = t^2\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} h(tu)(tu)\, dx$$

$$\geq t^2\|u\|^2 - \varepsilon t^2\|u\|^2_{L^2} - t^p C_\varepsilon \|u\|^p_{L^p}$$

$> 0 \longrightarrow$ برای $0<t$ به اندازه کافی کوچک

برای $t \to \infty$.

$$\Psi(tu) = t^2\|u\|^2 - \int h(tu)(tu)\,dx$$

$$\le t^2\|u\|^2 - \int_{|tu|\ge K} M t^2 u^2 - \int_{|tu|\le K} \cdots$$

$$\approx t^2\underbrace{\left[\|u\|_{H^1}^2 - M\|u\|_{L^2}^2\right]}_{<0} + o(1)$$

$\frac{h(s)}{s} \to \infty$ as $|s| \to \infty$

$|sh(s)| \ge Ms^2$ for $|s| \ge K$

در نتیجه $\Psi(tu) \to -\infty$ وقتی $t \to \infty$. و بنابراین $\Psi(\bar t u) = 0$ برای لااقل یک $\bar t > 0$، و این نتیجه می‌دهد که $M \neq \emptyset$.

برای اینکه نشان دهیم M خمینه C^1 با هم‌بعد یک است کافی است $\Psi'(u) \neq 0$ به ازای هر $u \in M$.

$$u \in M \Rightarrow \|u\|^2 = \int h(u)u$$

$$\Psi'(u) = 0 \Rightarrow 2\langle u, v\rangle_{H^1} = \int h'(u)uv + h(u)v \quad \forall v \in H^1$$

$$v = u \Rightarrow 2\|u\|^2 = \int h'(u)u^2 + h(u)u$$

$$\Rightarrow \int h(u)u = \int h'(u)u^2 \quad (1)$$

$sh(s)-2H(s)$ اکیداً محدب است $\Rightarrow$ $sh'(s)-h(s)$ اکیداً صعودی $\Rightarrow \begin{cases} sh'(s)-h(s)>0 & \text{for } s>0 \\ sh'(s)-h(s)<0 & \text{for } s<0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \qquad s^2h'(s) > sh(s) \qquad \text{for } s\neq 0$$

درنتیجه رابطه (1) نمی‌تواند برقرار باشد.

$$u\in M \Rightarrow \quad \|u\|^2 = \int h(u)u \leq \varepsilon \|u\|^2_{L^2} + C\|u\|^p_{L^p} \qquad \underline{0\notin \overline{M}}$$
$$\leq \varepsilon \|u\|^2 + C\|u\|^p$$

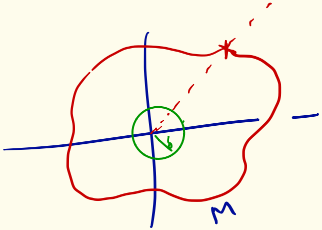
$$\Rightarrow \quad \frac{1-\varepsilon}{C} \leq \|u\|^{p-2}$$

(ii) u نقطه بحرانی $\varphi|_M$. $\Longleftarrow$ $\nabla\varphi(u) = \lambda \nabla\psi(u)$

$$\Rightarrow \langle u, v\rangle - \int h(u) v = 2\lambda \langle u, v\rangle - \lambda \int h'(u) u v + h(u) v$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow (2\lambda - 1)\|u\|^2 = \lambda \int h'(u) u^2 + (\lambda - 1)\int h(u) u \\ &u \in M \Rightarrow \|u\|^2 = \int h(u) u \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \int h(u) u = \lambda \int h'(u) u^2 \\ &h'(u) u^2 > h(u) u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = 0$$



اثبات گزاره ۲

$$\int H(u) \leq \varepsilon \|u\|^2 + C\|u\|^p$$

$$\varphi(u) = \tfrac{1}{2}\|u\|^2 - \int H(u) \geq \left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon\right)\|u\|^2 - C\|u\|^p$$

$$\geq a > 0 \quad \text{for } \|u\| = \delta$$

$0 \neq u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ دلخواه در نظر بگیرید،

بنابر گزاره (۱) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \varphi(tu) = -\infty$

در نتیجه $0 < \bar{t}$ وجود دارد که $\varphi(\bar{t}u)$ ماکسیمم φ روی خط $\langle tu \rangle$ است. $(\varphi(0)=0)$

$$\frac{d}{dt}\varphi(tu)\Big|_{t=\bar{t}} = \langle \varphi'(\bar{t}u), u \rangle = 0 \Rightarrow \Psi(\bar{t}u) = 0 \Rightarrow \bar{t}u \in M$$

$$M = \{ \underbrace{\bar{t}(u)}_{\text{تابعی از } u}\, u : \|u\| = 1 \}$$

$$a \leq \varphi|_M$$

$$\Gamma = \left\{ \gamma : [0,1] \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \;:\; \gamma(0) = 0 \,,\; \varphi(\gamma(1)) < 0 \right\}$$

$$c_{MP} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{0 \le t \le 1} \varphi(\gamma(t)) \le \inf_{\|u\|=1} \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(tu)$$

$$= \inf \varphi(\bar{t} u) = c_*$$

روشهای تغییراتی در آنالیز

جلسه بیست و سه ۹۵/۱۰/۵

قضیه: با شرایط (h_1) و (h_2)، $C_* = \inf_M \varphi$ اتخاذ می‌شود. در واقع مسأله

$$-\Delta u + u = h(u) \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

دارای جواب غیربدیهی است.

اثبات: بنابر گزاره ۳ و ۴ دنباله کران‌دار u_n در $H^1(\mathbb{R}^N)$ وجود دارد که $\varphi(u_n) \longrightarrow C_*$ ، $\nabla\varphi(u_n) \longrightarrow 0$

$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int H(u)$

$\psi(u) = \|u\|^2 - \int h(u)u$

از طرفی می‌توان فرض کرد

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{in } H^1(\mathbb{R}^N) \\ u_n \longrightarrow u & \text{in } L^q_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad 2 \le q < 2^* \\ u_n \longrightarrow u & \text{a.e. in } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$\langle \varphi'(u_n), w \rangle = \langle u_n, w \rangle - \int h(u_n) w \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle u, w \rangle - \int h(u) w \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\varphi(u) = 0$$

چرا $u \neq 0$ ؟

$u_n \in M \Rightarrow \langle \varphi'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|^2 - \int h(u_n) u_n = 0$

اگر $u \equiv 0$ آنگاه $\|u_n\|^2 = \int h(u_n)u_n \longrightarrow 0$ در حالیکه $0 \notin \overline{M}$ و $u_n \in M$.

(تناقض با گزاره ۱) در نتیجه $u \not\equiv 0$ و به راحتی می‌توان دید که $\varphi(u) = C_*$ و $u \in M$.

__لم Lions__: فرض کنید $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ دنباله کران‌داری باشد که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_r(y)}|u_n|^p dx\right)=0$$

برای $2\le p<2^*$ و $r>0$ ثابت. در این صورت $u_n \longrightarrow 0$ به طور قوی در $L^q(\mathbb{R}^N)$ برای $2<q<2^*$.

گزاره ۳: با فرض (h_1) و (h_2) هر دنباله مینیمم ساز (u_n) برای C_* کران دار است.

اثبات: $u_n \in M$ ، $\varphi(u_n) \longrightarrow C_*$ و $t_n = \|u_n\| \longrightarrow \infty$

$$\underbrace{u_n \in M}_{\|u_n\|^2 = \int h(u_n)u_n}$$

$$v_n := \theta \frac{u_n}{t_n}$$

$$\Rightarrow \quad \|v_n\| = \theta \quad \Rightarrow \begin{cases} v_n \rightharpoonup v & \text{in } H^1 \\ v_n \longrightarrow v & \text{in } L^q_{loc} \quad 2 \leq q < 2^* \\ v_n \longrightarrow v & a.e. \end{cases}$$

ساختار M (از اثبات گزاره ۲) $\Rightarrow \varphi(v_n) \leq \varphi(u_n)$

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_n|^2 \, dx \right)$$

اگر $\alpha = 0$ $\xLongrightarrow{\text{لم Lions}}$ $v_n \xrightarrow{L^q} 0$

$$\varphi(v_n) = \tfrac{1}{2}\|v_n\|^2 - \int H(v_n) \longrightarrow \tfrac{1}{2}\theta^2$$

$\varphi(v_n) \leq \varphi(u_n) \Rightarrow \frac{1}{2}\theta^2 \leq C_*$. کافیست $\theta > \sqrt{2C_*}$ باشد.

داریم $\alpha > 0 \; . \Leftarrow \; \exists y_n \in \mathbb{R}^N$ که

$$\int_{B_1(y_n)} |v_n|^2 \, dx > \alpha/2 > 0$$

$$\tilde{v}_n = v_n(x + y_n) \Longrightarrow \int_{B_1(0)} |\tilde{v}_n|^2 \, dx > \alpha/2 > 0$$

$$\|\tilde{v}_n\| = \theta > \sqrt{2C_*}$$

$$\varphi(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int H(u_n) \longrightarrow C_*$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\frac{t_n v_n}{\theta}\right\|^2 - \int H\left(\frac{t_n v_n}{\theta}\right) \longrightarrow C_*$$

تقسیم بر $t_n^2 \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{1}{t_n^2} H\left(\frac{t_n v_n}{\theta}\right) \longrightarrow 1/2 \\[2em] (h_2) \Rightarrow \displaystyle\lim_{|s| \to \infty} \frac{H(s)}{s^2} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int \left[\frac{H\left(\frac{t_n \tilde{v}_n}{\theta}\right)}{\frac{t_n^2 \tilde{v}_n^2}{\theta^2}} \times \frac{\tilde{v}_n^2}{\theta^2} \right] dx \longrightarrow 1/2$$

از طرفی داریم $\tilde{v}_n \longrightarrow \tilde{v}$ تقریباً همه جا ،

همچنین داشتیم

$$\int_{B_1(0)} |\tilde{v}_n|^2 dx > \alpha/2 > 0 \quad , \quad t_n \longrightarrow \infty \quad \text{و} \quad \frac{H(s)}{s^2} \longrightarrow \infty$$

این تناقض نشان می‌دهد که $\alpha > 0$ درست نیست.

اصل وردشی اکلند

قضیه: فرض کنید (M,d) یک فضای متریک تام باشد و $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ تابع نیم پیوسته پایین

که از پایین کران دار است و لااقل در یک نقطه تعاریفش متناهی است. برای هر $\hat{u}\in M$ که

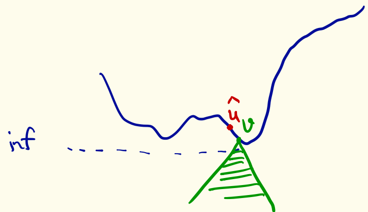
$$\varphi(\hat{u}) \leq \inf_{M} \varphi + \varepsilon$$

$v\in M$ وجود دارد که

i) $d(\hat{u},v) \leq 1$

ii) $\varphi(v) \leq \varphi(\hat{u})$

iii) $\varphi(v) < \varphi(w) + \varepsilon\, d(v,w) \quad \forall w \neq v$



اثبات: دنباله $\{u_k\}$ در M را به صورت زیر می‌سازیم: $u_1 = \hat{u}$.

$$S_k = \{ w \in M : \varphi(w) \le \varphi(u_k) - \varepsilon\, d(u_k, w) \}$$

$$u_k \in S_k \Longrightarrow S_k \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow \exists\, u_{k+1} \in S_k \,,\quad \varphi(u_{k+1}) \le \tfrac{1}{2}\Big\{ \varphi(u_k) + \inf_{S_k} \varphi \Big\}$$

$$u_{k+1}, u_k \in S_k \Longrightarrow \varphi(u_{k+1}) \le \varphi(u_k) - \varepsilon\, d(u_k, u_{k+1}) \quad (1)$$

$\{\varphi(u_k)\}$ یک دنباله نزولی و از پایین کران‌دار است. فرض کنید $\lim_{k\to\infty} \varphi(u_k) = \alpha$

$$(1) \Longrightarrow \varepsilon\, d(u_k, u_{k+m}) \le \varphi(u_k) - \varphi(u_{k+m}) \quad (2)$$

در نتیجه $\{u_k\}$ کوشی است و فرض کنید $\lim_{k\to\infty} u_k = v$

نشان می‌دهیم v در شرایط قضیه صدق می‌کند:

در (2) قرار دهید $m\to\infty$:

$$\varepsilon d(u_k,v)\le \varphi(u_k)-\alpha$$

φ نیم‌پیوسته پایینی است و $\varphi(v)\le \liminf \varphi(u_n)=\alpha$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\varepsilon d(u_k,v)\le \varphi(u_k)-\varphi(v)}_{(3)} \Rightarrow v\in S_K$$

$$\le \varphi(\hat{u})-\varphi(v) \Rightarrow (ii)$$

$$k=1 \Rightarrow 0\le \varepsilon d(\hat{u},v)\le \varphi(\hat{u})-\inf_M \varphi\le\varepsilon$$

$$\Rightarrow (i)$$

فرض کنید (iii) اشتباه باشد یعنی $w\neq v$ وجود دارد که

$$\varphi(v)\ge\varphi(w)+\varepsilon d(v,w) \qquad (4)$$

$$+\begin{cases}\varphi(v)\ge\varphi(w)+\varepsilon d(v,w)\\ (3)\end{cases}$$

$$\varphi(u_k) \geq \varphi(w) + \varepsilon d(v,w) + \varepsilon d(v,u_k) \geq \varphi(w) + \varepsilon d(u_k,w)$$

$$\Longrightarrow \quad w \in S_k \quad \Longrightarrow \quad \varphi(w) \geq \inf_{S_k} \varphi$$

$$\varphi(u_{k+1}) \leq \frac{1}{2}\left[\varphi(u_k) + \inf_{S_k} \varphi\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\varphi(u_k) + \varphi(w)\right]$$

$$k \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leq \varphi(w)$$

از طرفی $\varphi(v) \leq \alpha$ بنابراین از (۴) نتیجه می‌شود

$$d(v,w) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad v = w$$

نتیجه: اگر $d_1=\varepsilon^{-1/2}d$ توپولوژی تغییر نمی‌کند و اگر $\varphi(\hat{u})\le \inf_M \varphi+\varepsilon$ آنگاه $v\in M$ وجود دارد که

i) $d(\hat{u},v)\le \varepsilon^{1/2}$

ii) $\varphi(v)\le \varphi(\hat{u})$

iii) $\varphi(v)<\varphi(w)+\varepsilon^{1/2}d(v,w) \quad \forall w\neq v$

نتیجه: اگر u_n دنباله مینیمم‌ساز φ باشد که $\varphi(u_n)\le\inf_M\varphi+\varepsilon_n$ ، $\varepsilon_n\to 0$ آنگاه

دنباله مینیمم‌ساز v_n وجود دارد که $d(u_n,v_n)\le\varepsilon_n^{1/2}$ و

$$\varphi(v_n)\le\varphi(w)+\varepsilon_n^{1/2}d(v_n,w) \quad \forall w$$

نتیجه: اگر X فضای باناخ باشد، $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و از پایین کران‌دار، برای هر دنباله‌ی مینیمم‌ساز φ مانند u_n

دنباله‌ی v_n وجود دارد که

$$i)\quad \varphi(v_n) \leq \varphi(u_n)$$

$$ii)\quad \|u_n - v_n\| \longrightarrow 0$$

$$iii)\quad \|\varphi'(v_n)\|_{X'} \longrightarrow 0$$

نتیجه: اگر H فضای هیلبرت باشد، $\varphi \in C^1(H;\mathbb{R})$ و $M = \{u \in H : \psi(u) = 0\}$ که $\psi \in C^1(H;\mathbb{R})$

و $\nabla\psi(u) \neq 0$ وقتی $u \in M$. φ روی M از پایین کران‌دار است و u_n یک دنباله‌ی مینیمم‌ساز

$\varphi|_M$. در این صورت دنباله $v_n \in M$ وجود دارد که

$$i)\quad \varphi(v_n) \leq \varphi(u_n) \qquad ii)\quad \|u_n - v_n\| \longrightarrow 0$$

$$iii)\quad \|\nabla(\varphi|_M)(v_n)\| \longrightarrow 0$$

نکته:

$$\nabla(\varphi|_M)(v) = P_{T_vM}(\nabla\varphi(v)) = \nabla\varphi(v) - \left\langle \nabla\varphi(v), \frac{\nabla\psi(v)}{\|\nabla\psi(v)\|}\right\rangle \frac{\nabla\psi(v)}{\|\nabla\psi(v)\|}$$

تصویر به صفحه مماس

گزاره ۴. با فرض (h_1) و (h_2) برای هر دنباله‌ی مینیمم‌ساز (u_n) برای C_*، دنباله‌ی مینیمم‌ساز (v_n) وجود دارد که $\nabla\varphi(v_n)\to 0$.

اثبات - بنابر نتیجه‌ی قبل دنباله‌ی مینیمم‌ساز v_n وجود دارد که $\nabla(\varphi|_M)(v_n)\to 0$.

چون v_n مینیمم‌ساز است بنابر گزاره ۳ دنباله‌ی $\{v_n\}$ کران‌دار است. در نتیجه $\{\nabla\varphi(v_n)\}$ و $\{\nabla\psi(v_n)\}$ کران‌دار هستند.

$$|\langle \nabla\varphi(v_n), w\rangle| = \left|\langle v_n, w\rangle - \int h(v_n)\, w\right| \le C\|w\|$$

وابسته به h و کران دنباله‌ی $\{v_n\}$

از تعریف $\nabla(\varphi|_M)$ بنابر لم قبل دو طرف را به $\nabla\varphi(v_n)$ اثر دهید:

$$\langle \nabla(\varphi|_M)(v_n), \nabla\varphi(v_n)\rangle = \|\nabla\varphi(v_n)\|^2 - \underbrace{\left|\left\langle \nabla\varphi(v_n), \frac{\nabla\psi(v_n)}{\|\nabla\psi(v_n)\|}\right\rangle\right|^2}\to 0$$

کافیست نشان دهیم این عبارت به صفر میل می‌کند.

یک بار دیگر $\nabla(\varphi|_M)(u_n)$ را در u_n ضرب کنید:

$$0 \leftarrow \langle \nabla(\varphi|_M)(u_n), u_n \rangle = \underbrace{\langle \nabla\varphi(u_n), u_n \rangle}_{=0} - \left\langle \nabla\varphi(u_n), \frac{\nabla\psi(u_n)}{\|\nabla\psi(u_n)\|} \right\rangle \cdot \underbrace{\left\langle \frac{\nabla\psi(u_n)}{\|\nabla\psi(u_n)\|}, u_n \right\rangle}$$

چون $u_n \in M$

کافیست این عبارت از صفر فاصله مثبت داشته باشد. یا به طور معادل $\langle \nabla\psi(u_n), u_n \rangle$ از صفر فاصله مثبت داشته باشد.

(چون $\|\nabla\psi(u_n)\|$ کران دار است)

$$\langle \nabla\psi(u_n), u_n \rangle = 2\|u_n\|^2 - \int h'(u_n)u_n^2 + h(u_n)u_n$$

$$u_n \in M \Rightarrow \|u_n\|^2 = \int h(u_n)u_n$$

$$\Longrightarrow \langle \nabla\psi(u_n), u_n \rangle = \int h(u_n)u_n - h'(u_n)u_n^2$$

فرض کنیم ادعا بالا غلط باشد و عبارت آن به صفر میل کند.

$$\alpha := \liminf \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_n|^2\, dx \right)$$

اگر $\alpha = 0 \overset{\text{Lions}}{\Longrightarrow}$ $v_n \xrightarrow{L^q} 0$ ، $v_n \in M \Longrightarrow \|v_n\|^2 = \int h(v_n) v_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n \xrightarrow{L^q} 0 \\ \|v_n\|^2 = \int h(v_n)v_n \end{array} \right. \Longrightarrow \|v_n\| \to 0 \Longrightarrow \text{✗} \quad 0 \notin \overline{M}$$

درنتیجه $\alpha > 0$ و دنباله $y_n \in \mathbb{R}^N$ وجود دارد که اگر $\tilde{v}_n(x) = v_n(x+y_n)$ آنگاه

$$\int_{B_1(0)} |\tilde{v}_n|\, dx \geq \alpha/2 > 0$$

از طرفی $\|\tilde{v}_n\| = \|v_n\|$ و کران‌دار هستند و

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v} & \text{in } H^1 \\ \tilde{v}_n \to \tilde{v} & L^q \\ \tilde{v}_n \to \tilde{v} & a.e. \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \int h(\tilde{v})\tilde{v} - h'(\tilde{v})(\tilde{v})^2 = 0$$

و قبلاً (در اثبات گزاره ۱) دیدیم که $h'(s)s^2 > h(s)s$ برای $s \neq 0$. درنتیجه $\tilde{v} \equiv 0$.

که با نتیجه $\alpha = 0$ به تناقض می‌رسیم.