به نام او

امتحان پایان ترم درس نظریه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

وقت: ۳ ساعت

---

۱. نشان دهید تابع با تکیه‌گاه فشرده $u:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ لیپشیتز است اگر و تنها اگر $u \in W^{1,\infty}$.

۲. به کمک تبدیل فوریه ثابت کنید $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ به طور پیوسته، اگر $s > \frac{n}{2}$.

۳. عملگر بیضوی زیر را روی ناحیه باز Ω در نظر بگیرید:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu$$

الف- فرم دو خطی $B[u,v]$ القایی از این عملگر را با ذکر دامنه تعریف آن (فضایی که فرم دوخطی روی آن تعریف می‌شود) بنویسید.

ب- نشان دهید در صورتی که $a_{i,j}, b_i, c \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$، این فرم دو خطی پیوسته است.

پ- در چه صورتی این فرم دو خطی تراکمی است؟ (تراکمی یعنی $B[u,u] \geq \beta \|u\|^2$)

ت- به کمک قضیه Lax-Milgram ثابت کنید برای μ به اندازه کافی بزرگ، عملگر $L_\mu := L + \mu I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ وارون پیوسته دارد.

ث- اگر $b_i = 0$ و $a_{ij} = a_{ji}$ نشان دهید کوچکترین مقدار ویژه L برابر است با

$$\lambda_1 = \min_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{B[u,u]}{\|u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}$$

۴. تابع $u \in H^1(\Omega)$ را جواب ضعیف معادله نیومن

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

گوییم، هرگاه برای هر $v \in H^1(\Omega)$ داشته باشیم:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

به کمک قضیه جایگزین فردهلم ثابت کنید معادله بالا جواب ضعیف دارد اگر و تنها اگر $\int_\Omega f \, dx = 0$.

۵. فرض کنید u جواب هموار معادله زیر باشد

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0,\infty) \\ u = g & \text{on } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

الف- اگر تابع c در رابطه $c(x,t) \geq \gamma > 0$ صدق کند، نشان دهید $|u(x,t)| \leq Ce^{-\gamma t}$.

ب- اگر $g \geq 0$ و تابع c کران‌دار (نه لزوماً مثبت یا منفی) نشان دهید $u \geq 0$.

ادامه در پشت برگه:

۶. حالت ساده اصل ماکسیمم ضعیف را برای عملگر بیضوی

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu$$

بدین صورت در نظر می‌گیریم:

«اگر $Lu \geq 0$ در Ω و $u \geq 0$ روی $\partial\Omega$ نتیجه شود $u \geq 0$ در Ω.»

الف- اگر $c \geq 0$ در Ω، نشان دهید گزاره بالا درست است. (برای اثبات از اصل ماکسیمم ضعیف در حالت $c = 0$ می‌توانید استفاده کنید.)

ب- اگر همه مقادیر ویژه عملگر L مثبت باشد و تابع ویژه متناظر کوچکترین مقدار ویژه یک تابع مثبت باشد، نشان دهید اصل ماکسیمم بالا درست است. (راهنمایی: قرار دهید $v = \dfrac{u}{\phi_1}$ و نتیجه قسمت الف را برای تابع v به کار برید.)

موفق باشید.

بارم: سؤالات ۱ و ۴ (۱۵ نمره)؛ سؤال ۲ (۱۰ نمره)؛ سؤال ۳ (۴۰ نمره)؛ سؤالات ۵، ۶ (۲۰ نمره)