به نام او

امتحان میان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای وقت امتحان: **۲** ساعت

---

۱. u جواب معادله گرما در $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ است که در شرط $u(x,t) \leq Ce^{a|x|^2}$ برای ثابتهای مثبت a, C صدق می‌کند. نشان دهید

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u(x,t) = \sup_{\mathbb{R}^n} u(x, 0).$$

۲. ثابت کنید تابع $u \in C^2(\Omega)$ هارمونیک است اگر و تنها اگر برای هر $B(x,r) \subset \Omega$ داشته باشیم

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy.$$

۳. یک تابع هارمونیک کران‌دار در یک ناحیه بیکران مثال بزنید که اصل ماکسیمم برای آن برقرار نباشد.

۴. فرض کنید u جواب معادله لاپلاس در $\mathbb{R}^2$ باشد که روی پاره‌خط $-1 < x < 1$ و $y = 0$ داریم: $u = u_y = 0$.

الف- نشان دهید که $u = 0$ در همه جا.

ب- اگر u جواب معادله موج باشد ($u_{xx} - u_{yy} = 0$) که در شرایط اولیه مشابه صدق می‌کند، بزرگترین ناحیه‌ای را به دست آورید که در آن حتما تساوی $u = 0$ برقرار است.

۵. ناحیه S را مربعی در $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ با گوشه‌های $(0, 1), (1, 2), (0, 3), (-1, 2)$ در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$f(x,t) = \begin{cases} -1 & (x,t) \in S \cap \{t > x + 2\} \\ 1 & (x,t) \in S \cap \{t < x + 2\} \\ 0 & (x,t) \notin S \end{cases}$$

اگر u جواب معادله موج

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_t = 0 & \text{on } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

باشد، شکل u را برای $t > 3$ توصیف کنید.

۶. u تابع مثبت هارمونیک در $B(0, R)$ است. ثابت کنید

$$R^{n-2} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} u(0)$$

موفق باشید.

۹۵/۲/۱۸