به نام او

امتحان میان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای وقت امتحان: ۳ ساعت

---

۱. اگر $f \in C^2_0(\mathbb{R}^2)$ نشان دهید $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ و $-\Delta u = f$ که

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log|x-y| f(y)\, dy$$

۲. قرار دهید $U^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1,\, x_n > 0\}$ و فرض کنید $u \in C^2(\overline{U^+})$ تابع هارمونیک در U^+ باشد که $u = 0$ روی $\partial U^+ \cap \{x_n = 0\}$. نشان دهید تابع زیر در گوی باز $B(0,1)$ هارمونیک است.

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{اگر } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) & \text{اگر } x_n < 0 \end{cases}$$

۳. به روش خمهای مشخصه و با بررسی شرط غیرمشخصه خم $y = x^3$، فرمول صریح جواب معادله زیر را به دست آورید. جواب به دست آمده در چه ناحیه‌ای معتبر است؟

$$\begin{cases} x u_x(x,y) + 2y u_y(x,y) = 3u(x,y) \\ u(x, x^3) = x^2 + x \end{cases}$$

۴. فرض کنید u جواب معادله لاپلاس در $\mathbb{R}^2$ باشد که روی پاره‌خط $-1 < x < 1$ و $y = 0$ داریم: $u = u_y = 0$.

الف- نشان دهید که $u = 0$ در همه جا.

ب- اگر u جواب معادله موج باشد ($u_{xx} - u_{yy} = 0$) بزرگترین ناحیه‌ای را به دست آورید که در آن حتما تساوی $u = 0$ برقرار است.

۵. ثابت کنید هر توزیع با تکیه‌گاه فشرده توزیعی ملایم است. با ذکر یک مثال نشان دهید عکس این گزاره صحیح نیست.

۶. با در نظر گرفتن تابع زیر روی $\mathbb{R}^3$ نشان دهید تساوی $-\Delta f = 4\pi\delta$ به معنای توزیع برقرار است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

موفق باشید.

۹۲/۳/۷