به نام او

امتحان پایان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای وقت امتحان: ۳ ساعت

---

۱. قرار دهید $f(x)=|x|^\alpha$ و صحت گزاره زیر را برای مقادیر مختلف $\alpha\in\mathbb{R}$، $m\in\mathbb{Z}$، $1\leq p\in\mathbb{R}$، و $2\leq n\in\mathbb{N}$ بررسی کنید که B_1 گوی واحد در R^n است.

$$f\in W^{m,p}(B_1)$$

۲. فرض کنید $u\in H^1(B_1)$ جواب ضعیف معادله شبه خطی

$$-\Delta u+a(u)=f$$

باشد که $f\in\mathcal{L}^2(B_1)$ و $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ هموار است که $a(0)=0$ و $a'\geq 0$. ثابت کنید $u\in H^2(B_{\frac{1}{2}})$.

۳. نشان دهید تکرر کوچکترین مقدار ویژه عملگر بیضوی $Lu=-\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}$ با شرط مرزی دیریکله برابر یک است و تابع ویژه متناظر آن در داخل ناحیه تغییر علامت نمی‌دهد.

۴. صورت قضیه نقطه ثابت Leray-Shauder را نوشته و به کمک آن ثابت کنید مسأله زیر لااقل یک جواب دارد که در آن Ω ناحیه هموار و کران‌دار است و $a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ نیز یک تابع هموار و کران‌دار است.

$$\begin{cases}-\Delta u=a(\nabla u) & \text{in } \Omega\\ u=0 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

۵. فرض کنید $u\in H_0^1(B_1)$ در معادله بیضوی زیر به معنای ضعیف صدق کند

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+cu=f$$

الف- اگر $0\leq c$ و $a_{ij},c,f\in C^{0,\alpha}(B_1)$. ثابت کنید $u\in C^{2,\alpha}(B_1)$ به شرط آنکه بدانیم چنین حکمی برای عملگر $L=-\Delta$ درست است.

ب- اگر شرایط قسمت قبل را ضعیف‌تر کنیم به صورتی که $a_{ij}\in C^0(\overline{B_1})$ در اینصورت چه حکمی در خصوص همواری جواب میدانید؟ (اثبات لازم نیست)

ج- در حالتی که $a_{ij}\in C^{0,\alpha}(B_1)$ ولی شرایط f و c ضعیف‌تر از قسمت الف باشد چه حکمی را می‌توانید بیان کنید؟ (اثبات لازم نیست)

موفق باشید.

۹۵/۴/۱۵