به نام او

امتحان پایان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای وقت امتحان: ۳ ساعت

---

۱. فرض کنید $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار، کراندار و غیرنزولی باشد که $\phi(z) = z$ برای $|z| \leq 1$ و ϕ' نیز کراندار است. همچنین فرض کنید که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای باز باشد و $u \in H^1(\Omega)$.

الف- برای $u^\epsilon(x) = \epsilon\phi(\dfrac{u}{\epsilon})$ ثابت کنید $u^\epsilon \rightharpoonup 0$ به طور ضعیف در $H^1(\Omega)$.

ب- به کمک قسمت قبل نتیجه بگیرید $\int_\Omega \phi'(\dfrac{u}{\epsilon})|\nabla u(x)|^2 \, dx \to 0$.

پ- ثابت کنید $\nabla u = 0$ تقریبا همه جا در مجموعه $\{u = 0\}$.

۲. عملگر بیضوی زیر را روی ناحیه باز Ω در نظر بگیرید:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu$$

فرم دوخطی متناظر آن را تعریف کرده و نشان دهید در صورتی که $a_{i,j}, b_i, c \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$، نامساوی $\beta\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq B[u,u] + \gamma\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ برای هر $u \in H^1_0(\Omega)$ برقرار است. توضیح دهید چرا عملگر $(L+\gamma I)^{-1} : \mathcal{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$ فشرده است.

۳. معادله زیر را در نظر بگیرید که f تابعی هموار است که برای یک مقدار ثابت $a > 0$ رابطه $f(u) \geq au$ برای $u > 0$ برقرار است. نشان دهید مقدار ثابت $\gamma > 0$ وجود دارد که برای $\lambda > \gamma$ معادله زیر جواب مثبت ندارد.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

۴. با توضیح کامل روش گالرکین در اثبات وجود جواب معادله سهموی، کرانداری دنباله تقریبهای جواب، $\{u_m\}$، را در $\mathcal{L}^2(0, T; H^1_0(\Omega))$ اثبات نمایید.

۵. نشان دهید هر عضو فضای $(\overset{\circ}{W}{}^{m,p})'$ نمایشی به صورت $\sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha v_\alpha$ دارد که $v_\alpha \in \mathcal{L}^q$. آیا این نمایش یکتا است؟ چرا؟

موفق باشید.

۹۲/۳/۲۵