PDE

جلسه دوم ۹۵/۱۲/۱

معادله اصل بقاء

$u(x,t)$ چگالی در زمان t در نقطه x .

$$u_t + (q(u))_x = 0$$

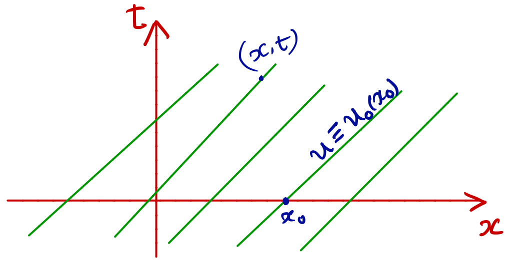
$q(u) = u \cdot v$ شار

با فرض سرعت ثابت $v \equiv c$ $\quad u_t + c\,u_x = 0$

جواب کلاسیک: تابع مشتق‌پذیر که در رابطه بالا صدق کند.

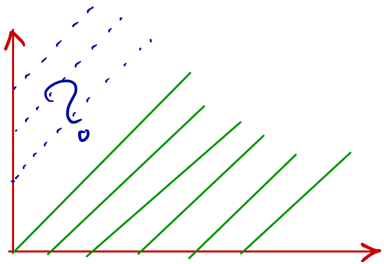
جواب ضعیف: تابع u مشتق‌پذیر نیست ولی رابطه انتگرالی زیر برای هر بازه $[x_1,x_2]$ برقرار است:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx + q(u(x_2,t)) - q(u(x_1,t)) = 0$$



$$\frac{d}{dt} u(x+ct, t) = 0$$

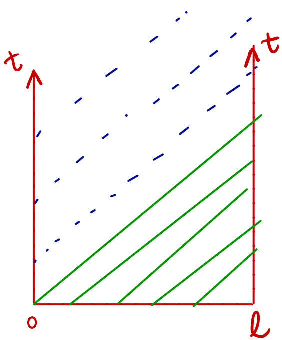
$$u(x_0, 0) = u_0(x_0)$$

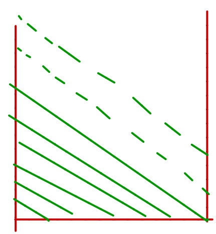


$$\underline{u(0,t) = h(t)}$$

$$u(l,t) = ?$$

$$0 \le x \le l$$





$$\begin{cases} u_t + c\,u_x = f(x,t) & 0<x<l \;,\quad t>0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \\ u(0,t) = h_0(t) \quad \text{or} \quad u(l,t) = h_l(t) & \end{cases}$$

وجود جواب $\longleftarrow$ مثبت .

یکتایی جواب $\longleftarrow$ برای جواب‌های کلاسیک یکتایی برقرار است . (فرآیند پیدا کردن جواب)

پایداری جواب $\longleftarrow$ ؟

یکتایی : اگر u_1 و u_2 دو جواب (ضعیف) از معادله بالا باشند،

$v = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} v_t + c\,v_x = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v(0,t) = 0 \end{cases} \xRightarrow{?} v \equiv 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\ell} (v(x,t))^2\,dx = \int_0^{\ell} 2\,v\,v_t\,dx = \int_0^{\ell} 2\,v(-c\,v_x)\,dx$$

$$= -c\int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x}(v^2)\,dx = -c\left[v^2(\ell,t) - \cancelto{0}{v^2(0,t)}\right]$$

$$\leq 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\ell} (v(x,t))^2\,dx \leq \int_0^{\ell} (v(x,0))^2\,dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad v(x,t) \equiv 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^l (u(x,t))^2\,dx = \int_0^l 2uu_t\,dx = \int_0^l 2u(f - cu_x)\,dx$$

$$= \int_0^l -c(u^2)_x + 2uf\;dx$$

$$\le c(u(0,t))^2 + 2\int_0^l uf\;dx$$

$$\Rightarrow \int_0^l (u(x,t))^2\,dx - \int_0^l \underbrace{\cancel{(u(x,0))^2}}_{u_0(x)}\,dx \le c\int_0^t \overbrace{\cancel{(u(0,s))}}^{h_0(s)}{}^2\,ds + 2\int_0^t\int_0^l uf\;dx\,ds$$

$$\int_0^l (u(x,t))^2\,dx \le \int_0^l (u_0(x))^2\,dx + C\int_0^t (h_0(s))^2\,ds + 2\int_0^t\int_0^l uf\;dx\,ds$$

$F(u_0,h_0)$

$$\le \int_0^t\int_0^l [\varepsilon u^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}f^2]\,dx\,ds$$

$$0 \le t \le T$$

$$\int_0^T\int_0^l u^2\,dx\,dt \le T\int_0^l u_0^2\,dx + cT\int_0^T h_0^2\,dt$$

$$+\,2T\int_0^T\int_0^l \varepsilon u^2 + \tfrac{1}{\varepsilon} f^2\,dx\,dt$$

$$(1-2T\varepsilon)\int_0^T\int_0^l u^2\,dx\,dt \le T\left[\int_0^l u_0^2\,dx + c\int_0^T h_0^2\,dt + \frac{2}{\varepsilon}\int_0^T\int_0^l f^2\right]$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4T} \Longrightarrow \quad \dots$$

$$\downarrow$$

یکتایی جواب

جواب ضعیف :

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)-u(x,t_1)\,dx = c\int_{t_1}^{t_2} u(x_1,t)-u(x_2,t)\,dt$$

$$\int_0^l \chi_{[x_1,x_2]}\cdot u_t\,dx = c\big(u(x_1,t)-u(x_2,t)\big) = c\int_0^l -u_x\cdot \chi_{[x_1,x_2]}\,dx$$

$$\int_0^l \varphi(x)\,u_t\,dx = c\int_0^l -u_x\cdot\varphi(x)\,dx = c\int_0^l u\cdot\varphi_x\,dx$$

$$\varphi\in C_0^\infty[0,l]$$

$$\operatorname{supp}\varphi\subseteq(0,l)$$

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{[x_i,y_i]}$$

جواب ضعیف :

$$u_t + c u_x = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2) - u(x,t_1)\, dx = c \int_{t_1}^{t_2} u(x_1,t) - u(x_2,t)\, dt$$

$$\forall x_1, x_2, t_1, t_2$$

$$\int_0^{\ell} \chi_{[x_1,x_2]} \left[u(x,t_2) - u(x,t_1) \right] dx = \mu(x_1) - \mu(x_2)$$

$$\boxed{\mu(x) = c \int_{t_1}^{t_2} u(x,t)\, dt}$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[x_i, y_i]}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\ell} \varphi(x) \left[u(x,t_2) - u(x,t_1) \right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\mu(x_i) - \mu(y_i) \right)$$

$$= -\int_0^{\ell} \varphi(x)\, d\mu$$

$$\forall \varphi \in C^1[0,l] \quad \int_0^l \varphi(x)\,[u(x,t_2)-u(x,t_1)]\,dx = -\int_0^l \varphi(x)\,d\mu$$

مشتق‌پذیر

$$= \int_0^l \mu \cdot d\varphi - \cancel{\mu\varphi}\Big|_0^l$$

$$= \int_0^l \mu(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{t_1}^{t_2} c\,[u(l,t)\varphi(l) - u(0,t)\varphi(0)]\,dt$$

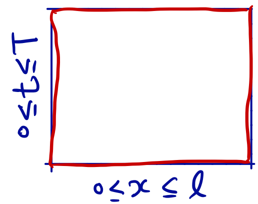
$$\mu(x) = \int_{t_1}^{t_2} c\,u(x,t)\,dt = \int_0^T c\,u(x,t)\,\chi_{[t_1,t_2]}\,dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall \theta \in C_0^1[0,T] \quad \int_0^T\int_0^l \varphi(x)\,\theta'(t)\,u(x,t)\,dx\,dt \\ &= -\int_0^T\int_0^l c\,\varphi'(x)\,\theta(t)\,u(x,t)\,dx\,dt \\ &\quad + \text{b.c.} \end{aligned}}$$

$\forall \varphi \in C^1[0,\ell]\ ,\ \theta \in C^1[0,T]$

$$\ast \quad \int_0^T \int_0^\ell \big[\underbrace{\varphi(x)\,\theta'(t) + c\,\varphi'(x)\,\theta(t)}_{\partial_t \Phi + c\,\partial_x \Phi}\big]\, u(x,t)\, dx\, dt = b.c.$$

$$\Phi(x,t) = \varphi(x)\,\theta(t)$$



از ضرب معادله $u_t + c\,u_x = 0$ در تابع $\Phi(x,t)$ و انتگرال گیری به دست می‌آید.

$$b.c. = \int_0^\ell u\,\Phi \Big|_{t=0}^{T} dx + c \int_0^T u\,\Phi \Big|_{x=0}^{\ell} dt$$

اگر u هموار باشه قرار دهیم $\Phi = u$.

$$\int_0^T \int_0^\ell \partial_t u \cdot u + c\, \partial_x u \cdot u \, dx\, dt = b.c.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\ell \partial_t (u^2) + c\, \partial_x (u^2)\, dx\, dt = \frac{1}{2} \int_0^\ell u^2 \Big|_{t=0}^{T} dx + \frac{c}{2} \int_0^T u^2 \Big|_{x=0}^{\ell} dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\, b.c.$$

$$\Rightarrow \quad b.c. = 0 \Rightarrow \int_0^\ell u^2(x,T)\, dx = \int_0^\ell u^2(x,0)\, dx + c \int_0^T u^2(0,t) - u^2(\ell,t)\, dt$$

$$\leq \int_0^\ell (u_0(x))^2 dx + c \int_0^T (h_0(t))^2 dt$$

زمانی که u هموار نباشد در $(*)$ به جای u تابع u_n وارد می‌کنیم که تقریب هموار تابع u باشند یعنی

$$\|u_n - u\|_\infty \longrightarrow 0$$

ولی ممکن است مشتقات u_n بیکران شوند. $\|\nabla u_n\|_\infty \to \infty$!

$$\int_0^T\int_0^l \underbrace{\left[\varphi(x)\theta'(t) + c\,\varphi'(x)\theta(t)\right]}_{\partial_t\Phi + c\,\partial_x\Phi} u_n(x,t)\,dx\,dt = b.c. + O\left(\|u-u_n\|_\infty \cdot \|\Phi\|_\infty\right)$$

از سوال قبل $\leq \cdots + O\left(\|u-u_n\|_\infty \cdot \|u_n\|_\infty\right)$

PDE

جلسه سوم

۹۵/۱۲/۳

معادله اصل بقا

$$u_t + \left(q(u)\right)_x = 0$$

$$q(u) = v \cdot u$$

در مسأله ترافیک :

$v(u) = v_m$ وقتی $u=0$

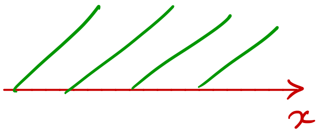
حداکثر سرعت

$v(u) = 0$ وقتی $u = u_m$ ترافیک کامل.

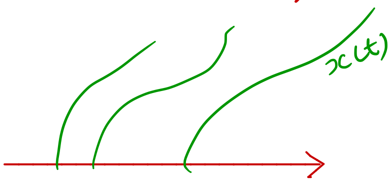
$$v(u) = \begin{cases} v_m\left(1 - \dfrac{u}{u_m}\right) & u \leq u_m \\ 0 & u > u_m \end{cases}$$

$$\left(q(u)\right)_x = v(u) \cdot u_x - \frac{v_m}{u_m} \cdot u_x u$$

$$= \left[v(u) - \frac{v_m}{u_m} \cdot u\right] u_x = v_m\left(1 - \frac{2u}{u_m}\right) u_x$$



$$\frac{d}{dt} u(\underbrace{x+ct}_{x(t)}, t) = 0$$



$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = 0$$

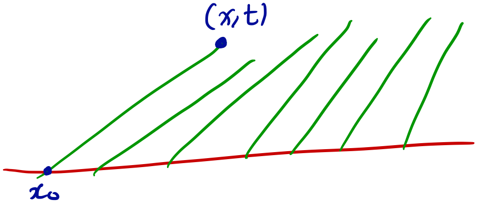
$$u_x \cdot \dot{x} + u_t = 0$$

معادله $\rightarrow \quad u_t + q'(u) \cdot u_x = 0$

$$\rightarrow \quad \dot{x} = q'(u(x(t), t))$$

u روی مشخصه ثابت است. $\rightarrow \quad u(x(t), t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0)$

$$x'(t) = q'(u_0(x_0)) \Rightarrow x(t) = t\, q'(u_0(x_0)) + x_0$$



$$u(x(t), t) = u_0(x_0)$$

$$\Rightarrow u(\underbrace{t\, q'(u_0(x_0)) + x_0}_{x}, t) = u_0(x_0)$$

سؤال : (x,t) معلوم است باید x_0 را از رابطه زیر پیدا کنیم.

$$f(x,t,x_0) = t\, q'(u_0(x_0)) + x_0 - x = 0$$

قضیه تابع ضمنی $\leftarrow$ اگر $f_{x_0}(a,b,c) \neq 0$ می‌توانید در همسایگی (a,b,c)

x_0 را برحسب (x,t) نمایش دهید.

$$f(a,0,a)=0$$

بنابر قضیه تابع ضمنی در همسایگی $(x_0,0,x_0)$ می‌توان x_0 را برحسب (x,t) نوشت. یعنی

معادله

PDE

جلسه چهارم

۹۵/۱۲/۸

مدل ترافیک :

$$u_t + \left(q(u)\right)_x = 0$$

$$q(u) = V(x,t) \cdot u(x,t)$$

$$v(u) = \begin{cases} V_m\left(1 - \dfrac{u}{u_m}\right) & 0 < u < u_m \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$u_t + \underbrace{V_m\left(1 - \frac{2u}{u_m}\right)}_{q'(u)} u_x = 0$$

روش خم‌های مشخصه

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = 0$$

$$x(0) = x_0 \qquad \frac{dx}{dt} = q'(u_0(x_0)) \Rightarrow \boxed{u(x,t) = u_0\left(x - t\,q'(u_0(x_0))\right)}$$

چالش اول: چه جوری x_0 را برحسب (x,t) محاسبه کنیم؟

$$f(x,t,x_0) = x_0 + t\,q'(u_0(x_0)) - x = 0$$

بنابر قضیه تابع ضمنی مادامی که $f_{x_0} \neq 0$ می‌توان x_0 را برحسب (x,t) نوشت.

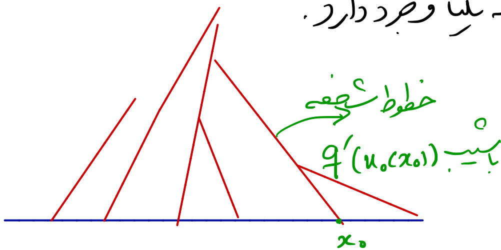
(به شرط آنکه f یک تابع C^1 باشد.) $\leftarrow$ لازم است $q \in C^2$ و $u_0 \in C^1$.

با این شرط همواره $f_{x_0}(x_0,0,x_0) \neq 0$ درست است و در نتیجه وجود جواب به طور موضعی در همسایگی $t=0$ اثبات می‌شود. برای t دلخواه

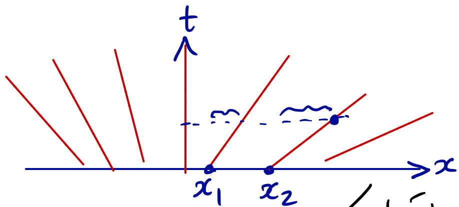
$$f_{x_0}(x,t,x_0) = 1 + t\,q''(u_0(x_0))\cdot u_0'(x_0)$$

اگر $0 < q''(u_0(x_0))\,u_0'(x_0)$ آنگاه برای هر t عبارت بالا ناصفر است و جواب معادله در $t > 0$ قابل تعریف است.

نتیجه: در معادلات ترافیک اگر u_0 نزولی باشد، آنگاه جواب معادله یکتا وجود دارد.



چالش دوم: خطوط مشخصه همدیگر را قطع می‌کنند.



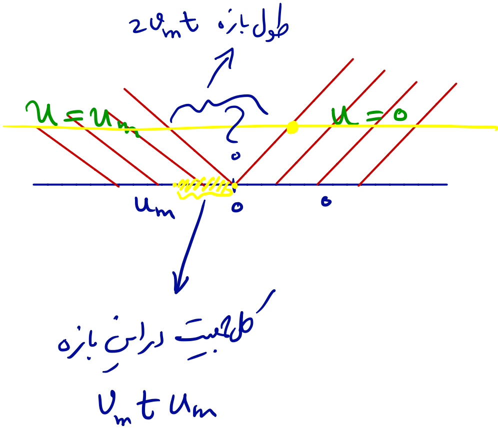
$$\frac{x-x_0}{q'(u_0(x_0))} = t$$

اگر $q'(u_0(x_0))$ صعودی باشد آنگاه خطوط مشخصه همدیگر را قطع نمی‌کنند.

$$\left(q'(u_0(x_0))\right)' > 0$$

همان شرط قبل

نکته: جواب فوق نشان این است که جهت نقطه x_0 با سرعت $q'(u_0(x_0))$ در حال حرکت است. اینگونه جواب‌ها را موج رونده travelling wave گویند.



چالش سوم: ممکن است جهت‌های مشخصه کل فضا را پر نکند.

مثال: مدل چراغ قرمز.

$$u_0(x) = \begin{cases} u_m & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

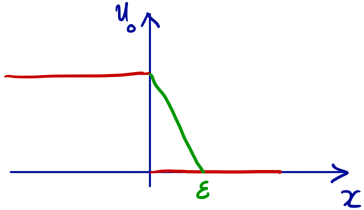
$$q'(u) = v_m\left(1 - \frac{2u}{u_m}\right)$$

$$q'(u_0(x_0)) = \begin{cases} -v_m & x_0 < 0 \\ v_m & x_0 > 0 \end{cases}$$

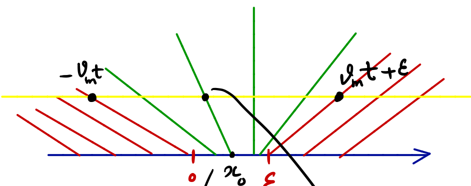
اگر قرار باشد جمعیت در ناحیه نامشخص به طور یکنواخت توزیع شود

باید مقدار چگالی $\dfrac{u_m}{2} = \dfrac{v_m t u_m}{2 v_m t}$ باشد.

این جواب معقول نیست!



$$u_0^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} u_m & x < 0 \\ u_m\left(1 - \dfrac{x}{\varepsilon}\right) & 0 < x < \varepsilon \\ 0 & x > \varepsilon \end{cases}$$



$$u^{\varepsilon}(x,t) = \begin{cases} 0 & x \geq v_m t + \varepsilon \\ u_0^{\varepsilon}(x_0) & -v_m t < x < v_m t + \varepsilon \\ u_m & x \leq -v_m t \end{cases}$$

$q'(u_0^{\varepsilon}(x_0))$ شیب خط

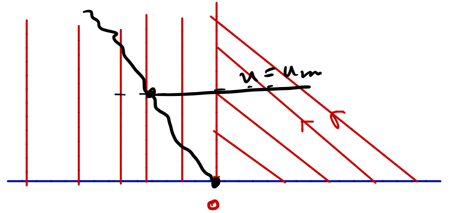
$$x = x_0 + t\, v_m\left(1 - 2\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

اکنون $\varepsilon \to 0$:

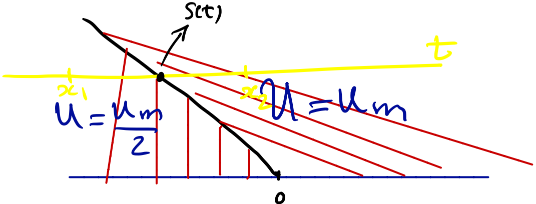
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \geq v_m t \\ \dfrac{u_m}{2}\left(1 - \dfrac{x}{v_m t}\right) & |x| < v_m t \\ u_m & x \leq -v_m t \end{cases}$$

مثال: راهبندان.

$$u_0(x)=\begin{cases} u_m & x>0 \\ \dfrac{u_m}{2} & x<0 \end{cases}$$



$$q'(u_0(x))=\begin{cases} -v_m & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$



معادله خم $x=S(t)$

" پدیده موج شوک "

Shock wave

$$x_1 < S(t) < x_2$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx = q(u(x_1,t)) - q(u(x_2,t))$$

$$= v\left(\frac{u_m}{2}\right)\frac{u_m}{2} - v(u_m)\,u_m = \frac{v_m u_m}{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{x_1}^{S(t)} u(x,t)\,dx + \int_{S(t)}^{x_2} u(x,t)\,dx\right] = \dot{S}(t)\cdot u(S(t)^-,t) + \int_{x_1}^{S(t)} u_t\,dx$$

$$- \dot{S}(t)\, u(S(t)^+,t) + \int_{S(t)}^{x_2} u_t\,dx$$

$$= \dot{S}(t)\left[\frac{u_m}{2} - u_m\right]$$

$$\Rightarrow \quad \dot{S}(t) = -\frac{v_m}{2}, \qquad S(0)=0$$

$$\Rightarrow \quad S(t) = -\frac{v_m t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \begin{cases} \frac{u_m}{2} & x < -\frac{v_m t}{2} \\ u_m & x > -\frac{v_m t}{2} \end{cases}$$

نکته: درحالت کلی اگر پدیده شوک اتفاق بیفتد و $x = s(t)$ خم شوک باشد رابطه زیر برقرار است

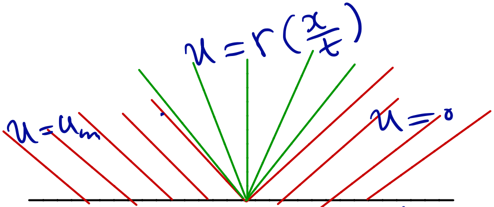
$$\dot{s}(t) = \frac{[q(u)]_-^+}{[u]_-^+}$$

$[q(u)]_-^+$: جهش شار در نقطه ناپیوستگی

$[u]_-^+$: جهش جواب در نقطه ناپیوستگی

شرط Rankine-Hugonoite

تمرین :



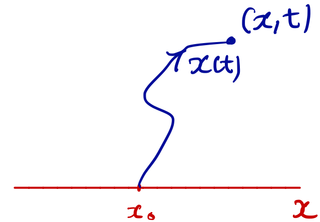
توابع r را مشخص کنید تا تابع فوق جواب ضعیف معادله ترافیک باشد.

$$\begin{cases} r(-v_m)=u_m \\ r(v_m)=0 \end{cases}$$

PDE

جلسه پنجم ۹۵/۱۲/۱۰

روش جهت‌های مشخصه



$$\begin{cases} u_t + (q(u))_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} u(x(t),t) = 0 \Longrightarrow \dot{x} = ?$$

$$u(x,t) = u_0\big(x - q'(\underbrace{u_0(x_0)}_{u})\,t\big)$$

$$G(t,x,u) = u - u_0(x - q'(u)t) = 0$$

قضیه تابع ضمنی: اگر $G_u \neq 0$ $\Longleftarrow$ u برحسب (x,t) بدست می‌آید

$$G_u = 1 + t\,u_0'(x - q'(u)t)\cdot q''(u) \qquad (*)$$

قضیه: اگر $q \in C^2$ و $u_0 \in C^1$ و $u_0' \cdot q'' \geq 0$ آنگاه معادله اصلی یک جواب کلاسیکی $u(x,t)$ دارد که در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ تعریف شده و C^1 است.

نکته: از روابط $(*)$ نتیجه می‌شود که در همسایگی $t=0$ جواب به صورت یکتا تعریف می‌گردد.

(زیرا برای $t \neq 0$ همواره داریم $G_u = 1 \neq 0$) در حالت کلی برای $0 < t < t_m$ جواب تعریف می‌شود که

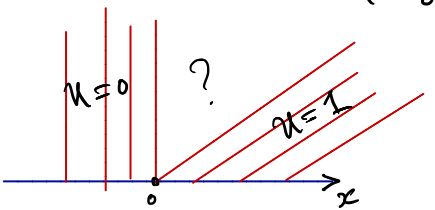
$$t_m = \frac{-1}{\min\limits_{x_0} \left(u_0'(x_0) \cdot q''(u_0(x_0)) \right)}$$

و برای $t \geq t_m$ پدیده شوک اتفاق می‌افتد.

مثال : معادله برگر : $q(u) = \frac{u^2}{2} \longrightarrow u_t + u u_x = 0$

فرمول خطوط مشخصه $x = x_0 + t\,u_0(x_0)$

$$u(x_0 + t u_0, t) = u_0(x_0)$$



$$u_0(x_0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

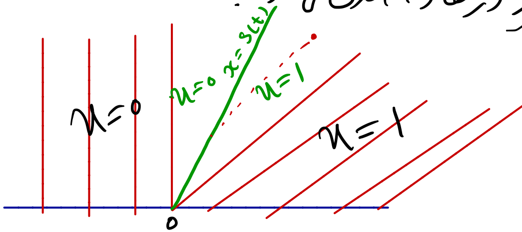
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > t \\ r\left(\frac{x}{t}\right) & 0 < x < t \end{cases}$$

$$r(0) = 0 \quad , \quad r(1) = 1$$

$$u_t = -\frac{x}{t^2} r' \quad , \quad u_x = \frac{1}{t} r' \quad \Rightarrow \quad -\frac{x r'}{t^2} + \frac{r r'}{t} = 0$$

$$r'\left(r - \frac{x}{t}\right) = 0 \implies r = \frac{x}{t}$$

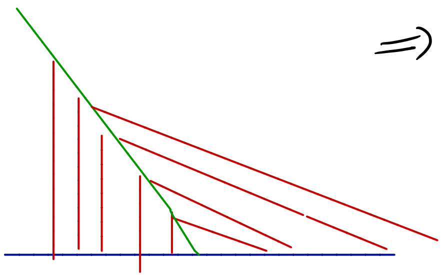
جواب این مسئله یکتا نیست. به عنوان مثال تابع زیر نیز در معادله صدق می‌کند:



$$\dot{s} = \frac{[q(u)]_-^+}{[u]_-^+} = \frac{1/2}{1}$$

$$\Rightarrow s(t) = t/2$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} 1 & x > t/2 \\ 0 & x < t/2 \end{cases}$$



شرط آنتروپی:

اگر $x=s(t)$ خم شوک باشد (به این معنا که جواب $u(x,t)$ در این نقطه ناپیوسته شود آنگاه

$$q'(u_+) < \dot{s} < q'(u_-)$$

$$f'(u^+) < \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} < f'(u^-)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(\theta)$$

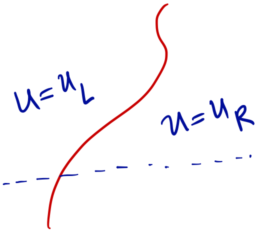
اگر f' صعودی باشد و $u^+ < u^-$ آنگاه شرط آنتروپی برقرار است.

f محدب

اگر f مقعر باشد و $u^- < u^+$ ـــ . . . . ـــ

قضیه: اگر $f \in C^2$ محدب یا مقعر باشد و u_0 کران دار آنگاه معادله اصلی تنها جواب آنتروپی یکتا دارد.

نگاه به پدیده شوک از زاویه دیگر. (روش Viscosity لزجی)



$$u_t + (q(u))_x = \varepsilon u_{xx}$$

جواب های این معادله همگرا هستند $u^\varepsilon(x,t) \to u(x,t)$

$$\lim_{x\to -\infty} u^\varepsilon(x,t) = u_L \quad , \quad \lim_{x\to \infty} u^\varepsilon(x,t) = u_R$$

از طرفی فرض کنیم جواب معادله به صورت $u^\varepsilon(x,t) = U(x-vt)$ باشد. یعنی یک موج رونده

$$\partial_t u^\varepsilon = -vU' ,$$

$$\partial_{xx} u^\varepsilon = U'' \quad \Rightarrow \quad \left(-vU' + q'(U).U'\right) = \varepsilon U''$$

$$x - vt = \xi \implies \underbrace{-vU(\xi) + q(U) = \varepsilon U'(\xi) + A}$$

$$U(+\infty) = u_R \quad , \quad U(-\infty) = u_L$$

$u_L \,, u_R \,, v \,, U \,, A$: مجهولات

$$\left.\begin{aligned} \xi \to +\infty &: \quad -v u_R + q(u_R) = A \\ \xi \to -\infty &: \quad -v u_L + q(u_L) = A \end{aligned}\right\} \implies \boxed{v = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L}}$$

$$\begin{cases} U' = F(U) \\ \lim\limits_{\xi \to +\infty} U(\xi) = U_+ \end{cases} \implies F(U_+) = 0$$

[illegible] :

مثال: $q(u)=\frac{u^2}{2}$ (معادله برگرز)

$$u_L=1,\quad u_R=0 \Longrightarrow v=\tfrac{1}{2}$$

$$A=q(u_R)-v\,u_R=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=0$$

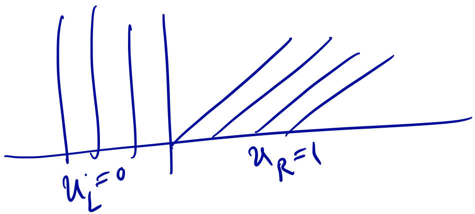
$$\varepsilon U'(\xi)=q(U)-\tfrac{1}{2}U=\tfrac{1}{2}\left(U^2-U\right)$$

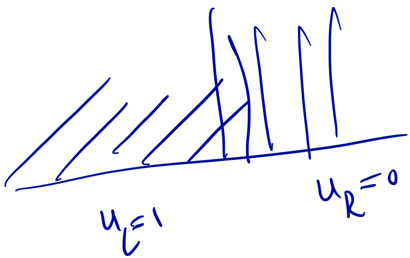
$$\Rightarrow \frac{2\varepsilon\, dU}{U^2-U}=d\xi\,,\qquad U(+\infty)=0,\quad U(-\infty)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{U(\xi)=\frac{1}{1+\exp\left(\xi/2\varepsilon\right)}}$$

$$u^{\varepsilon}(x,t)=U(x-vt)=\frac{1}{1+\exp\left(\frac{x-\frac{1}{2}t}{2\varepsilon}\right)}$$

$$u^{\varepsilon}(x,t) \longrightarrow u^{0}(x,t) = \begin{cases} 0 & x > t/2 \\ 1 & x < t/2 \end{cases}$$

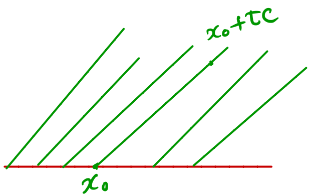




PDE

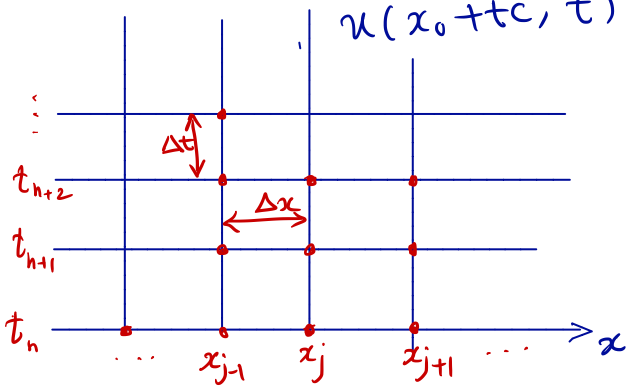
جلسه ششم ۹۵/۱۲/۱۵

روشهای عددی حل معادله انتقال



$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0 \\ u(x,0) = \sin x \qquad 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$u(x_0+tc,\, t) = \sin x_0 \Rightarrow u(x,t) = \sin(x-ct)$$



$$t_n = n\,\Delta t$$

$$x_j = j\,\Delta x \qquad 1 \le j \le M$$

$$U(j,n) = u(j\Delta x,\, n\Delta t)$$

$$U(j,0) = \sin(j\Delta x)$$

$$u_t(j\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{U(j,n+1) - U(j,n)}{\Delta t}$$

$$u_x(j\Delta x, n\Delta t) \approx$$

$$\frac{U(j+1,n) - U(j,n)}{\Delta x}$$ Forward Scheme

$$\frac{U(j,n) - U(j-1,n)}{\Delta x}$$ Backward Scheme

$$\frac{U(j+1,n) - U(j-1,n)}{2\Delta x}$$ Central Scheme

$$\begin{cases} U(j,n+1) = U(j,n) - \left(\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right) \times c \times \left[U(j+1,n) - U(j,n)\right] \\[2ex] U(j,0) = S_h(j\Delta x) \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{\pi}{M}$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c}$$

$$E^n = \frac{1}{2} \Delta x \sum_{j=1}^{M} \left(U(j,n)\right)^2 \approx \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(u(x,t)\right)^2 dx$$

Central

$$\left(E^{n+1} - E^n\right) = \frac{\Delta x}{2} \sum_j \left(U(j,n+1)\right)^2 - \left(U(j,n)\right)^2$$

$$= \frac{\Delta x}{2} \sum_j \left(U_j^{n+1} - U_j^n\right)\left(U_j^{n+1} + U_j^n\right)$$

$$= \frac{-c\lambda\Delta x}{4} \sum_j \underbrace{\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)}\left(\underline{2U_j^n} - \frac{c\lambda}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)\right)$$

$$\sum_{j=1}^{M} U_{j+1}^n U_j^n = \sum_{j=1}^{M} U_{j-1}^n U_j^n$$

$$E^{n+1} - E^{n} = \frac{(c\lambda)^2 \Delta x}{8} \sum_j \underbrace{\left(U_{j+1}^{n} - U_{j-1}^{n}\right)^2}_{(H_j^n)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad E^{n+1} \geq E^{n}$$

$$H_j^n = U_{j+1}^{n} - U_{j-1}^{n} \quad , \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{c\lambda}{2}\left(U_{j+1}^{n} - U_{j-1}^{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad H_j^{n+1} = H_j^n - \frac{c\lambda}{2}\left(H_{j+1}^{n} - H_{j-1}^{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j \left(H_j^{n}\right)^2 \geq \sum_j \left(H_j^{n-1}\right)^2 \geq \sum_j \left(H_j^{0}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad E^{n+1} - E^{n} \geq \frac{(c\lambda)^2 \Delta x}{8} \sum_j \left(H_j^{0}\right)^2$$

$$E^n \geq E^0 + n\,\frac{(c\lambda)^2 \Delta x}{8} \sum \left(U^0_{j+1} - U^0_{j-1} \right)^2$$

اگر شرایط اولیه $u(0,x)$ تابع ثابت نباشد، $E^n \to \infty$.

و در نتیجه طرح مرکزی برای محاسبه عددی جواب معادله اصلی ما ناپایدار است .

خلاصه: وقتی $c>0$ ← backward

وقتی $c<0$ ← Forward

$$\underbrace{\frac{U_j^{n+1}-U_j^{n}}{\Delta t}}_{u_t} + \underbrace{c\,\frac{U_{j+1}^{n}-U_{j-1}^{n}}{2\Delta x}}_{c u_x} = \underbrace{\frac{|c|}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^{n}-2U_j^{n}+U_{j-1}^{n}\right)}_{\underbrace{\frac{|c|\Delta x}{2}}_{\varepsilon} u_{xx}}$$

upwind scheme

PDE

جلسه هفتم ۹۵/۱۲/۱۷

قضیه: طرح upwind پایدار است اگر و تنها اگر $|\lambda c| \le 1$.

اثبات - فرض کنید $c>0$ ،

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda c \left(U_j^n - U_{j-1}^n \right)$$

$$E^n = \frac{\Delta x}{2} \sum_j \left(U_j^n \right)^2$$

$$E^{n+1} = \frac{\Delta x}{2} \sum_j \left(U_j^{n+1} \right)^2 = \frac{\Delta x}{2} \sum_j \left(U_j^n \right)^2 + (\lambda c)^2 \left(U_j^n - U_{j-1}^n \right)^2 - 2\lambda c\, U_j^n \left(U_j^n - U_{j-1}^n \right)$$

$$= (1-2\lambda c) E^n + \frac{\Delta x}{2} \sum_j (\lambda c)^2 \left(U_j^n - U_{j-1}^n \right)^2 + \underbrace{2\lambda c\, U_j^n U_{j-1}^n}_{-\lambda c \left[\left(U_j^n - U_{j-1}^n \right)^2 - \left(U_j^n \right)^2 - \left(U_{j-1}^n \right)^2 \right]}$$

$$= E^n + \frac{\Delta x}{2}(\lambda c)(\lambda c - 1)\sum_j \left(U_j^n - U_{j-1}^n\right)^2$$

$\lambda c \leq 1 \Rightarrow 0 \leq E^{n+1} \leq E^n \Rightarrow$ $\{E^n\}$ کراندار است

$$\lambda c > 1 \Rightarrow E^{n+1} \geq E^n + n\frac{\Delta x}{2}(\lambda c)(\lambda c - 1)\sum_j \left(U_j^0 - U_{j-1}^0\right)^2$$

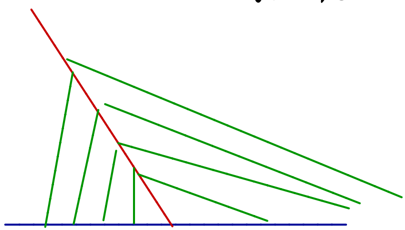
روش عددی معادله غیرخطی :

$$u_t + \left(f(u)\right)_x = 0$$

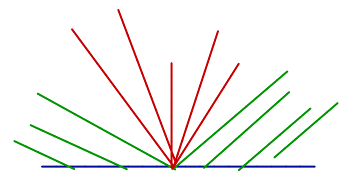
$$u(x,0) = \begin{cases} u_+ & x > 0 \\ u_- & x < 0 \end{cases}$$

حالت اول: $u_+ < u_-$ ⇐

$$u(x,t) = \begin{cases} u_+ & x/t > \sigma \\ u_- & x/t < \sigma \end{cases}$$



$$\sigma = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$$

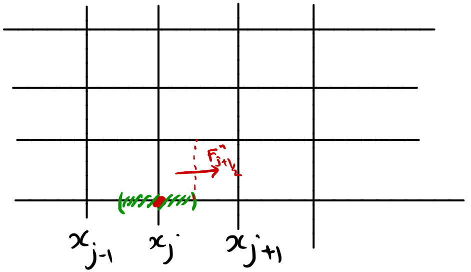


حالت دوم: $u_+ > u_-$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_- & x/t < f'(u_-) \\ r(x/t) & f'(u_-) < x/t < f'(u_+) \\ u_+ & x/t > f'(u_+) \end{cases}$$

که $r = (f')^{-1}$

روش finite Volume



$$U_j^n \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j-\Delta x/2 = x_{j-1/2}}^{x_j+\Delta x/2 = x_{j+1/2}} u(x,t^n)\,dx$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j+\Delta x/2}\left[u_t + (f(u))_x\right]dx\,dt = 0$$

$$\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j+\Delta x/2} u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)\,dx = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2},t)) - f(u(x_{j-1/2},t))\,dt$$

$$\boxed{U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n_{j+1/2} - F^n_{j-1/2}\right]}$$

$$F^{n}_{j+1/2} := \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(u(x_{j+1/2}, t)\right) dt$$

برای محاسبه انتگرال بالا مسأله زیر را حل می‌کنیم :

(Godunov method)

$$\begin{cases} v_t + \left(f(v)\right)_x = 0 \\ v(x, t_n) = \begin{cases} U_j^n & x < x_{j+1/2} \\ U_{j+1}^n & x > x_{j+1/2} \end{cases} \end{cases}$$

پروژه: حل عددی مسائل (2.75) و (2.76) کتاب .

PDE

جلسه هشتم ۹۵/۱۲/۲۲

معادله گرما

$$u_t - D\Delta u = f$$

$$\Delta u = (\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2)\, u$$

$$u_t - \operatorname{div}(D\nabla u) = f$$

$D(x,t)$ ماتریس $n\times n$.

---

q جریان گرما

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\,dx = \int_\Omega f(x,t)\,dx - \int_{\partial\Omega} q\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

عنصر انتگرال سطح

$\vec{n}$ بردار عمود برون‌گرا

$$\int_{\Omega} \left(u_t - f + \operatorname{div} q\right) dx = 0$$

$$\boxed{u_t + \operatorname{div} q = f}$$ $\Leftarrow$ اگر Ω باز دلخواه باشد

Fourier law / Fick law

مچالی از نقاط پرجمعیت به سمت نقاط کم جمعیت حرکت می‌کنند.

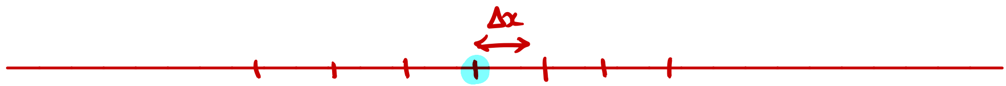
$$q \sim -\nabla u$$

$$q = -D \nabla u$$

$$\Longrightarrow \quad u_t - \operatorname{div}(D \nabla u) = f$$

$$u_t - d\,u_{xx} = 0$$ معادله گرما یک بعدی

$$u(x_0, t_0+\Delta t) = \frac{1}{2} u(x_0-\Delta x, t_0) + \tfrac{1}{2} u(x_0+\Delta x, t_0)$$



$$u(x_0, t_0+\Delta t) - u(x_0, t_0) = \Delta t \cdot u_t(x_0, t_0) + O(|\Delta t|^2)$$

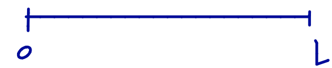
$$\frac{u(x_0+\Delta x, t_0) + u(x_0-\Delta x, t_0) - 2u(x_0, t_0)}{2(\Delta x)^2} \approx u_{xx}(x_0, t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t \cdot u_t = (\Delta x)^2 \cdot u_{xx}$$

$$\Rightarrow \quad u_t = D\, u_{xx} \qquad \boxed{D = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}}$$

تمرین: فرض کنید با احتمال p به راست و $1-p$ به چپ حرکت کند. معادله دیفرانسیل حاکم بر چگالی ذرات را پیدا کنید.

$$\begin{cases} u_t - d\, u_{xx} = f \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$



شرط مرزی دیریکله :

$$\begin{cases} u(0,t) = h_1(t) \\ u(L,t) = h_2(t) \end{cases}$$

شرط مرزی نویمن

$$\begin{cases} -u_x(0,t) = h_1(t) \\ u_x(L,t) = h_2(t) \end{cases}$$

اگر $h_1(t)=0$ آنگاه ناحیه در نقطه $x=0$ عایق است.

شرط مرزی روبین : $u_x(0,t)+\alpha u(0,t)=h_1(t)$

تمرین : فرض کنید یک میله به طول (a,b) داریم که در دو سر آن عایق گرمایی است و طول میله در حال انبساط است. نشان دهید وقتی (a,b) به بازه $(0,1)$ تصویر شود شرط مرزی روبین به دست می‌آید.

$$u_t=u_{xx} \qquad a(t)<x<b$$

$$\dot{a}=v \Rightarrow a(t)=a_0+vt$$

در ابعاد بالاتر شرط مرزی نیومن (عایق) $\qquad D\nabla u\cdot\vec{n}=h(x,t)$

مثال ساده

$$\begin{cases} u_t=u_{xx} & 0\le x\le L \\ u(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=u_0\,, \quad u(L,t)=u_L \end{cases}$$

$$v=u_0+\frac{x}{L}\cdot(u_L-u_0) \Rightarrow v_t=v_{xx}=0$$

$$\Rightarrow w:=u-v \Rightarrow \begin{cases} w_t=w_{xx} \\ w(x,0)=g(x)-v(x)=h(x) \\ w(0,t)=w(L,t)=0 \end{cases}$$

$$w_t=0 \Rightarrow \quad w_{xx}=0 \Rightarrow w(x,t)=Ax+B$$ جواب مستقل از زمان

$$\Longrightarrow w=0$$

حالت تعادل : جوابی که تغییرات آن نسبت به زمان صفر باشد ، $u_t=0 \Leftarrow$

$$u(x,t) = u_0 + \frac{x}{L}(u_L - u_0)$$

جوابی به صورت

$$\omega(x,t) = W(x)\,T(t)$$

$$\omega_t = \omega_{xx} \Rightarrow \begin{cases} \dot{T}\cdot W = W''\cdot T \\ W(0) = W(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{W(x)}{W''(x)} = \frac{T(t)}{\dot{T}(t)} = \lambda^{-1}$$

مقدار ثابت

$$T(t) = e^{\lambda t}\,T(0)$$

$$W'' = \lambda W$$

حالت اول : $-\mu^2 = \lambda < 0$

$$W(x) = A\sin\mu x + B\cos\mu x$$

$$W(0) = W(L) = 0 \Rightarrow B = 0,\quad \sin\mu L = 0$$

$$\mu L = n\pi \Rightarrow \lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$W_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

حالت دوم:

$$.A=B=0 \Leftarrow W(x)=Ax+B \Leftarrow \lambda=0$$

حالت سوم:

$$W(x)=c_1\sinh(\mu x)+c_2\cosh(\mu x) \Leftarrow \mu^2=\lambda>0$$

$$W(0)=0 \Rightarrow c_2=0$$

$$W(L)=0 \Rightarrow c_1\sinh(\mu L)=0 \Rightarrow c_1=0$$

جمع‌بندی: همه جواب‌های معادله

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 \end{cases}$$

که به صورت $w(x,t) = W(x)T(t)$ هستند عبارتند از

$$\boxed{w_n(x,t) = c_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

$c_n \in \mathbb{R}$

$n = 1, 2, 3, \dots$

نکته مهم: خطی بودن معادله و شرایط مرزی نتیجه می‌دهد که مجموع تعداد متناهی جمله فوق در معادله صدق می‌کند.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \overset{?}{=} h(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

همگرایی یکنواخت سری

آزمون M ـ وایرشتراس

$$|f_n(x)| \le M_n \,, \quad \sum M_n < \infty \Longrightarrow$$ $\sum f_n$ همگرایی یکنواخت

$$f'(x) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

<u>چالش اول:</u> (سری فوریه) تساوی $w(x,0)=h(x)$ ؟

<u>چالش دوم:</u>

$$w_t \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t w_n$$

$$w_{xx} \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{xx} w_n$$

<u>چالش سوم:</u> شرایط مرزی $w(0,t)=w(L,t)=0$ ؟

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t)$$

لازم است همگرایی نقطه‌وار برقرار باشد.

PDE

صبح - ۹۶/۱/۱۵

سری فوریه :

f(x) تابعی با دوره تناوبی $2T = \frac{2\pi}{\omega}$ متناظر آن سری زیر را نسبت می‌دهیم

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

با فرض تساوی در رابطه بالا

$$\int_{-T}^{T} f(x)\cos(m\omega x)\,dx = \cancel{\frac{a_0}{2}\int_{-T}^{T}\cos(m\omega x)\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T}^{T} a_n \cos(n\omega x)\cos(m\omega x)\,dx + \int_{-T}^{T} b_n \cancel{\sin(n\omega x)}\cos(m\omega x)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\delta_{mn}\times 2T = T a_m$$

روابط اویلر- فوریه

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin(n\omega x)\,dx$$

زوج $f \Longrightarrow b_n = 0 \Longrightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x)$

سری فوریه کسینوسی

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$$

اگر f تابعی باشد که در بازه $[0,T]$ تعریف شده است می‌توان آن را با یک سری کسینوسی نمایش داد که ضرایب آن از روابط قبل محاسبه می‌شوند.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x)$$

شرایط سری را ابتدا فراهم کنیم

همچنین می‌توان نوشت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)\,dx$$

تذکر :

$$\left\{\begin{array}{l} \sin(n\omega x) = \dfrac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \\[2ex] \cos(n\omega x) = \dfrac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \end{array}\right. \longrightarrow$$ در سری فوریه جایگزین کنید

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \underbrace{e^{in\omega x}}_{e_n(x)}$$

$$C_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,\underbrace{e^{-in\omega x}}_{\overline{e_n(x)}}\,dx = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}$$

تذکر: (تعمیم سری فوریه) اگر بدانیم $\{e_n\}_{n\in I}$ پایه متعامد برای فضای $L^2[0,T]$ باشد

$$f(x)=\sum_{n\in I}\frac{\langle f,e_n\rangle}{\|e_n\|^2}\cdot e_n$$

این رابطه همان سری فوریه کسینوسی است وقتی $e_n=\cos n\omega x$

و سری فوریه سینوسی است وقتی $e_n=\sin(n\omega x)$

و سری فوریه برای فضای $L^2[-T,T]$ است وقتی $e_n=e^{in\omega x}$.

قضیه: اگر

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

و $f \in L^2[-T,T]$ باشد (یعنی $\int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx < \infty$) آنگاه

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-T}^{T} |f(x) - S_N(x)|^2 \, dx = 0$$

نتیجه: (تساوی پارسوال) با شرایط قضیه قبل

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

فرض کنید $f \in C^1$ یک تابع $2T$-متناوب و a_n' و b_n' ضرایب فوریه تابع f' باشند

$$a_n' = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f'(x)\, \cos(n\omega x)\, dx$$

$$= \frac{1}{T}\underbrace{\cancel{f(x)\cos(n\omega x)\Big|_{-T}^{T}}}_{0} + \frac{n\omega}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\, \sin(n\omega x)\, dx$$

$$= n\omega b_n$$

$$b_n' = -n\omega a_n$$

نکته: اگر سری فوریه f و f' همگرا باشد و a_n و b_n ضرایب f باشند آنگاه باید

$$\sum n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)<\infty$$

و اگر $f\in C^k$ آنگاه باید $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}\left(a_n^2+b_n^2\right)<\infty$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)$$

$$f'(x)\overset{?}{=}\sum_{n=1}^{\infty}-n\omega a_n\sin(n\omega x)+n\omega b_n\cos(n\omega x)$$

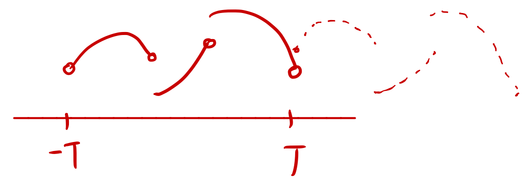
شرط همگرایی نقطه وار سری فوریه : تابع f در بازه $[-T,T]$ در همه نقاط به غیر از تعداد متناهی نقطه پیوسته است

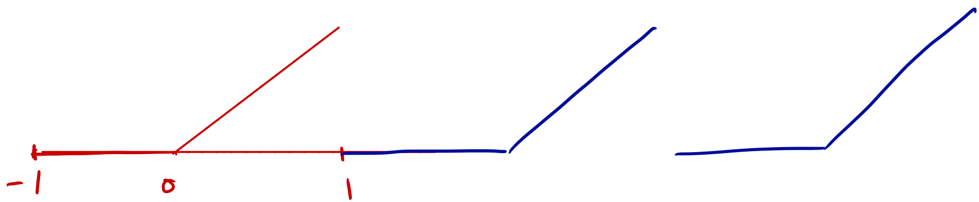
و در همه نقاط مشتق چپ و راست وجود دارند. (شرط دیریکله)

قضیه : f در شرط دیریکله صدق کند آنگاه سری فوریه در هر نقطه $x \in [-T,T]$ همگرا است به

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

$$f(x\pm) = \lim_{t \to x^\pm} f(t)$$





نکته: در نقاط پیوستگی f سری فوریه به $f(x)$ همگرا است.

همگرایی یکنواخت: $\sup_{-\pi \le x \le \pi} |S_N(x) - f(x)| = \|S_N(x) - f(x)\|_\infty \longrightarrow 0$

آزمون M وایرشتراس: اگر $|g_n(x)| \le M_n$ و $\sum M_n < \infty$ آنگاه $\sum g_n$ همگرای یکنواخت است.

$$\left| a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \right| \leq |a_n| + |b_n|$$

اگر $\sum a_n^2 + b_n^2 < \infty \leftarrow f \in L^2$

اگر $\sum n^2(a_n^2 + b_n^2) < \infty \leftarrow f \in C^1$

$$2a_n = 2n a_n \times \frac{1}{n} \leq n^2 a_n^2 + \frac{1}{n^2}$$

نتیجه: اگر $f \in C^1$ آنگاه سری فوریه همگرای یکنواخت است.

قضیه: اگر f در شرط دیریکله صدق کند و در بازه $[-T,T] \supseteq [\alpha,\beta]$ پیوسته باشد آنگاه سری فوریه در $[\alpha,\beta]$ همگرای یکنواخت است.

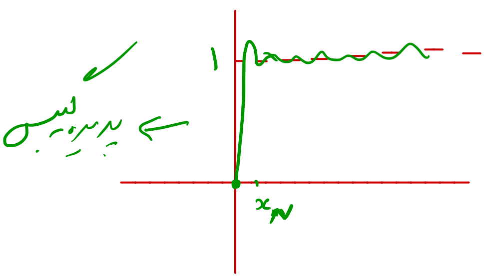
نکته: اگر $f(-T)=f(T)$ و در یک همسایگی T تابع f پیوسته باشد (وقتی f را به صورت متناوب توسعه دادیم)

آنگاه سری فوریه در این همسایگی به طور یکنواخت همگرا است.

مثال:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<\pi \\ -1 & -\pi<x<0 \end{cases}$$

$$f(x)=\sum b_n \sin(nx)$$



$$\exists \varepsilon, x_N : S_N(x_N) > 1+\varepsilon$$

$$x_N \longrightarrow 0$$

PDE

جلسه دوم - ۹۶/۱/۲۰

معادله گرما :

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 \\ w(x,0) = h(x) \end{cases}$$

کاندید جواب :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = h(x)$$

شرایط روی پیوستگی h .

تکه‌وار

شرط لازم برای مشتق‌پذیری $w(x,t)$ این است که $\sum n^2|c_n|$ همگرا باشد.

اگر $h \in C^2$ آنگاه این شرط برقرار است. در این صورت به وضوح به طور نقطه‌ای در معادله صدق می‌کند. (نکته: با شرط $0=h(0)=h(L)$ نتیجه می‌شود که سری کسینوس‌های یکنواخت است و در نتیجه $w(x,t)$ به ازای هر $t>0$ و $0 \le x \le L$ تعریف می‌شود.)

جواب ضعیف:

$$0=\int_0^T\int_0^L \varphi(w_t-w_{xx})\,dx\,dt$$

$$=\int_0^T\int_0^L -\varphi_t w+\varphi_x w_x\,dx\,dt+\cancel{\left[\int_0^L \varphi w\,dx\right]_{t=0}^{T}} - \int_0^L \varphi(x,0)\,h(x)\,dx$$

$$-\cancel{\left[\int_0^T \varphi w_x\,dt\right]_{x=0}^{L}}$$

$\varphi(x,T)=0$

$\varphi(0,t)=\varphi(L,t)=0$

$$w_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\begin{cases} \partial_t w_N = \partial_{xx} w_N \\ w_N(0,t) = w_N(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^T \int_0^L -\varphi_t w_N + \varphi_x \partial_x w_N \, dx \, dt + \cancel{\left[\int_0^L \varphi w \, dx\right]_{t=0}^{T}} - \int_0^L \varphi(x,0)\, w_N(x,0)\, dx$$

اگر سری فوریه w همگرایی یکنواخت باشد می‌توان از ارتباط بالا حد گرفت و نشان داد که w یک جواب ضعیف است. بنابراین اگر h یک تابع پیوسته باشد و $h(0)=h(L)=0$ آنگاه w یک جواب ضعیف است.

سوال: اگر $h\in L^2 \Rightarrow \sum c_n^2<\infty$ نشان دهید سری $u(x,t)$ همگرای یکنواخت است برای هر $t>0$.

معادله گرما در ابعاد بالاتر

معادلات سهموی $\leftarrow$
$$\begin{cases} u_t = D\,\Delta u & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=h(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

$$\Omega_T=\Omega\times(0,T)$$

مرز سهموی $\quad \partial_p\Omega_T=\left(\Omega\times\{t=0\}\right)\cup\left(\partial\Omega\times[0,T]\right)$

شرط مرزی دیریکله $u = g$ روی $\partial\Omega \times (0,T)$

شرط مرزی نویمن $\nabla u \cdot \vec{n} = \partial_n u = g$

که $\vec{n}$ بردار عمود بر مرز $\partial\Omega$

شرط مرزی روبین: $\partial_n u + \alpha u = g$

شرط مرزی مرکب (mixed)

$$\begin{cases} u = g_D & \text{on } \Gamma_D \\ u = g_N & \text{on } \Gamma_N \end{cases}$$

$$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \phi$$

$$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega \times (0,T)$$

$$u(x,t) = v(x)\cdot\theta(t)$$

$$u_t = D\Delta u \Rightarrow v\cdot\theta' = D\cdot\Delta v\cdot\theta \Rightarrow D\,\frac{\Delta v}{v} = \frac{\theta'}{\theta} = \lambda$$

$$\theta' = \lambda\theta \Rightarrow \theta(t) = e^{\lambda t}\cdot\theta(0)$$

مسأله مقدار ویژه $\leftarrow$ $\begin{cases} \Delta v = \lambda/_D\, v & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u \\ u = g & \text{on } \partial\Omega\times(0,T) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} w_t - D\Delta w = f \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T) \end{cases}$$

مقادیر ویژه (مثبت!) دنباله $0<\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots$ وجود دارند به

به همه و متناظر آن v_n که $\Delta v_n=-\lambda_n v_n$. در این صورت

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t}\, v_n(x)$$

جواب معادله گرما است.

روش گالرکین .

یکتایی جواب : اگر u و u' دو جواب معادله باشند قرار دهیم $w = u - u'$ آنگاه

$$\begin{cases} w_t - D\Delta w = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ \text{شرط مرزی} = 0 \end{cases} \xrightarrow{?} w = 0$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$C_n(t) = \frac{2}{T} \int_0^T w(x,t) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$$C_n(0) = 0$$

$$w_t - w_{xx} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = 0$$

$$\Rightarrow C_n' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n = 0 \Longrightarrow C_n = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2\,dx = \int_\Omega 2\,w\,w_t\,dx$$

$$= 2\int_\Omega w\,D\Delta w\,dx$$

$$= -2D\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + 2\int_{\partial\Omega} D\,w\,\partial_n w\,dx$$

$$\leq 0$$

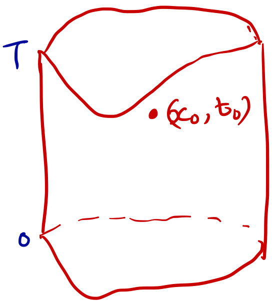
از طرفی $\int_\Omega w^2(x,0)\,dx = 0$ پس $\int_\Omega w^2(x,t)\,dx = 0$

برای هر t در نتیجه $w \equiv 0$.

اصل ماکسیمم: w یک جواب معادله گرمای (یک کران‌دار است)

$$w_t - D\Delta w = q \le 0 \quad \text{in } \Omega_T$$

که دوبار مشتق‌پذیر است (نسبت به x دوبار، نسبت به t یکبار) $C^{2,1}(\Omega_T)$



در این صورت w ماکسیمم خود را روی $\partial_p \Omega_T$ می‌گیرد.

اثبات_ فرض کنید $w(x_0,t_0)$ ماکسیمم w در Ω_T باشد.

$$w_t(x_0,t_0) = 0$$

بنابر آزمون مشتق دوم $D^2 w(x_0,t_0) \le 0 \Longrightarrow \Delta w(x_0,t_0) \le 0$

اگر $q<0$ قضیه اثبات می‌شود.

$$w^\varepsilon(x,t) = w(x,t) - \varepsilon t$$

$$\partial_t w^\varepsilon - D\Delta w^\varepsilon = f - \varepsilon < 0$$

بنابراین w^ε ماکسیمم خود را روی $\partial_p\Omega_T$ می‌گیرد و از آنجا که $w^\varepsilon \to w$ یکنواخت داریم

$$\max_{\partial_p\Omega_T} w = \max_{\Omega_T} w .$$

تذکر: این قضیه به اصل ماکسیمم ضعیف معروف است. اصل ماکسیمم قوی بیان می‌کند که اگر ماکسیمم w در نقطهٔ درونی (x_0,t_0) به‌دست آید آنگاه w در $\Omega\times[0,t_0]$ یک تابع ثابت است.

نکته: اگر $w_t - D\Delta w \geq 0$ آنگاه

$$\min_{\Omega_T} w = \min_{\partial_p \Omega_T} w$$

نکته: اگر $w_t - D w = 0$ آنگاه

$$\max_{\Omega_T} |w| = \max_{\partial_p \Omega} |w|$$

$$\Rightarrow \quad |w(x,t)| \leq \max_{\partial_p \Omega} |w|$$

پایداری: فرض کنید $v_t - D\Delta v = f_1$ و $w_t - D\Delta w = f_2$ آنگاه

(1) اگر $f_1 \geq f_2$ و $v \geq w$ روی $\partial_p \Omega_T$ آنگاه

$v \geq w$ در Ω_T. (اصل مقایسه)

(۲)

$$\max_{\Omega_T} |v-w| \leq \max_{\partial_p \Omega_T} |v-w| + T \cdot \max_{\Omega_T} |f_1 - f_2|$$

(پایداری)

$$u_t - D\Delta u = f \qquad m = \max |f|$$

$$v = u - mt \implies v_t - D\Delta v = f - m \leq 0$$

$$\implies \max_{\Omega_T} v = \max_{\partial_p \Omega_T} v$$

$$\implies u \leq \max_{\partial_p \Omega_T} (u - mt) + mT$$

$$\leq \max_{\partial_p \Omega_T} |u| + m.T$$

PDE

جلسه یازده - ۹۶/۱/۲۷

معادله گرما در دامنه بیکران

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi$$

$$(f')^{\wedge}(\xi) = i\xi\, \hat{f}(\xi)$$

$U(\xi,t) = \hat{u}(\cdot\,,t)$ $\longrightarrow$ تبدیل فوریه نسبت به متغیر x

$$\begin{cases} \partial_t U + D\xi^2 U = 0 \\ U(\xi,0) = \hat{g} \end{cases} \Longrightarrow U(\xi,t) = e^{-D\xi^2 t}\, \hat{g}(\xi)$$

$$(f*h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, h(y)\, dy$$

$$\Rightarrow \quad (f*h)^{\wedge} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f} \cdot \hat{h}$$

$$u(x,t) = \Gamma * g \qquad \left(U(\xi,t) = \hat{\Gamma} \cdot \hat{g} \right)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Dt\xi^2}$$

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-Dt\xi^2} \cdot e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$u_t - D\,u_{xx} = 0$$

$$(t, x, u) \longmapsto (bt, ax, cu)$$

$$u^*(x,t) = c\,u(ax, bt)$$

$$\partial_t u^* - D u^*_{xx} = c\left[b\,\partial_t u - D a^2 \partial_{xx} u \right]$$

$$\boxed{b = a^2} \Longrightarrow$$ u^* جواب مسئله.

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = q$$ ثابت $0<t$ برای هر

$$\int u^*(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} c\,u(ax, bt)\,dx = \frac{c}{a}\int u(y,t)\,dy = \frac{cq}{a}$$

$$\boxed{c = a}$$

$$u(x,t) \longmapsto a\,u(ax, a^2 t)$$

$$u^*(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, U\Big(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{t}}}_{z}\Big)$$

$$u^*_t = -\tfrac{1}{2} t^{-3/2}\, U(z) + t^{-1/2}\, U' \times \left(-\tfrac{1}{2}\right) t^{-3/2} x$$

$$u^*_{xx} = t^{-3/2}\, U''$$

$$u^*_t - D u^*_{xx} = t^{-3/2}\left[-\tfrac{1}{2} U - \tfrac{1}{2} z U' - D U''\right]$$

$$\Rightarrow \quad D U'' + \tfrac{1}{2} z U' + \tfrac{1}{2} U = 0$$

این ODE تحت تبدیل $z \mapsto -z$ حفظ می‌شود
لذا می‌توان فرض کرد جواب آن تابع زوج است.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D U' + \frac{1}{2} z U\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad D U' + \tfrac{1}{2} z U = C$$

$$U'(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$U' = -\frac{z}{2D} U \Rightarrow U(z) = c_0 e^{-\frac{z^2}{4D}}$$

$$u^*(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4tD}} = \frac{q}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4tD}}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4tD}} dx = 1 \quad \forall t > 0$$

$$\boxed{\Gamma_D(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4tD}}} \rightarrow \text{Heat Kernel}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \Gamma_D(x,t) = 0$$ وقتی $x \neq 0$

$$\lim_{t\to 0^+} \Gamma_D(x,t) = +\infty$$ وقتی $x = 0$

$$\lim_{t\to 0^+} \Gamma_D(x,t) = \delta(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, f(x)\, dx = f(0)$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$. δ یک تابع تعمیم یافته است !

$$\begin{cases} (\partial_t - D\,\partial_{xx})\,\Gamma_D = 0 & t > 0 \\ \Gamma_D(x,0) = \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$(*) \qquad u(x,t) = \Gamma_D * g = \int \Gamma_D(x-y,t)\, g(y)\, dy \qquad t>0$$

قضیه : فرض کنید g یک تابع کران‌دار پیوسته باشد.

(۱) تابع $(*)$ متعلق به $C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ است و در معادله $u_t - D u_{xx} = 0$ صدق می‌کند.

(۲) $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$ برای هر x_0

(۳) $|u(x,t)| \le \max\limits_{\mathbb{R}} |g|$

$$\partial_x \int_{\mathbb{R}} K(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\partial_x K(x,y)}\,dy$$

اگر این تابع انتگرال‌پذیر باشه تساوی بالا درسته.

اثبات ۲

$$u(x,t) - g(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(y,t)\, g(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(y,t)\, g(x_0)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(y,t)\left[g(x-y) - g(x_0)\right] dy = I_1 + I_2$$

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : |z - x_0| < \delta \Rightarrow |g(z) - g(x_0)| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \delta/2 \,,\quad |y| < \delta/2$$

$$|I_1| = \left| \int_{|y|<\delta/2} \Gamma_D(y,t)\,[g(x-y) - g(x_0)]\,dt \right| < \varepsilon$$

for $|x - x_0| < \delta/2$

$$|I_2| = \left| \int_{|y|>\delta/2} \Gamma_D(y,t)\,[g(x-y) - g(x_0)]\,dt \right|$$

$$\leq 2\|g\|_\infty \int_{|y|>\delta/2} \Gamma_D(y,t)\,dt \longrightarrow 0 \qquad t \to 0^+ \text{ وقتی}$$

نکته: در صورت قضیه شرط پیوستگی g را می‌توان حذف کرد در این صورت گزاره ۲

وقتی g در x_0 پیوسته است، صحیح است.

معادله ناهمگن

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$v = u - \Gamma_D * g \implies \begin{cases} v_t - D v_{xx} = f(x,t) & t>0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^s_t - D w^s_{xx} = 0 & t > s \\ w^s(x,s) = f(x,s) \end{cases}$$

توزیع جمعیت از جهت وارد شده به محیط در زمان $t=s$

$$v(x,t) = \int_0^t w^s(x,t)\, ds$$

$$w(x,t,s) = w^s(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,t-s) f(y,s)\, dy$$

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,\, t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds$$

این روش را روش دوهامل برای حل معادلات ناهمگن گوییم.

قضیه: اگر f پیوسته و کران دار باشد آنگاه v جواب معادله زیر است.

$$\begin{cases} v_t - D\,v_{xx} = f(x,t) \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

اثبات:

$$v(x,t) = \int_0^t w(x,t,s)\, ds \implies v_t = \underset{f(x,t)}{\cancel{w(x,t,t)}} + \int_0^t \underset{D\,\partial_{xx} w}{\cancel{\partial_t w(x,t,s)}}\, ds$$

$$v_{xx} = \cdots$$

PDE

جلسه دوازده - ۹۶/۱/۲۹

معادله گرما در ناحیه بیکران

$$(1)\quad \begin{cases} u_t - D\,u_{xx} = f(x,t) & x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = g(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

در حالت کلی معادله فوق جواب یکتا ندارد. در واقع معادله همگن

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

جواب‌های غیر صفر دارد که به جواب‌های غیرفیزیکی معروف است. (در واقع این جواب‌ها بیکران هستند)

نکته: اصل ماکسیمم در حالت کلی وقتی دامنه بیکران است برقرار نیست.

اصل ماکسیمم در ناحیه بیکران: اگر $u(x,t)$ جواب معادله گرما (1) باشد که در رابطه

$$(2) \qquad |u(x,t)| \leq A e^{a|x|^2}$$

برای مقادیر ثابت $a, A > 0$ صدق کند آنگاه

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ t\in\mathbb{R}^+}} |u(x,t)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$$

یکتایی: اگر u و v دو جواب (1) باشند که هر دو در شرط (2) صدق کنند آنگاه

$$u = v$$

<u>پایداری</u>: جواب کران‌دار (۱) در نامساوی زیر صدق می‌کند:

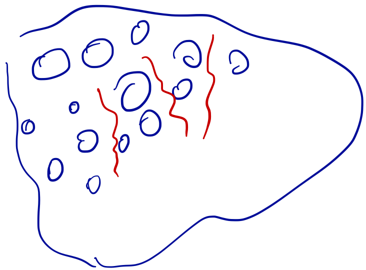
$$\inf_{\mathbb{R}} g + t \inf_{\mathbb{R}} f \le u(x,t) \le \sup_{\mathbb{R}} g + t \sup_{\mathbb{R}} f$$

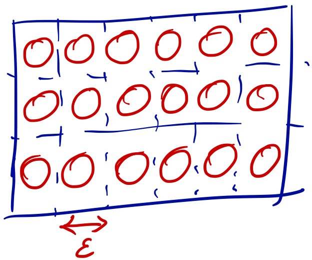
$$u = \Gamma_D * g + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,\, t-s)\, f(y,s)\, dy\, ds$$

با توجه به مطالب جلسه قبل جواب کران‌دار (۱) از رابطه بالا به دست می‌آید.

$$|u(x,t)| \le \sup |g| + t \sup |f|$$

معادله پخش غیرخطی . (مدل محیط‌های متخلخل)





$$a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = a_\varepsilon(x)$$

$$0 < \varepsilon \ll 1$$

$$u^\varepsilon_t - \left(a_\varepsilon(x)\, u^\varepsilon_x\right)_x = 0$$

$$\varepsilon \to 0 \qquad u^\varepsilon \to u^0$$

$$u^0_t - \left(a_0\, u^0_x\right)_x = 0$$

$$a_0(u^0)$$

مدل اصلی ما

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho V) = 0$$

نفوذپذیری

$$V = -\frac{\mu}{\nu} \nabla P \qquad P = P_0 \rho^{\alpha}$$

لزجی (چسبندگی)

$$\rho_t - C \operatorname{div}(\underbrace{\rho^{\alpha} \nabla \rho}_{\nabla(\rho^{\alpha+1})}) = 0$$

ساده سازی $\rightarrow$ $C=1$.

$$\boxed{\rho_t - \Delta(\rho^m) = 0}$$

$$\rho_t - (\rho^m)_{xx} = 0$$

$$\rho(x,t) \longmapsto c\rho(ax, bt) = \rho^*$$

$$\rho^*_t = bc\rho_t$$

$$(\rho^{*m})_{xx} = c^m a^2 (\rho^m)_{xx}$$

$$bc = c^m a^2 \qquad \int_{\mathbb{R}} \rho^* = \int_{\mathbb{R}} \rho = 1$$

$$\int \rho^* = \int_{\mathbb{R}} c\rho(ax, bt)\,dx = \frac{c}{a}\int \rho \implies c = a$$

$$(t, x, \rho) \longmapsto (a^{m+1} t, ax, a\rho)$$

$$\rho(x,t) = t^{-\beta} U\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right) \qquad \beta = \frac{1}{m+1}$$

$$a\rho(ax, \underbrace{a^{m+1}t}_{1}) = \rho(x,t)$$

$$\rho_t = -\beta t^{-\beta-1} U(\xi) + t^{-\beta} U'(\xi)\left[-\beta t^{-\beta-1} x\right]$$

$$= -\beta t^{-\beta-1}\left[U - \xi U'\right]$$

$$(\rho^m)_{xx} = t^{-\beta m} (U^m)'' \times \left(\frac{1}{t^{\beta}}\right)^2$$

$$(U^m)'' \times \cancel{t^{-\beta m - 2\beta}} = \left[U - \xi U'\right] \times \left(-\beta \cancel{t^{-\beta-1}}\right)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[(m+1)(U^{m})' + \xi U\right] = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} U(\xi)\, d\xi = 1$$

$$m(m+1)\,U^{m-1}\,U' + \xi U = C$$ ثابت

$$\frac{(m+1)m}{m-1}\left(U^{m-1}\right)' = -\xi \leftarrow C=0$$ اگر

$$\hookrightarrow U = \left[A - B\xi^{2}\right]^{\frac{1}{m-1}}$$

$$\rho(x,t) = t^{-\beta}\left[A - B\left(x t^{-\beta}\right)^{2}\right]^{\beta}$$

روش‌های عددی

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f & 0<x<1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$x_i = ih \quad , \quad h = 1/N \quad , \quad 0 \leq i \leq N$$

$$x_0 = 0 \, , \; x_N = 1$$

$$u_{xx}(x_i,t) \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x_{i+1},t) - 2u(x_i,t) + u(x_{i-1},t)\right]$$

$$u_i(t) = u(x_i,t)$$

$$\text{ODE} \leftarrow \begin{cases} \dot{u}_i(t) - \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right] = f(x_i,t) \\ u_0(t) = 0 = u_N(t) \\ u_i(0) = g(x_i) \end{cases}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \dot{U} + A_h U = F$$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & -2 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \ddots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{U} \approx \frac{1}{\tau}\left[U(t^{n+1}) - U(t^n)\right] \qquad t^n = n\tau$$

$$\boxed{U(t^{n+1}) = U(t^n) + \tau F(t^n) - \tau A_h U(t^n)}$$

نکته مهم: اگر شرط مرزی نیومن باشد مثلاً $u_x(1,0)=0$

به جای شرط $u_N(t)=0$ قرار می‌دهیم:

$$0 = u_x(x_N, t) \approx \frac{1}{4h}\left[-3u(x_{N-2},t) + 2u(x_{N-1},t) + u(x_N,t)\right] + O(h^2)$$

$$\approx \frac{1}{h}\left[-u(x_{N-1},t) + u(x_N,t)\right] + O(h)$$

تمرین - مقایسه دو روش بالا برای تقریب مشتق.

$$p(x+a) = p(a) + x p'(a) + O(x^2)$$

$$u(x_{N-2},t) = u(x_N,t) - 2h\, u_x(x_N,t) + O(h^2)$$

$$u(x_{N-1},t) = u(x_N,t) - h\, u_x(x_N,t) + O(h^2)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} , \quad A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & 0 & & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

پایداری:

$$U_{n+1} = (I - \tau A_h) U_n + \tau F_n$$

فرض کنید $f=0$ یعنی $F_n \equiv 0$.

$$U_n = (\underbrace{I - \tau A_h}_{B})^n U_0$$

قضیه:

$$\mathrm{Spec}(A_h) = \left\{ \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi i h}{2}\right) \right\}_{i=1}^{N-1}$$

نتیجه - اگر $\left|1 - \frac{4\tau}{h^2}\right| < 1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \|U_n\| = 0$.

$$-1 < 1 - \frac{4\tau}{h^2} < 1$$

$$\boxed{\tau < h^2/2} \Leftarrow 0 < \frac{\tau}{h^2} < 1/2$$

وقتی $F \neq 0$ و کران دار است:

$$U_n = B^n U_0 + \tau\left(B^n F_0 + \cdots + B F_{n-1} + F_n\right)$$

$$\|U_n\| \le \|B^n\| \cdot \|U_0\| + \tau\left(\underbrace{\|B^n\| + \cdots + \|B\| + 1}_{\frac{1}{1-\|B\|}}\right) \cdot \|F\|$$

PDE

حل سری فوریه - ۹۶/۲/۳

معادله لاپلاس:

- حالت تعادل معادله گرما $u_t - c^2\Delta u = f$

$$u_t \equiv 0 \implies -c^2\Delta u = f(x) \quad \text{in } \Omega$$

- پتانسیل الکتریکی . ρ توزیع بار الکتریکی ، E میدان الکتریکی

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$E = -\nabla u$$ u پتانسیل الکتریکی

$$\implies -\underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{-\Delta u} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$\Delta u = 0 \longrightarrow$ توابع هارمونیک

اگر $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی باشد، روابط کوشی - ریمان نتیجه می‌دهد که اگر $f = u + iv$

آنگاه

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

مثال $f(z) = z^n = (x+iy)^n \Rightarrow u = \operatorname{Re} f = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots$

$u = r^n \cos n\theta \longrightarrow$ در مختصات قطبی

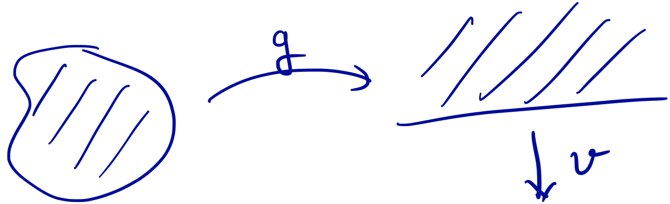
$v = r^n \sin n\theta$

مثال - $f(z) = e^z = \underbrace{e^x \cos y}_{} + i \underbrace{e^x \sin y}_{}$

توابع هارمونیک

مثال - $\log z = \ln r + i\theta \longrightarrow \begin{cases} \ln(x^2+y^2) & \text{هارمونیک} \\ \theta = \tan^{-1} y/x & \text{هارمونیک} \end{cases}$

هارمونیک $\longrightarrow$ در ناحیه $\mathbb{R}^2 - \{\theta = 0\}$



$u = v \circ g$

$\mathbb{R}$

$$\Delta u \overset{?}{=} |g'|^2 \, \Delta v \circ g$$

$u = h$ on $\partial\Omega$: شرط مرزی دیریکله

$\nabla u \cdot \vec{n} = \partial_n u = h$ on $\partial\Omega$: شرط مرزی نیومن

بردار عمود برونگرا روی مرز

$\alpha > 0$, $\partial_n u + \alpha u = h$: شرط مرزی رابین

ـ شرط مرزی مرکب : ؟ ؟ ؟

یکتایی جواب: مسأله $\Delta u = f$ با یکی از شرایط مرزی دیریکله - نویمن یا ترکیب در فضای $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ یکتا است. اگر شرط مرزی نویمن باشد، اختلاف هر دو جواب یک عدد ثابت است.

اثبات - اگر u و v دو جواب باشند، $w=u-v$ آنگاه $\Delta w=0$ و شرط مرزی هم صفر است.

باید نشان دهیم $w=0$.

$$0=\int_\Omega w\,\Delta w\,dx$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(w\nabla w)\,dx=\int_{\partial\Omega} w\nabla w\cdot\vec{n}\,d\sigma \leq 0$$

با بررسی شرایط مرزی مختلف

$$\int_\Omega \cancel{w\Delta w}^{\,0} + |\nabla w|^2\,dx \leq 0$$

$\Rightarrow$ $\nabla w \equiv 0$ در Ω $\Rightarrow$ $w \equiv$ ثابت در Ω

برای شرایطِ مرزیِ دیریکله، روبن و مرکب این مقدار ثابت صفر است.

خاصیت مقدار میانگین

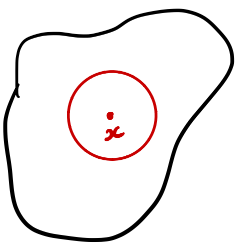
$\Delta u = 0$ در Ω، $u \in C^2(\Omega)$، $x \in \Omega$ و R عددی است که

$$B_R(x) \subseteq \Omega$$

آنگاه

$$u(x) = \fint_{B_R(x)} u(y)\,dy = \frac{\int_{B_R(x)} u(y)\,dy}{\int_{B_R} 1\,dy}$$

$$u(x) = \fint_{\partial B_R(x)} u(y)\,d\sigma$$



این دو روابط معادل هستند.

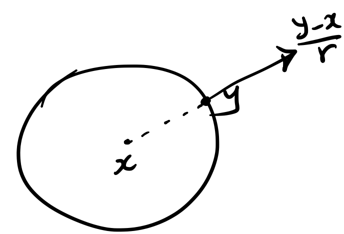
$$|\partial B_r| = n\,\omega_n\, r^{n-1} \quad , \quad |B_r| = \omega_n\, r^n$$

$\omega_n =$ حجم کره n بعدی به شعاع یک

$$\omega_2 = \pi, \quad \omega_3 = \tfrac{4}{3}\pi$$

$$g(r) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma_y = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\, r^{n-1}\, d\sigma_z$$

$$g'(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(\underbrace{x+rz}_{y}) \cdot z \; d\sigma_z$$



$$= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \underbrace{\frac{y-x}{r}} \; \frac{d\sigma_y}{r^{n-1}}$$

بردار نرمال روی سطح

قضیه استوکس $$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \operatorname{div}(\nabla u)\, dy = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{B_r} \Delta u(y)\, dy = 0$$

$$\Longrightarrow g(r) \equiv 0 \Longrightarrow g(0) = \lim_{r \to 0} g(r) = g(r)$$

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma_y$$

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

تمرین: اثبات کنید

نکته: اگر $\Delta u \underset{\geq}{\leq} 0$ آنگاه

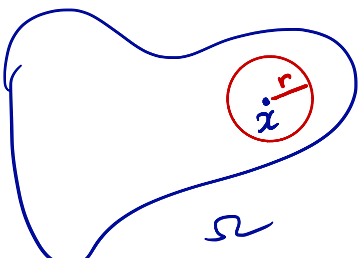
$$u(x) \underset{\leq}{\geq} \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

اصل ماکسیمم: اگر $\Delta u \le 0$ در Ω آنگاه u مینیمم خود را روی مرز Ω می‌گیرد.

به علاوه اگر Ω همبند باشد و در یک نقطه درون $x \in \Omega$، $u(x) = \min_{\Omega} u$ آنگاه u یک تابع ثابت است.

نکته: اگر $\Delta u \ge 0$ آنگاه به جای مینیمم در قضیه بالا عبارت ماکسیمم را می‌توان جایگزین کرد.

اثبات: $\Delta u \le 0 \Longrightarrow u(x) \ge \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy$ که $B_r(x) \subseteq \Omega$



$$u(y) \ge \min_{\Omega} u = m$$

از طرفی $u(x) = m$ در نتیجه

$$m = u(x) \ge \fint_{B_r(y)} u(y)\,dy \ge m \Rightarrow u\big|_{B_r(x)} \equiv m$$

بنابراین $\{z\in\Omega : u(z)=m\}$ یک مجموعه باز و بسته است. بنابر همبندی این مجموعه برابر Ω است.

نتیجه (پایداری) اگر جواب

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

را با u_g نشان دهیم و به جای g توابع g_1 و g_2 را در نظر بگیریم آنگاه

(۱) اگر $g_1 \geq g_2$ روی $\partial\Omega$ آنگاه $u_{g_1} > u_{g_2}$ روی Ω.
$(g_1 \neq g_2)$

$$|u_{g_1}(x) - u_{g_2}(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| \quad \forall x\in\Omega \qquad (۲)$$

PDE

جلسه چهارده

۹۶/۲/۱۰

معادله لاپلاس (فضاهای وجودی)

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حالت ساده $\Omega = B_1(0)$ ، $f \equiv 0$.

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u = 0 \qquad 0<r<1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\downarrow$$

$$u(r,0) = u(r,2\pi)$$

$$u_\theta(r,0) = u_\theta(r,2\pi)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(\theta) \cdot R_n(r)$$

$$\Theta_n(0) = \Theta_n(2\pi) \quad , \quad \Theta_n'(0) = \Theta_n'(2\pi)$$

$$\frac{1}{r}(rR_n')' \cdot \Theta_n + \frac{1}{r^2} R_n \Theta_n'' = 0$$

$$\frac{r(rR_n')'}{R_n} = -\frac{\Theta_n''}{\Theta_n} = \lambda_n \quad \text{ثابت}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \alpha_n \sin(n\theta) + \beta_n \cos(n\theta)$$

$$r(rR_n')' = n^2 R_n \Rightarrow r^2 R_n'' + r R_n' - n^2 R_n = 0$$

$$u(1,\theta) = g(\theta) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \sin(n\theta) + \beta_n \cos(n\theta)\right] R_n(1) = g(\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_n R_n(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta \\ \\ \beta_n R_n(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta \end{cases} \quad n \geq 1$$

$$\beta_0 R_0(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cdots$$

$$R_n \approx r^\alpha \qquad \alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm n$$

$$R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta)(c_n r^n + d_n r^{-n})$$

با در نظر گرفتن کران داری جواب در مبدأ ، $r=0$ ، نتیجه می‌شود که $d_n \equiv 0$ برای هر n .

$$\Rightarrow \quad C_n = R_n(1)$$

$$\boxed{u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \alpha_n \sin n\theta + C_n \beta_n \cos n\theta \right) r^n}$$

این در معادله صدق می‌کند به شرط آنکه مشتق با سری جابجا شود.

این نکته با شرط $g \in L^2_{[0,2\pi]}$ برقرار است.

<u>شرط مرزی</u> : $u(1,\theta) = g(\theta)$ به شرط آنکه g پیوسته باشد.

<u>سؤال</u> : چرا $u(r,\theta)$ در $r=1$ پیوسته است؟ $\lim_{r\to 1^-} u(r,\theta) = g(\theta)$

برای این منظور کافیست $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\alpha_n|+|c_n\beta_n| < \infty$ و این شرط با مشتق پذیری g برآورده می‌شود.

خلاصه:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta\right) r^n$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi \, d\varphi \qquad n\geq 1 \quad , \quad b_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi$$

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^n g(\varphi)\left[\sin n\varphi \sin n\theta + \cos n\varphi \cos n\theta\right] d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\underbrace{\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta-\varphi)\right]}_{G(\theta-\varphi)} d\varphi$$

با فرض $g\in C^1$ سری همگرای یکنواخت است

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\omega = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\omega}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{re^{i\omega}}{1-re^{i\omega}}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{Re}\left(re^{i\omega}(1-re^{-i\omega})\right)}{1-2r\cos\omega+r^2} = \frac{r\cos\omega - r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{r\cos\omega - r^2}{1-2r\cos\omega+r^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1-r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}$$

$$u(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)\,d\varphi}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

نکته: اگر بخواهیم معادله لاپلاس را در گوی به شعاع R پیدا کنیم در روابط بالا به جای r
r/R قرار می‌دهیم.

در مختصات دکارتی برای $\Omega = B_R(p)$:

$$(*) \quad u(x) = \frac{R^2 - |x-p|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(p)} \frac{g(\sigma)}{|x-\sigma|^2} \, d\sigma$$

حالت ناهمگن :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega = B_1(0)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r)\, e^{in\theta}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \left(r R_n' \right)' - \frac{n^2}{r^2} R_n \right] e^{in\theta} = f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(r)\, e^{in\theta}$$

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\, e^{-in\theta} \, d\theta$$

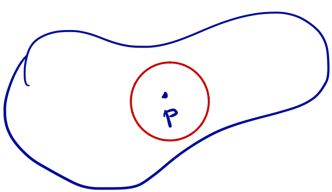
$$\begin{cases} \frac{1}{r}(rR_n')' - \frac{n^2}{r^2}R_n = f_n(r) \\ R_n(1) = 0 \end{cases}$$

$R_n(1)=0$ ، R_n در $[0,1]$ کران‌دار است.

<u>نتیجه</u>: هر تابع هارمونیک C^∞ است.

<u>تذکر</u>: توابع هارمونیک تحلیلی هستند.

اگر $\Omega = B_R(p)$ و $\Delta u = 0$ در Ω بنا به رابطه (*) به‌وضوح $u \in C^\infty$ در داخل Ω.



برای ناحیه دلخواه و نقطه $p \in \Omega$ کره‌ی $B_R(p) \subseteq \Omega$ در نظر بگیرید و مسئله

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(p) \\ v = u & \text{on } \partial B_R(p) \end{cases}$$

به کمک رابطه (*) حل می‌شود و $v\in C^\infty$ از طرفی

$$\begin{cases} \Delta u=\Delta v=0 & \text{در } B_R(p) \\ u=v & \text{در } \partial B_R(p) \end{cases}$$

بنابر یکتایی $v=u$ در $B_R(p)$.

تابع اساسی (Fundamental Sol.)

$$-\Delta\Phi=\delta$$

$\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n-\{0\})$ و $\Delta\Phi(x)=0$ برای $x\neq 0$ و $-\int_{\partial B_r(0)}(\nabla\Phi\cdot n)=1$

فرض کنید P یک ماتریس دوران باشد یعنی $P^t P = I$.

$$v(x) = u(Px)$$

$$\nabla v = P \, \nabla u(Px) \qquad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$\partial_i v = P_i \cdot \nabla u(Px) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \, \partial_j u(Px)$$

$$\nabla(\partial_i v) = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \, P \cdot \nabla(\partial_j u)(Px)$$

$$\partial_{ii} v = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \, P_{ik} \, \partial_{kj} u$$

$$\Delta v = \sum_{i,j,k=1}^{n} P_{ij} \, P_{ik} \, \partial_{kj} u = \sum_{k,j} \delta_{jk} \, \partial_{kj} u = \sum_{j} \partial_{jj} u = \Delta u(Px)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \qquad n=2 \quad \Longleftarrow \quad \Phi(x) = \varphi(|x|)$$ فرض کنید

$$\hookrightarrow \varphi(r) = C \log r + \cancel{D}$$

$$\int_{\partial B_R} \nabla\Phi \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{\partial B_R} \varphi'(R)\, d\sigma = 2\pi R \times \frac{C}{R} = -1$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log|x|$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left\{ \frac{1}{(\sin\psi)^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \cot\psi\frac{\partial}{\partial\psi} \right\}$$ $\boxed{n=3}$

$$\Phi(x) = \varphi(r) \Rightarrow \varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \frac{c}{r} + \cancel{D}$$

$$\int_{\partial B_R} \nabla\Phi \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial B_R} \varphi'(R) \, d\sigma = 4\pi R^2 \times \frac{-c}{R^2} = -1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{4\pi}$$

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{4\pi}|x|^{-1}}$$

PDE

جلسه پانزده - ۹۶/۲/۱۲

$$-\Delta \Phi = \delta$$

تابع اساسی (Fundamental Sol.)

$\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ ، $\Delta \Phi(x) = 0$ برای $x \neq 0$ ، $-\int_{\partial B_r(0)} (\nabla \Phi \cdot n) = 1$

یعنی $-\Delta \Phi = \delta$

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & n=2 \\ \frac{1}{4\pi |x|} & n=3 \end{cases}$$

به طور شهودی از رابطه

$$\int \delta(x-y)\, f(y)\, dy = f(x)$$

انتظار داریم

$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\, f(y)\, dy = \Phi * f$ جواب $-\Delta u = f$ باشد.

سؤال: آیا از رابطه $u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\,dy$ می‌توان مشتق و انتگرال را جابجا کرد؟

$n=2$, $\quad u(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\log|x-y|\,f(y)\,dy$

شرط:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\Omega}K(x,y)\,dy=\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\,dy$$

برقرار است به شرط آنکه سمت راست انتگرال‌پذیر باشد.

$$\partial_i u=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x_i}{|x-y|^2}f(y)\,dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{x_i}{|x-y|^2}f(y)\right|dy\approx\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}|f(y)|\,r\,d\theta\,dr<\infty$$

به شرط آنکه $\int_{\mathbb{R}^2}|f(y)|<\infty$

$$\partial_i^2 u = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x-y|^2} - \frac{2x_i}{|x-y|^3}\right] f(y)\, dy$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} |f(y)|\, r\, dr\, d\theta \longrightarrow$$ انتگرال‌پذیر نیست.

از طرفی می‌توان نوشت:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, f(x-y)\, dy$$

اگر $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ و مشتقات کران‌دار باشند آنگاه $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ خواهد بود.

$$\partial_{ij} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, \partial_{ij} f(x-y)\, dy$$

نکته: اگر $f \in C^1$ باشد همچنان $u \in C^2$ است زیرا

$$\partial_{ij} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \Phi(x-y)\, \partial_j f(y)\, dy$$

و اگر $f \in C^0$ باشد، ممکن است $u \notin C^2$.

سؤال: چرا $-\Delta u = f$ ؟

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$$

$$= \int_{|y-x| \le r} \cdots + \int_{|y-x| > r} \cdots = I_1 + I_2$$

$$|\Delta I_1| \le \|D^2 f\|_{L^\infty} \cdot \int_{|y-x|\le r} |\Phi(y)|\, dy = \begin{cases} O(r^2 \log r) & n=2 \\ O(r^2) & n=3 \end{cases}$$

$$\lim_{r\to 0} \Delta I_1 = 0$$

$$\Delta I_2(x) = \int_{|y-x|\ge r} \Phi(y)\, \Delta_x f(x-y)\, dy$$

y

رابطه گرین : $u, v \in C^2$:

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)\, v\, d\sigma$$

$$\Delta I_2(x) = +\int_{|y-x|\ge r} \nabla \Phi(y)\, \nabla_y f(x-y)\, dy - \int_{|y-x|=r} \nabla_y f \cdot \frac{x-y}{r} \cdot \Phi(y)\, dy$$

$= J + K$

$$|K| = \begin{cases} O(r) & n=3 \\ O(r\log r) & n=2 \end{cases}$$

$$J = -\int_{|y-x|\geq r} \cancelto{0}{\Delta \Phi(y)}\, f(x-y)\, dy + \underbrace{\int_{|y-x|=r} \nabla\Phi(y)\cdot \frac{x-y}{r} \cdot f(x-y)\, dy}_{L}$$

$$\lim_{r\to 0} L = f(x)$$ ادعا :

$$\int_{\partial B_r} \nabla \Phi \cdot \vec{n} = -1$$ نیاز به خواص Φ داریم :

$$L - f(x) = \int_{|y-x|=r} \nabla\Phi \cdot \frac{x-y}{r} \left[f(x-y) - f(x) \right] dy \xrightarrow[r\to 0 \text{ وقتی}]{} 0$$

یکتایی جواب در ناحیه بیکران

: در حالت کلی درست نیست مثلاً $u(x,y)=x^2-y^2$ و $v(x,y)\equiv 0$ ،

$$\Delta u=\Delta v=0$$

قضیه لیوویل: اگر u یک تابع هارمونیک کران‌دار در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $u\equiv 0$.

ایده اثبات:

$$u(x)=\frac{R^2-|x-p|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(p)}\frac{g(\sigma)}{|x-\sigma|^2}\,d\sigma$$

برای نقطه دلخواه p نشان می‌دهیم $\nabla u(p)=0$.

$$|\nabla u(p)|=\frac{R^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(p)}\left|\frac{-2g(\sigma)}{|x-\sigma|^3}\right|d\sigma\le\frac{\|u\|_\infty}{2\pi R^2}\int_{\partial B_R(p)}d\sigma=\frac{1}{R}$$

تعمیم قضیه لیوویل: اگر u تابع هارمونیک در $\mathbb{R}^n$ باشد که

$$\sup_{B_R(0)} |u| \le C R^{m+\alpha}$$

برای $0<\alpha<1$. آنگاه u یک چندجمله‌ای درجه m است.

نتیجه: اگر u و v دو جواب مسئله $-\Delta u = f$ در $\mathbb{R}^n$ باشند که $u-v$ کران دار است آنگاه $u=v$.

PDE

جلسه شانزده ۹۶,۲,۱۷

تابع گرین :

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & n=2 \\ \frac{1}{4\pi |x|} & n=3 \end{cases}$$

$$-\Delta \Phi = \delta$$

جواب معادله $-\Delta u = f$ در $\mathbb{R}^n$ به صورت

$$u(x) = \Phi * f$$

اگر کراندار باشه معادله پواسن

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

را حل کنیم

$$\underbrace{\int_{\Omega} u(y)\, \Delta\Phi(x-y) - \Delta u(y)\, \Phi(x-y)\, dy}_{-u(x) + \int_{\Omega} f(y)\, \Phi(x-y)\, dy} = \int_{\partial\Omega} u\, \partial_n \Phi - \partial_n u \cdot \Phi \, d\sigma$$

قضیه: اگر $u\in C^2(\bar{\Omega})$ جواب معادله فوق باشد:

$$u(x)=\int_{\Omega} f(y)\Phi(x-y)\,dy+\int_{\partial\Omega}-u(y)\,\partial_n\Phi(x-y)+\Phi(x-y)\,\underbrace{\partial_n u(y)}_{?}\,d\sigma_y$$

تعریف تابع گرین: $G(x,y)$ تابع گرین دامنه نامیده می‌شود هرگاه

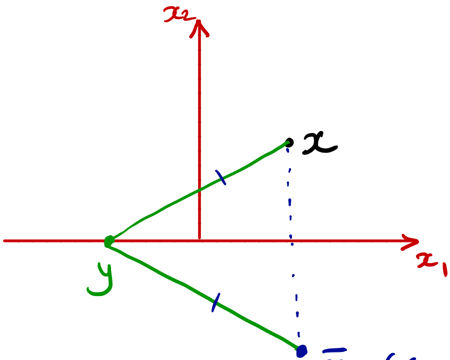
1) $-\Delta_y G(x,y)=\delta(x-y) \qquad x,y\in\Omega$

2) $G(x,y)=0 \qquad y\in\partial\Omega,\ x\in\Omega$

تذکر: تابع گرین متناظر شرط مرزی نیومن نیز تعریف می‌شود اگر شرط (۲) با $\nabla_y G(x,y)\cdot\vec{n}=0$ جایگزین شود.

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \varphi(x,y)$$ به ازای هر $x\in\Omega$ دلخواه

$$\begin{cases} \Delta_y \varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi(x,y) = \Phi(x-y) & y \in \partial\Omega \end{cases}$$



$\bar{x} = (x_1, -x_2)$

مثال: $\Omega = \mathbb{R}^2_+ = \{(x_1,x_2) : x_2>0\}$

$$\varphi(x,y) = \Phi(\bar{x}-y)$$

تابع گرین نیم صفحه بالا :

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(\bar{x}-y)$$

جواب معادله پواسن در نیم صفحه :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2_+} f(y)\, G(x,y)\, dy + \int_{\{y_2=0\}} g(y) \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_2} G(x,y)}_{\text{هسته پواسن}} dy_1$$

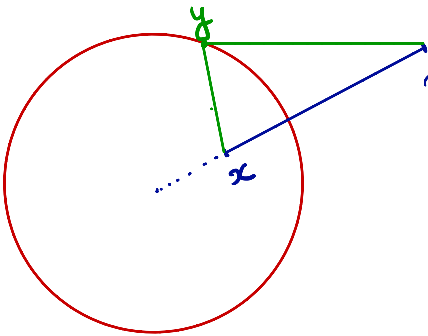
خواص تابع گرین:

1) $G(x,y)=G(y,x)$

2) $G(x,y)>0$

3) $\lim\limits_{x\to y} G(x,y)=+\infty$

مثال (تابع گرین در دایره)



$$x_*=\frac{R^2}{|x|^2}x$$

$$|y-x_*|=\alpha\cdot|y-x|$$

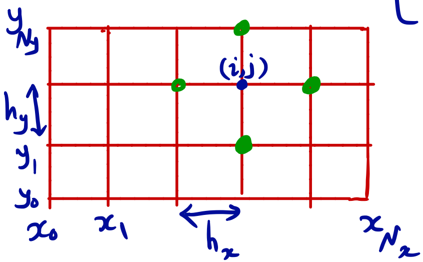
$$\alpha=\frac{|x_*|-R}{R-|x|}$$

$$\varphi(x,y)=\Phi\left(\frac{y-x_*}{\alpha}\right)$$

$$G(x,y)=\Phi(x-y)-\Phi\left(\frac{y-x_*}{\alpha}\right)$$

روشهای عددی

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = (0, L_x) \times (0, L_y) \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_i = i h_x & 0 \le i \le N_x \\ y_i = i h_y & 0 \le i \le N_y \end{cases}$$

$$\partial_x^2 u(x_i, y_j) = \frac{1}{h_x^2}\Big(u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) \Big) + O(h_x^2)$$

$$\partial_y^2 u(x_i, y_j) = \frac{1}{h_y^2}\Big(u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) \Big) + O(h_y^2)$$

$$h_x = h_y = h \Rightarrow \Delta u(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\Big(\text{جمع مقادیر نقاط همسایه} - 4u(x_i, y_j) \Big) + O(h^2)$$

$$u_{i,j} := u(x_i, y_j)$$

$$(*)\quad \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\right] = -f(x_i, y_j) \qquad \begin{array}{l} 1 \le i \le N_x - 1 \\ 1 \le j \le N_y - 1 \end{array}$$

$$u_{i,0} = g(x_i, 0) \qquad u_{i,N_y} = g(x_i, L_y)$$

$$u_{0,j} = g(0, y_j) \qquad u_{N_x,j} = g(L_x, y_j)$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{0,0} \\ u_{1,0} \\ \vdots \\ u_{N_x,0} \\ u_{0,1} \\ u_{1,1} \\ \vdots \\ \\ u_{N_x,N_y} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} N_x \\ \vdots \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} N_x \end{array} \qquad U \in \mathbb{R}^{N = N_x \times N_y}$$

رابطه (*) را به صورت $AU = F$ نوشت

$A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. [illegible]

. $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ سطر kام که $1 \le k \le N_x$ به صورت

$$(0,\dots,0,\underset{k\text{ام}}{\underset{\downarrow}{1}},0,\dots,0)$$

است که شرط مرزی را برآورده می‌کند.

سطر N_x+1 شرط مرزی $u_{0,1} = g(0,y_1)$ را می‌دهد.

سطر N_x+2 رابطه $(*)$ را برای $i=j=1$ می‌دهد.

$$(0,1,0,\dots,0,\underbrace{1,-4,1,0,\dots,1}_{N_x},0,\dots)$$

$$A = Id_{N_x}$$

$$C = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{N_x \times N_x}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & & & \\ C & B & C & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & C & B & C \\ & & & 0 & A \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} h^2 & 0 & 0 & \cdots & \\ -1 & 4 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & -1 & 4 & -1 \\ & & & 0 & h^2 \end{bmatrix}$$

قضیه: مقادیر ویژه A عبارتند از

$$\frac{4}{h^2}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{ih}{L_x}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{jh}{L_y}\right)\right]$$

PDE

جلسه هفده - ۹۶/۲/۲۴

Reaction - Diffusion

مدل خطی $\quad \dfrac{du}{dt} = \alpha u$ $\qquad\qquad$ $\longleftarrow$ جمعیت کل $\; u(t)$

مدل لجستیک $\quad \dfrac{du}{dt} = \alpha u \left(1 - \dfrac{u}{M}\right)$

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

مدل‌های چندگونه‌ای :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u,v) \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = g(u,v) \end{cases}$$

$$u_t = -\underbrace{\operatorname{div}(J)}_{\text{diffusion}} + \underbrace{f(u)}_{\text{Reaction}}$$

diffusion → microscopic

Reaction → macro

$u(x,t)$

میانگین جمعیت در نقطه x در زمان t

J : شار جریان

قانون Fick : $J \sim -\nabla u$

$$u_t = \operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u) + f(u)$$

مدل رقابت جمعیت :

$$\begin{cases} u_t = \alpha_1 \Delta u + f(u,v) \\ v_t = \alpha_2 \Delta v + g(u,v) \end{cases}$$

معادله اسکالر : $u_t = D\Delta u + f(u)$

ضریب diffusion : D

حالت یک بعدی : اگر $f \equiv 0$.

$$0 < x < l \qquad 0 < t \qquad \begin{cases} u_t = D\, u_{xx} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

به روش جداسازی حل می‌شود.

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\Longrightarrow X \cdot \dot{T} = D\, X'' \cdot T \Longrightarrow \frac{\dot{T}}{DT} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \ , \ \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$T(t) = T(0)\, e^{\lambda_n t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\, e^{\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \longrightarrow 0$$

وقتی $t \to \infty$

$$-\infty \leftarrow \cdots < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

$$|u(x,t)| \leq e^{\lambda_1 t} \Big| \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)}_{g(x)} \Big| \longrightarrow 0$$

سوال: اگر به جای شرط مرزی دیریکله شرط مرزی دیگر مثل نیومن باشد وضعیت $\lim_{t \to \infty} u(x,t)$ چه می‌شود؟

در ابعاد بالا وقتی $f \equiv 0$.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ باز

$$\begin{cases} u_t = D\,\Delta u & \text{in } \Omega \times [0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

روش گالرکین

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

$$\dot{T}_n X_n = D[\Delta X_n] \cdot T_n \Rightarrow \frac{\dot{T}_n}{D T_n} = \frac{\Delta X_n}{X_n} = \lambda_n$$

$$\begin{cases} T_n(t) = T_n(0)\, e^{D\lambda_n t} \\[2ex] (*)\begin{cases} \Delta X_n = \lambda_n X_n & \text{in } \Omega \\ X_n = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ مسأله مقدار ویژه Δ در Ω

قضیه ۱ اگر Ω باز، کران دار و هموار در این صورت دنباله $\{\lambda_n\}$ وجود دارد که

$$\cdots \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

و توابع ویژه X_n (جوابهای معادله $(*)$) که در فضای $L^2(\Omega)$ یک پایه متعامد تشکیل می‌دهند یعنی

$$(X_n, X_m)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega X_n(x)\, X_m(x)\, dx = 0 \qquad \text{اگر } m \neq n$$

$$\forall f \in L^2 \Rightarrow f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, X_n)_{L^2}}{\| X_n \|_{L^2}} X_n$$

همگرایی در L^2

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\, e^{D\lambda_n t}\, X_n(x) \longrightarrow$$ جواب ضعیف است

تساوی در L^2

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\, X_n(x)$$

در L^2

$$\int_{\Omega} |u(x,t)|^2\, dx \le \int_{\Omega} e^{2D\lambda_1 t} \cdot |g(x)|^2\, dx \longrightarrow 0$$

نکته: اگر شرط مرزی نویمن یا روبین باشد قضیهٔ ۱ درست است با این تفاوت که

$$\dots \le \lambda_3 \le \lambda_2 < \lambda_1 \le 0$$

به عنوان مثال برای شرط مرزی نویمن، $\lambda_1 = 0$ و $X_1(x) \equiv 1$ تابع ثابت است.

در این حالت دیگر، $t \to \infty$، $u(x,t) \to T_1(0)$ که

$$T_1(0) = \frac{\langle g, X_1 \rangle}{\| X_1 \|} = \fint_{\Omega} g(x)\, dx$$

linear reaction

$$f(u) = \alpha u$$

$$u_t - D\Delta u = \alpha u, \qquad u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

$$w(x,t) = e^{-\alpha t}\, u(x,t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_t - D\Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \Omega \\ w(x,0) = u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$w(x,t) \xrightarrow{\text{وقتی } t\to\infty} 0$$

$$|w(x,t)| \le e^{\lambda_1 D t}\, |g(x)|$$

که λ_1 اولین مقدار ویژه Δ روی Ω.

$$|u(x,t)| \le e^{(\lambda_1 D + \alpha)t}\, |g(x)|$$

وضعیت تعادل وقتی $t \to \infty$:

* اگر $\alpha \leq 0$ $\longleftarrow$ $u(x,t) \to 0$

* اگر $0 < \frac{\alpha}{D} < -\lambda_1$ همچنان $u(x,t) \longrightarrow 0$.

* اگر $-\lambda_k \leq \frac{\alpha}{D} < -\lambda_{k+1}$.

$$\omega(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\, e^{D\lambda_n t}\, X_n(x)$$

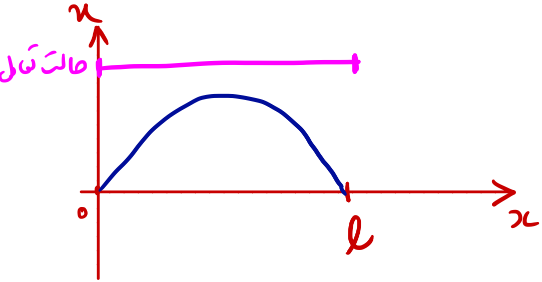
$$u(x,t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{k} T_n(0)\, e^{(D\lambda_n+\alpha)t}\, X_n(x)} + \underbrace{\sum_{n>k+1} \cdots}_{0}$$

واگرا است به شرط آنکه لااقل یکی از $\{T_n(0)\}$ ناصفر باشد .

اگر $T_m(0)$ اولین اندیسی باشد که ناصفر است آنگاه $u(x,t) \sim e^{(D\lambda_m+\alpha)t} X_m(x)$

مثال: حالت یک بعدی: $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

$$u(x,t) \sim T_1(0)\, e^{\left(\alpha - \frac{\pi^2}{l^2}\right)Dt} \sin\frac{\pi x}{l} \Longleftarrow \frac{\pi^2}{l^2} < \alpha < \frac{4\pi^2}{l^2}$$

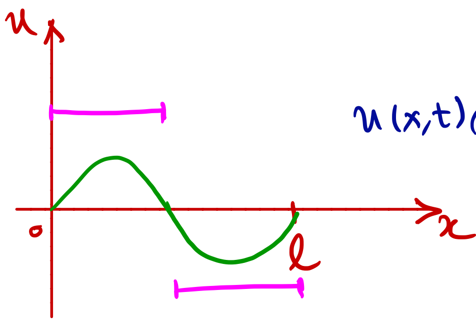


اگر $T_1(0) > 0$ آنگاه $u(x,t) \to +\infty$.

اگر $\frac{4\pi^2}{l^2} < \alpha < \frac{9\pi^2}{l^2}$

$$u(x,t) \sim T_1(0)\, e^{\left(\alpha - \frac{\pi^2}{l^2}\right)Dt} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + T_2(0)\, e^{\left(\alpha - \frac{4\pi^2}{l^2}\right)Dt} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

فرض کنید صفر باشد.



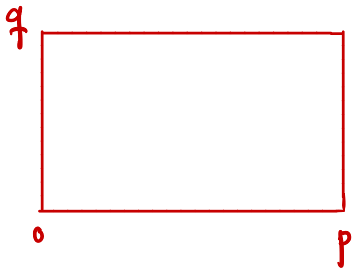
PDE

جلسه هجده - ۹۶/۲/۲۶

مثال

$$\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega = (0,p) \times (0,q)$$

$$\begin{cases} u_t = D\,\Delta u + \lambda u & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u(x,y,0) = g(x,y) & (x,y) \in \Omega \end{cases}$$



مسأله مقدار ویژه لاپلاس:

$$\begin{cases} \Delta X_k + \lambda/D \, X_k = \mu_k X_k & \text{in } \Omega \\ \partial_n X_k = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k D t}\, T_k(0)\, X_k(x,y)$$

$$X(x,y) = W(x)\, Z(y)$$

$$W''Z + WZ'' = \left(\mu - \lambda/D\right) WZ$$

$$\frac{W''(x)}{W(x)} + \frac{Z''(y)}{Z(y)} = \mu - \lambda/D$$

مقدار ثابت

$$\begin{cases} W'' - \alpha W = 0 \\ W'(0) = W'(p) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} W_i(x) = \cos\left(\dfrac{\pi i x}{p}\right) \\ \alpha_i = -\left(\dfrac{\pi i}{p}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z'' - \beta Z = 0 \\ Z'(0) = Z'(q) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Z_j(y) = \cos\left(\dfrac{\pi j y}{q}\right) \\ \beta_j = -\left(\dfrac{\pi j}{q}\right)^2 \end{cases}$$

جواب‌های مسأله مقدار ویژه

$$\begin{cases} X_{i,j}^{(x,y)} = \cos\left(\frac{\pi i x}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi j y}{q}\right) \\ \mu_{i,j} = \lambda/_D - \left(\frac{\pi i}{p}\right)^2 - \left(\frac{\pi j}{q}\right)^2 \end{cases} \qquad 0 \leq i,j < \infty$$

بنابر قضیه‌ی طیفی مثل قبل این توابع یک پایه متعامد برای فضای $L^2(\Omega)$ هستند.

$$\begin{cases} u(x,y,t) = \sum_{i,j} e^{\mu_{i,j} D t}\, T_{i,j}(0)\, X_{i,j}(x,y) \\ g(x,y) = \sum_{i,j} T_{i,j}(0)\, X_{i,j}(x,y) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad T_{i,j}(0) = \frac{\langle g, X_{i,j} \rangle}{\| X_{i,j} \|^2}$$

تذکر: اگر همین مسئله را با شرط مرزی $u=0$ on $\partial\Omega$ حل کنیم:

$$\begin{cases} X_{i,j}(x,y) = \sin\left(\frac{i\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{j\pi y}{q}\right) & 1\leq i,j<\infty \\ \mu_{i,j} = \lambda/D - \left(\frac{i\pi}{p}\right)^2 - \left(\frac{j\pi}{q}\right)^2 \end{cases}$$

در نتیجه اگر $\lambda/D < \pi^2\left[\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right]$ خواهیم داشت $\lim_{t\to\infty} u(x,t)=0$.

مثال : $\Omega = B_R(0) \times (0,h)$ یک استوانه در $\mathbb{R}^3$

$$u_t = D\Delta u + \gamma u$$

با فرض اینکه جواب مسأله تقارن شعاعی دارد می‌توان $u = u(r,z,t)$

$$0 \leq r \leq R \ , \quad 0 \leq z \leq h$$

در نتیجه

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz}$$

شرط مرزی: $u(R,z,t) = u(r,0,t) = u(r,h,t) = 0$

شرط اولیه

$$u(r,z,0) = g(r,z)$$

$$u(r,z,t) = \sum_{k} e^{\mu_k D t}\, T_k(0)\, W_k(r,z)$$

مسأله مقدار ویژه

$$\begin{cases} \Delta W_k + \dfrac{\gamma}{D} W_k = \mu_k W_k & \text{in } \Omega \\ W_k = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$W(r,z) = V(r)\, Z(z)$$

$$\left(V'' + \frac{1}{r} V'\right) Z + V Z'' = \left(\mu - \gamma/D\right) V Z$$

$$\begin{cases} V'' + \dfrac{1}{r} V' = \alpha V \\ V(R) = 0 \end{cases}$$

$$Z'' = \beta Z \quad , \quad \mu = \frac{\gamma}{D} + \alpha + \beta$$

$$Z(0) = Z(h) = 0$$

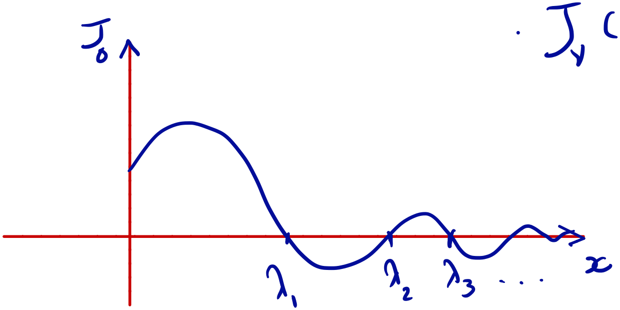
$$Z_i(z) = \sin\left(\frac{i\pi z}{h}\right) \quad , \quad \beta_i = -\left(\frac{i\pi}{h}\right)^2$$

$$V_j(r) = J_0\left(\frac{\lambda_j r}{R}\right) \quad \alpha_j = -\left(\frac{\lambda_j}{R}\right)^2 \ , \ J_0(\lambda_j)=0 \ \text{که}$$

معادله بسل $\quad x^2y'' + xy' + (\nu^2 - x^2)y = 0$

که جواب آن ترکیب خطی دو تابع J_ν و Y_ν است. Y_ν در $x=0$

بیکران است و $J_\nu(0) = 1$.



مقادیر ویژه $\mu_{i,j} = \dfrac{\gamma}{D} - \left(\dfrac{\lambda_j}{R}\right)^2 - \left(\dfrac{i\pi}{h}\right)^2$ و توابع ویژه

$$W_{ij}(r,z) = J_0\left(\frac{\lambda_j r}{R}\right) \sin\left(\frac{i\pi z}{h}\right) \qquad i,j \geq 1$$

$$\frac{\gamma}{D} < \left(\frac{\lambda_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{h}\right)^2$$

به شرط آنکه $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$

Nonlinear Reaction

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

اگر $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = w(x)$ انتظار می‌رود که

$$-\Delta w = f(w)$$

ایده کلی: فرض کنید $\frac{dX}{dt} = f(X)$ یک ODE باشد. اگر $\lim_{t \to \infty} X(t) = X_0$

باید $f(X_0) = 0$. اگر $A = f'(X_0)$ آنگاه سیستم خطی

$\frac{dX}{dt} = AX$ یک تقریب برای $\frac{dX}{dt} = f(X)$ است.

در این حالت اگر قسمت حقیقی $Spec(A)$ منفی باشند آنگاه همه جواب‌های $\frac{dX}{dt}=f(X)$

به X_0 ختم می‌شوند به شرط آنکه $X(0)$ نزدیک X_0 باشد.

چگونه می‌توان وجود جواب مسأله غیرخطی را ثابت کرد؟

جواب: Perron Method

<u>تعریف</u>: تابع $\bar{u}$ را Supersolution (متناظراً subsol. $\underline{u}$) مسأله

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=f(u) & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ u=0 \text{ یا } \partial_n u=0 & \text{با شرط مرزی} \\ u(x,0)=g(x) & \text{شرط اولیه} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{u}_t - \Delta \bar{u} \geq f(\bar{u}) & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ \bar{u} \geq 0 \ , \ \partial_n \bar{u} \geq 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T) \\ \bar{u}(x,0) \geq g(x) & \end{cases}$$ هرگاه

(برای $\underline{u}$ همه نامساوی‌ها برعکس می‌شود)

لم: اگر $\bar{u}$ و $\underline{u}$ به‌ترتیب Super Sol. و Sub Sol. باشند آنگاه

$$\underline{u} \leq \bar{u} \quad \text{in } \Omega \times (0,T)$$

اثبات - $w = \bar{u} - \underline{u}$ داریم

$$w_t - \Delta w \geq f(\bar{u}) - f(\underline{u}) \quad \text{و} \quad \begin{cases} w \geq 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T) \\ w(x,0) \geq 0 & \text{in } \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

$$f(\bar{u}) - f(\underline{u}) = \underbrace{f'(v)}_{a(x,t)} \cdot (\bar{u} - \underline{u})$$

$$w_t - \Delta w - a\,w \geq 0$$

از فرض $|a(x,t)| \leq \max\limits_{z} |f'(z)| = M$

$$Z(x,t) = e^{-2Mt}\, w(x,t)$$

$$\Longrightarrow Z_t - \Delta Z + \underbrace{(2M + a)}_{>0} Z \geq 0$$

اگر Z می‌نیمم منفی خود را در نقطه (x_0,t_0) داخل ناحیه بگیرد باید $Z_t(x_0,t_0)=0$

$$\Delta z(x_0,t_0) \geq 0 \quad , \quad z(x_0,t_0) < 0$$

که تناقض است.

PDE

جلسه نوزده - ۹۶/۲/۳۱

قضیه ۲.۵ : اگر $\bar{u}$ و $\underline{u}$ به ترتیب بالا جواب و زیر جواب های معادله (*) باشند و داشته باشیم :

$$a \le \underline{u}(x,t) \le g(x) \le \bar{u}(x,t) \le b \quad \text{in } D_T$$

اگر حد داده ای regular باشد در اینصورت جواب یکتای $u(x,t)$ از معادله (*) وجود دارد

بطوریکه :

$$a \le \underline{u}(x,t) \le u(x,t) \le \bar{u}(x,t) \le b$$

اثبات :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) & D_T \\ u = 0 \;\text{یا}\; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & S_T \quad (*) \\ u(x,0) = g(x) & \text{در}\; \Omega \end{cases}$$

یکتایی جواب :

فرض کنید u_1 و u_2 دو جواب از معادله $(*)$ باشند

در اینصورت : u_1 و $u_2 \longrightarrow$

هر دو هم زیر جواب هستند و هم بالا جواب

$$u_1 \le u_2 \;,\; u_1 \ge u_2 \longrightarrow u_1 = u_2$$

اثبات وجودی : وجود جواب را برای شرط دیریکله نشان می‌دهیم و برای شرط نیومن به طور مشابه برقرار است.

برای اثبات قضیه لازم است یک معادله بازگشتی از نوعی بسازیم که ؟ جواب این معادله مثلاً شد :

$$F(s) = f(s) + Ms \quad ; \quad \text{قرار می‌دهیم}$$

$$M = \sup_{s \in [a, b]} |f'(s)| \quad \text{و}$$

$$F'(s) = f'(s) + M \geq -M + M = 0$$

یعنی تابع F یک تابع صعودی است.

حال معادله زیر را در نظر بگیریم:

$$u_t - \Delta u + Mu = F(u)$$

فرض کنید $u^0 = \underline{u}$ و معادله خطی زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} u^{(1)}_t - \Delta u^{(1)} + M u^{(1)} = F(u^{(0)}) \\ u^{(1)} = 0 \\ u^{(1)}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

چون معادله بالا یک معادله خطی است بنابراین جواب این معادله به طور یکتا وجود دارد

$$u^{(1)} \in C(\bar{D}_T) \cap C^{2,1}(D_T)$$

ادعا می‌کنیم: $u^{(1)} \geq u^{(0)}$

$$w^{(1)} = u^{(1)} - u^{(0)}$$

$$\begin{cases} w^{(1)}_t - \Delta w^{(1)} + M w^{(1)} \geq F(u^{(0)}) - F(u^{(0)}) = 0 \\ w^{(1)} \geq 0 \qquad S_T \\ w^{(1)}(x,0) \geq 0 \qquad \Omega \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad w^{(1)} \geq 0 \longrightarrow u^{(1)} \geq u^{(0)}$$

$$a \leq \underbrace{u^{(0)} \leq u^{(1)}}_{\checkmark} \underbrace{\leq \bar{a}}_{?}$$

حال فرض کنید $u^{(2)}$ جواب یکتای معادله زیر باشد

$$\begin{cases} u_t^{(2)} - \Delta u^{(2)} + M u^{(2)} = F(u^{(1)}) \\ u^{(2)} = 0 \\ u^{(2)}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

ب) : $u^{(1)} \le u^{(2)}$

$$w^{(2)} = u^{(2)} - u^{(1)}$$

$$\begin{cases} w^{(2)}_t - \Delta w^{(2)} + \mu w^{(2)} \ge F(u^{(1)}) - F(u^{(0)}) \\ w^{(2)} \ge 0 \\ w^{(2)}(x, 0) \ge 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow[\text{جواب}]{\text{مثل بالا}} \quad w^{(2)} \ge 0 \rightarrow u^{(2)} \ge u^{(1)}$$

let :

$$\begin{cases} u_t^{(k)} - \Delta u^{(k)} + M u^{(k)} = F(u^{(k-1)}) \\ u^{(k)} = 0 \qquad S_T \\ u^{(k)}(x,0) = g(x) \qquad \bar{\Omega} \end{cases}$$

بنابراین مطابق بحث‌های پیشین می‌توان نتیجه گرفت که

$$a \leq u^{(0)} \leq u^{(1)} \leq u^{(2)} \leq \cdots \leq u^{(k)} \leq \cdots \leq \bar{u} \leq b$$

$\{u^k\}_1^\infty$ یک زیردنباله هموار و کراندار است.

$\longleftarrow$ وجود دارد یک u که u^k w به u همگرا است.

که با استفاده از مباحث بالا و غیرمعدهای تی می‌توان نشان داد که این جوابها منحصر می‌شود به اینکه u حل معادله (*) است. $\square$

$$\underline{u}(x) \leq u(x,t) \leq \overline{u}(x)$$

$\underline{u}(x) \downarrow$ مستقل از زمان

$\overline{u}(x) \downarrow$ مستقل از زمان

تمرین (؟) $\longrightarrow$ $u(x,t)$ را به ازای هر $t>0$ موجود است

در واقع جواب سراسری است (global)

Fisher eq. :

ضریب پخش — نرخ سرعت — ظرفیت محیط

$$
\begin{cases}
w_\tau = D\, w_{yy} + a w\left(1 - \dfrac{w}{N}\right) & 0 < y < L,\quad t > 0 \\
w(y,0) = g(y) & 0 < y < 1 \\
w(0,\tau) = w(L,\tau) = 0 & \tau > 0
\end{cases}
$$

$x = y/L$, $t = a\tau$

$D \rightarrow m^2/s$ $\qquad$ $t = \dfrac{D\tau}{L^2}$

پارامترهای بی بعد سازی

$$u(x,t) = \frac{1}{N} w\left(Lx, \frac{L^2 t}{D}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{و مشتق گیری}]{\text{جایگذاری}} \quad u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u)$$

$$\lambda = \frac{aL^2}{D}$$

Fisher eq.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u) \\ u = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

If $0 \leq g(x) \leq 1$, $\bar{u} = 1$, $\underline{u} = 0$

بنابر قضیه قبل $\longrightarrow$ $0 \leq u(x,t) \leq 1$

$\downarrow$

$\forall t \geq 0$

$$(*)\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) & D_T \qquad f \in C^1(\mathbb{R}) \\ u = 0 \text{ یا } \partial_n u = 0 & S_T \\ u(x,0) = g(x) & \overline{\Omega} \qquad g \in C \end{cases}$$

تعریف : $v_S(x)$ را یک جواب حالت پایدار معادله بالا

است در معادلهٔ

$$(**)\begin{cases} \Delta v + f(v) = 0 \\ v = 0 \text{ یا } \partial_n v = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) \xrightarrow[S]{t \to \infty} v_S(x)}$$

تعریف : v_s را پایدار می‌گوییم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ موجود باشد

$\delta > 0$ به طوری که اگر u تک جواب کراندار معادله (*)

باشد

$$|g(x) - v_s(x)| < \delta \quad \forall x \in \Omega$$

در این صورت

$$|u(x,t) - v_s(x)| < \varepsilon$$

علاوه اگر

$$\lim_{t \to \infty} \sup |u(x,t) - v_s(x)| = 0 \rightarrow$$ پایدار مجانبی

و در غیر اینصورت v_s را ناپایدار گوییم.

قرار دهیم :

$$w(x,t) = u(x,t) - v_s(x)$$

$$w_t = \Delta w + [f(u) - f(v_s)]$$

$$w(x,0) = g(x) - v_s(x)$$

$w = 0$ یا $\partial_n w = 0$

$$f(u(x,t)) - f(v_s(x)) = f'(v_s(x))\,\omega + R(x,t)$$

کسرا شرار

$$\boxed{\omega_t - \Delta\omega = \overbrace{f'(v_s)}\,\omega}$$

خطی سازی معادله (*)

$$\omega(x,t) = U(x)\,Z(t)$$

$$U(x)\,Z'(t) - \Delta U(x)\,Z(t) = f'(v_s)\,U(x)\,Z(t)$$

$$\underbrace{\frac{\Delta u(x) + f(v_s)\,u(x)}{u(x)}}_{x \text{ برحسب}} = \underbrace{\frac{z'(t)}{z(t)}}_{t \text{ برحسب}} = \mu$$

$$\boxed{\Delta u(x) + f'(v_s)\,u(x) = \mu\, u(x) \quad \text{in } \Omega \qquad (\star)}$$

مسئله مقدار ویژه

If $f'(v_s(x)) \neq 0$

Theorem: Let v_ξ be a solution of $(**)$

then:

(i) there exists a sequence --

$$\cdots \mu_{k+1} < \mu_k < \cdots < \mu_2 < \mu_1$$

$$\lim_{k \to \infty} \mu_k = -\infty$$

(ii) $\varphi_1 > 0$ in Ω

$\downarrow$

eigenfunction μ_1

قضیه: فرض کنید $v_s(x)$ جواب معادله (**) باشد:

۱) اگر $\mu_1 < 0$ باشد آنگاه v_s به مفهوم نمایی

پایدار مجانبی است

اعداد مثبت ρ و α وجود دارند به طوری که اگر

$$|g(x) - v_s(x)| < \rho\,\varphi_1(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

آنگاه

$$|u(x,t) - v_s(x)| \leq \rho e^{-\alpha t} \varphi_1(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega},\ \forall t > 0$$

(ii) اگر $\mu_1 > 0$ باشد: جواب [illegible] v_s ناپایدار

است یعنی اعداد مثبت ρ , α وجود دارند که اگر برای هر $\sigma \in (0,1)$

$$g(x) - v_s(x) > \rho(1-\sigma)\,\varphi_1(x)$$

آنگاه

$$u(x,t) - v_s(x) \geq \rho\left(1-\sigma e^{-\alpha t}\right)\varphi_1(x)$$

PDE

جلسه بیستم ۹۶/۳/۷

اثبات قضیه :

(i) قرار می‌دهیم :

$$w(x,t) = v_s(x) + \rho e^{-\alpha t} \varphi_1(x)$$

ادعا می‌کنیم که $w(x,t)$ یک بالا جواب برای مسئله $(*)$ می‌باشد

$$\Delta \varphi_1 + f'(v_s) \varphi_1 = \mu_1 \varphi_1$$ ⟸ داریم

$$w_t - \Delta w = -\Delta v_s + (-\alpha \varphi_1 - \Delta \varphi_1)\rho e^{-\alpha t}$$

$$= \underline{\underline{f(v_s)}} + \underbrace{(-\alpha - \mu_1 + f'(v_s))}\rho e^{-\alpha t}\varphi_1$$

بنا بر قضیه مقدار میانگین را یک $\eta = \eta(x,t)$ و $0 < \eta < \rho$

$$\underline{\underline{f(v_s)}} = f(w) - f'(v_s + \eta)\rho e^{-\alpha t}\varphi_1$$

$$\mu_1 < 0 \rightarrow -\mu_1 > 0$$

برای یک $0 < \alpha$

$$-\alpha - \mu_1 > 0$$

و اگر η به اندازه کافی کوچک باشد بنابراین صورت داریم:

$$f \in C^1 \rightarrow -\alpha - \mu_1 + f'(v_s) > f'(v_s+\eta)$$

همان تعریف پیوستگی را f' است.

با بازنویسی معادله w داریم :

$$w_t - \Delta w = f(w)$$

$$+ \underbrace{\left[-\alpha - \mu_1 + f'(v_s) - f'(v_s+\eta)\right]}_{>0} \rho \, \underbrace{e^{-\alpha t} \rho_1}_{>0}$$

$$\geq f(w)$$

بنابر فرض قضیه داریم:

$$\underbrace{v_s(x) + \rho\, \varphi_1(x)}_{w(x,0)} \geq u(x,0) = g(x)$$

شرط مرزی: $w = 0$ و $\dfrac{\partial w}{\partial n} = 0$ on S_T

بنابراین $w(x,t)$ یک بالا جواب برای $u(x,t)$ می‌باشد

$$u(x,t) \leqslant v_s(x) + \rho e^{-\alpha t} \varphi_1(x)$$

و به طور مشابه می‌توان نشان داد که تابع

$$Z(x,t) = v_s(x) - \rho e^{-\alpha t} \varphi_1(x)$$

یک زیرجواب مسئله (*) است و بنابراین داریم

$$v_s(x) - \rho e^{-\alpha t} \varphi_1(x) \leqslant u(x,t) \leqslant v_s(x) + \rho e^{-\alpha t} \varphi_1(x)$$

اثبات (ii) :

کافی است نشان دهیم که تابع

$$w(x,t) = v_s(x) + e\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\varphi_1(x)$$

یک زیر جواب (*) باشد .....

$\blacksquare$

معادله Fisher با شرط دیریکله :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \lambda u(1-u) \\ u(x,0) = g(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le g(x) \le 1$$

$$f(u) = \lambda u(1-u)$$

$$\begin{cases} -v_{xx} = \lambda v(1-v) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

steady state problem

فرض کنیم $v_s = 0$:

$$f'(v_s) = \lambda$$

مسئله مقدار ویژه : $v''(x) + f'(v_s(x))\, v(x) = \mu\, v(x)$

$$\begin{cases} v''(x) = (\mu - \lambda)\, v(x) \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

$$\mu - \lambda = -k^2 \pi^2, \quad k \geq 1$$

$$\boxed{\mu_1 = \lambda - \pi^2}$$

گزاره: اگر $\lambda < \pi^2$ باشد دراین صورت $v_s = 0$ پایدار مجانبی است و اگر $\pi^2 < \lambda$ باشد، $v_s = 0$ ناپایدار است.

گزاره: اگر $\lambda < \pi^2$ باشد دراین صورت $v_s = 0$ جواب یکتای معادله steady state است.

$$v'' + \lambda f(v) = 0 \quad \underrightarrow{\times \sin \pi x}$$

$$\int_0^1 v'' \sin \pi x = -\int_0^1 \lambda f(v) \sin \pi x \, dx$$

$$\int_0^1 v'' \sin \pi x \, dx = -\int_0^1 \pi^2 v \sin \pi x \, dx$$

$$(\lambda - \pi^2) \int_0^1 v \sin \pi x \, dx = \int_0^1 \lambda v^2 \sin \pi x \, dx$$

مفهوم بیولوژیکی :

$$\lambda = \frac{aL^2}{D} < \pi^2 \longrightarrow \underline{v = 0}$$

$$u(x,t) \longrightarrow v_s = 0 \Longrightarrow$$

انقراض u

حالت $\lambda > \pi^2$:

$$\begin{cases} v'' + \lambda f(v) = 0 & 0 < x < 1 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

بنابر قضیه $\underline{\underline{6.5}}$ این معادله دارای یک جواب مثبت یکتا می‌باشد (روی $(0,1)$).

قضیه: اگر $\lambda > \pi^2$ باشد و v_s جواب مثبت معادله باشد در این صورت Steady state v_s پایدار مجانبی است.

اثبات: بنا بر قضیه‌ای که قبلاً اثبات کردیم باید نشان دهیم

$\mu_1 < 0$ است.

$$\int_0^1 \left[v_s''(x) + \lambda f(v_s(x))\right] \varphi_1(x)\, dx = 0 \qquad (1)$$

$$\int_0^1 \left[\varphi_1''(x) + \lambda f'(v_s(x))\varphi_1(x)\right] v_s(x)\, dx \qquad (2)$$

$$= \mu_1 \int_0^1 \varphi_1 v_s \, dx$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)}$$

$$\boxed{\int_0^1 \left[v_s''(x)\,\varphi_1 - v_s\,\varphi_1'' \right] dx}$$

$$+ \int_0^1 \left[f(v_s) - f'(v_s)\, v_s \right] \varphi_1(x)\, dx$$

$$= -\mu \int_0^1 v_s\, \varphi_1\, dx$$

$$\int_0^1 \left(v_s''(x)\,\varphi_1 - v_s\,\varphi_1'' \right) dx = 0$$

تمرین

$$\lambda \int_0^1 \underline{\left(f(v_s) - f'(v_s)\, v_s\right)}\, \varphi_1\, dx = -\mu_1 \int_0^1 v_s \varphi_1\, dx \Longrightarrow \boxed{\mu_1 < 0}$$

$$\lambda > \pi^2, \quad v_s > 0, \quad \varphi_1 > 0$$

$$f(v_s) - f'(v_s)\, v_s = v_s - v_s^2 - (1 - 2v_s)\, v_s$$

$$= v_s^2 > 0$$

شرط نیومن برای معادله Fisher :

$$
\begin{cases}
u_t - u_{xx} = \lambda u(1-u) \\
u(x,0) = g(x) \\
u'(0) = u'(1) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
V_{xx} = \lambda V(1-V) \\
V'(0) = V'(1) = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\text{Constant s.s} \\
V_s = 0,\ V_s = 1 \\
\text{not Constant s.s} \\
\text{sign changed.}
\end{cases}
$$

$v_s = 0 \longrightarrow f'(v_s) = 1$

$$\begin{cases} v''(x) = (\mu - \lambda)\, v(x) \\ v'(1) = v'(0) = 0 \end{cases} \qquad (e.v.p)$$

$\mu - \lambda = -k^2 \pi^2 \quad , k \geq 0$

$\mu_1 = \lambda > 0 \longrightarrow v_s$ is unstable

$$v_s = 1 \longrightarrow f'(v_s) = -1$$

$$U''(x) - \lambda U = \mu U$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow \quad \mu + \lambda = -k^{۲}\pi^{۲}, \quad k \geq ۰$$

$$\mu_1 = -\lambda < ۰ \longrightarrow v_s = 1$$ stable

[illegible]

قضیه: اگر v_s جواب <u>غیرثابت</u> معادله steady state

باشد، ندارش صعودی v_s ناپایدار است.

$$\varphi_1'' + \lambda f'(v_s(x))\varphi_1 = \mu_1 \varphi_1(x)$$

$$(v')'' + \lambda f'(v')v' = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$\int_0^1 \left[(v')'' + \lambda f'(v')v'\right]\varphi_1(x)\,dx = 0 \qquad (1)$$

$$\int_0^1 \left[\varphi_1'' + \lambda f'(v_s)\varphi_1\right]v'\,dx = \mu_1 \int_0^1 \varphi_1 v'\,dx \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)-(۲)}$$

$$\underbrace{\int_0^1 \left[\varphi_1'' v' - (v')'' \varphi_1\right] dx}_{\text{جز به جز}} = \mu_1 \int_0^1 \varphi_1 v' \, dx$$

$$\int_0^1 \left(\varphi_1'' v' - (v')'' \varphi_1\right) dx$$

$$= -v''(1)\,\varphi_1(1) + v''(0)\,\varphi_1(0)$$

$$\mu_1 \int_0^1 \underbrace{\varphi_1}_{>0} v' \, dx = -v''(1) \underbrace{\varphi_1(1)}_{>0} + v''(0) \underbrace{\varphi_1(0)}_{>0}$$

حال اگر v صعودی باشد :

$\boxed{v' \geq 0}$, $v''(0) > 0$

$v''(1) < 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\mu_1 > 0}$$

V نزولی با شرط حالت دوم

$$v' \leq 0 \,,\quad v''(0) \leq 0 \,,\quad v''(1) \geq 0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\mu_1 > 0}$$

حالت سوم : v is oscillating

$\exists\, a, b : (a, b) \subsetneq (0, 1)$

$v'(a) = 0, \quad v'(b) = 0$

$v''(a) \geq 0, \quad v''(b) \leq 0$

$v' \geq 0$ in (a, b)

مثل به حالت ما قبل $\mu_1 > 0$ است،

$$\sum_{j=1}^{n} c_j X_j \xrightarrow{K} \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$$

$$\begin{cases} n = 3 \\ X_1 = H_2 \\ X_2 = O_2 \\ X_3 = H_2O \end{cases}$$

$c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0$

$b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 2$

b_i ها و c_i ها ← ضرایب استوکیومتری

stoichiometric coff.

$$A\,X \xrightarrow{k} B\,X$$

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [H_2 \quad O_2 \quad H_2O]^T$$

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] = [2 \quad 1 \quad 0]$$

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] = [0 \quad 0 \quad 2]$$

واکنش های برگشت پذیر :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \xrightarrow{k_1} X_3 + 2X_4 \\ X_3 + 2X_4 \xrightarrow{k_2} X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$X_1 + X_2 \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} X_3 + 2X_4$$

$x_i = [X_i] \rightarrow$ X_i غلظت گونه

$\dfrac{mol}{L} \equiv \dfrac{mol}{m^3}$

Mass action law : قانون اثر جرم

یک واکنش ابتدایی: واکنشی که تمامی ضرایب
استوکیومتری واکنش دهنده ها آن یک باشد.

Mass action law: این قانون بیان می کند که برای
یک واکنش ابتدایی سرعت واکنش متناسب با ضرب
غلظت های واکنش دهنده ها می باشد

$$X_1 + X_2 \xrightarrow{k} bX_3 \quad , \quad b > 0$$

$$x_i = [X_i]$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -k\, x_1 x_2 \qquad x_1(0) = x_{01}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -k\, x_1 x_2 \qquad x_2(0) = x_{02}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = +bk\, x_1 x_2 \qquad x_3(0) = x_{03}$$

$$۲H_۲ + O_۲ \xrightarrow{K} ۲H_۲O$$

$$H_۲ + H_۲ + O_۲ \xrightarrow{K} ۲H_۲O$$ → واکنش ابتدایی

$$\frac{d[H_۲]}{dt} = -۲K[H_۲]^۲[O_۲]$$

$$\frac{d[O_۲]}{dt} = -K[H_۲]^۲[O_۲]$$

$$\frac{d[H_۲O]}{dt} = +۲K[H_۲]^۲[O_۲]$$

$$A + B \xrightarrow{k} rB$$

$$a = [A], \quad b = [B]$$

$$\frac{da}{dt} = -kab, \quad \frac{db}{dt} = kab$$

$$a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0$$

$$\frac{d(a+b)}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} = 0$$

$$\longrightarrow \quad (a+b)(t) = a_0 + b_0$$

$$a(t) + b(t) = a_0 + b_0$$

$$\boxed{a(t) = a_0 + b_0 - b(t)}$$

$$\frac{db}{dt} = +k\,(a_0 + b_0 - b(t))\,b(t)$$

$$\frac{db}{k(a_0 + b_0 - b)b} = dt$$

$$\int \frac{db}{k(a_0 + b_0 - b)b} = \int dt \longrightarrow \ldots$$

Logistic Reaction:

$$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2B$$

$$\frac{db}{dt} = k_1 ab - k_2 b^2 = k_1 ab \left(1 - \frac{k_2}{k_1 a} b\right)$$

Systems:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u,v) \\ \dfrac{dv}{dt} = g(u,v) \end{cases}$$

$g_u > 0, \ f_v < 0 \longrightarrow$ $\underline{\underline{u}}$ is an activator of $\underline{\underline{v}}$ and $\underline{\underline{v}}$ is an inhibitor of $\underline{\underline{u}}$

$g_u < 0, \ f_v > 0 \implies$ $\underline{\underline{u}}$ is an inhibitor of $\underline{\underline{v}}$ and $\underline{\underline{v}}$ is an activator of $\underline{\underline{u}}$

$$\begin{cases} f(u,v) = 0 \\ g(u,v) = 0 \end{cases}$$

steady state

$u = u_0,\ v = v_0 \Rightarrow$ steady state

Solutions.

$$J(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} f_u(u_0,v_0) & f_v(u_0,v_0) \\ g_u(u_0,v_0) & g_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

ماتریس ژاکوبی

$\lambda_1 , \lambda_2 \rightarrow$ ریشه های معادله مقدار ویژه
ماتریس ژاکوبی باشه

$$Tr(J) = \lambda_1 + \lambda_2 , \quad |J| = f_u g_v - f_v g_u = \lambda_1 \lambda_2$$

اگر:
$$\begin{cases} Tr(J(u_0,v_0)) < 0 \\ \text{و} \\ |J(u_0,v_0)| > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Stable } (u_0,v_0)$$

$$\begin{cases} Tr(J(u_0,v_0)) > 0 \\ \text{یا} \\ |J(u_0,v_0)| < 0 \end{cases} \rightarrow \text{unstable } (u_0,v_0)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{b+v} - cu = f(u,v)$$

$$\frac{dv}{dt} = du - ev = g(u,v)$$

$$g_u = d > 0$$

$$f_v = \frac{-a}{(b+v)^2} < 0$$

$$\begin{cases} f(u_0, v_0) = 0 \\ g(u_0, v_0) = 0 \end{cases}$$

$$J(u_0, v_0) = \ldots$$

Turing istability :

$$\begin{cases} A_\tau = D_A \Delta A + F(A,B) \\ B_\tau = D_B \Delta B + G(A,B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_\tau = F(A,B) \\ B_\tau = G(A,B) \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} A \xrightarrow{t \to \infty} A_0 \\ B \xrightarrow{t \to \infty} B_0 \end{array}$$

$$F(A,B) = k_1 - k_2 A + k_3 A^2 B$$

$$G(A,B) = k_4 - k_3 A^2 B$$

$$\begin{cases} a_t = F_A(A_0,B_0)(a-A_0) + F_B(A_0,B_0)(b-B_0) \\ b_t = G_A(A_0,B_0)(a-A_0) + G_A(A_0,B_0)(b-B_0) \end{cases}$$

$$\boxed{D_A \neq D_B}$$

with dimensionless:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \gamma(a - u + u^2 v) \\ v_t = d\Delta v + \gamma(b - u^2 v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u,v) \\ v_t = d\Delta v + g(u,v) \end{cases}$$

$\nabla u \cdot \vec{n} = 0$

$\nabla v \cdot \vec{n} = 0$

with $\boxed{f_v > 0, \ g_u < 0}$

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad F(w) = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad w_t = D \Delta w + \gamma F(w)$$

$$w_t = \gamma F(w)$$

steady state $\quad w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

$$z = w - w_0 \xrightarrow{\text{linearize}} z_t = \gamma A z$$

$$A = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{w_0}$$

Assume that w_0 asymtotical stable :

$$\operatorname{Tr} J(u_0,v_0) < 0 \quad , \quad \det(J(u_0,v_0)) > 0$$

$$f_u + g_v < 0 \quad , \quad f_u g_v - f_v g_u > 0$$

در نقطه (u_0,v_0)

$$\boxed{z_t = D \Delta z + \gamma A z}$$ خطی سازی شده

سوال: تحت چه شرایطی نقطه $z=0$ از معادله بالا ناپایدار می‌شود؟

$$\Delta W_{mn} + \mu_{mn} W_{mn} = 0 \qquad R$$

$$\nabla W_{mn} \cdot n = 0 \qquad \partial R$$

تابع ویژه $\longleftarrow W_{mn}$

مقادیر ویژه $\longleftarrow \mu_{mn}$

$$\mu_{mn} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} \right) , \quad m,n = 0,1,2,\dots$$

و

$$W_{mn}(x,y) = c \cos \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi y}{q} , \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

z جواب $\Rightarrow$ $z(x,y,t) = e^{\lambda t} W_{mn}(x,y)$

$$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{با جایگذاری}} \lambda W_{mn}(x,y) = D \Delta W_{mn} + \gamma A W_{mn}$$

از طرفی

$$\Delta W_{mn} = -\mu_{mn} W_{mn}$$

$$(\lambda I - \gamma A + D\mu_{mn})W_{mn} = 0$$

درصورتی دارای جواب غیر بدیهی است که

$$|\lambda I - \gamma A + D\mu_{mn}| = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + \lambda[\mu_{mn}(1+d) - \gamma\, tr(A)] + h(\mu_{mn}) = 0} \; *$$

$$h(\mu_{mn}) = d\mu_{mn}^2 - \gamma(d f_u + g_v)\mu_{mn} + \gamma^2|A|$$

$$\lambda := \lambda(\mu_{mn})$$

$$\xrightarrow{?} \quad \operatorname{Re}\lambda_{mn} > 0 \quad \text{for some } m,n$$

$$\mu_{mn}(1+d) - \gamma\, tr(A) < 0 \xrightarrow{tr(A) < 0}$$

منفی است.

$$h(\mu_{mn}) < 0 \;\checkmark$$

با توجه به رابطه $h(\mu_{mn})$ شرط لازم اینکه $h(\mu_{mn}) < 0$

شرایط است که $\underline{\underline{d f_u + g_v > 0}}$ باشد

$$\left.\begin{aligned} f_u + g_v = \operatorname{tr}(A) < 0 \\ d f_u + g_v > 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow d \neq 1,\ f_u g_v < 0$$

$$d = \frac{D_B}{D_A} \longrightarrow \boxed{D_B \neq D_A}$$

برای اینکه نشان دهیم $h(\mu_{mn}) < 0$ برای بعضی

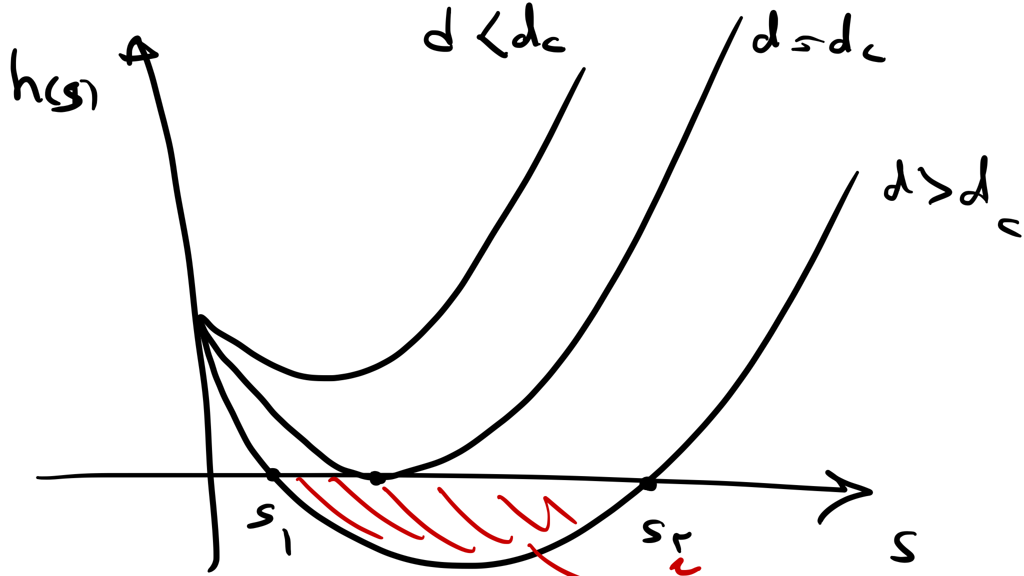
n و m ها باید مینیمم $h(\mu_{mn})$ منفی شود

$$s \longrightarrow h(s) = ds^2 - \gamma(df_u + g_v)s + \gamma^2 |A|$$

$$s_{min} = \frac{\gamma(df_u + g_v)}{2d}$$

$$\Rightarrow h_{min} = h(s_{min}) = \gamma^2 \left[|A| - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} \right]$$

$$\longrightarrow \boxed{|A| < \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}}$$



$s_1 < \mu_{mn} < s_2$

$(d f_u + g_v)^2 = 4 d |A|$

$d^2 f_u^2 + 2(2 f_v g_u - f_u g_v) d + g_v^2 = 0$

پس شرایط لازم برای پایداری:

۱) $f_u + g_v < 0$

۲) $d f_u + g_v > 0$

۳) $f_u g_v - f_v g_u > 0$

۴) $(d f_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0$