به نام او

امتحان میان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای وقت امتحان: ۲ ساعت

توجه: <u>فقط</u> به پنج سؤال پاسخ دهید. همه سؤالها نمره برابر دارند.

۱. نشان دهید تابع $u \in C^2(\Omega)$ هارمونیک است اگر و تنها اگر برای هر $B(x,r) \subseteq \Omega$ داشته باشیم

$$u(x) = \frac{\int_{\partial B(x,r)} u\, dS}{\int_{\partial B(x,r)} dS}$$

۲. اگر $u(x,t)$ جواب معادله حرارت $u_t - \Delta u = 0$ در $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ باشد که $u(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}$ برای مقادیر ثابت و مثبت $a,\ A$. نشان دهید

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u(x,t) = \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,0)$$

۳. اگر $u(x,t)$ جواب معادله موج $u_{tt} - \Delta u = 0$ در $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ با شرایط اولیه $u(x,0) = g(x)$ و $u_t(x,0) = h(x)$ باشد، ابتدا نشان دهید

$$u(x,t) = \frac{1}{|\partial B(x,t)|} \int_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x)\, dS(y)$$

و به کمک آن ثابت کنید برای یک مقدار ثابت C خواهیم داشت: $|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$

۴. به روش خمهای مشخصه فرمول صریح جواب معادله زیر را به دست آورید. جواب به دست آمده در چه ناحیه‌ای معتبر است؟

$$\begin{cases} u_x(x,y)u_y(x,y) = u(x,y) \\ u(0,y) = y^2 \end{cases}$$

۵. نشان دهید معادله حرارت $u_t = u_{xx}$ در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ با شرط اولیه $u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$ جواب تحلیلی ندارد.

۶. ناحیه Ω باز و کران‌دار است و $u \in W^{1,p}(\Omega)$ برای $1 \leq p \leq \infty$ آنگاه

الف) $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$

ب) $u^+,\ u^- \in W^{1,p}(\Omega)$

موفق باشید.