فصل ۲

دستگاههای خطی

۱.۲ ماتریس اساسی

دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی (۱.۱) دستگاه خطی گفته می‌شود هرگاه میدان برداری نسبت به X خطی و به صورت

$$f(t, X) = A(t)X + g(t)$$

باشد که $A(t)$ یک ماتریس $n \times n$ پیوسته است و $g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابع برداری n-بعدی پیوسته است. هرگاه $g(t) \equiv ۰$، معادله خطی را همگن می‌نامیم. بنابر مثال ۷.۱ برای هر شرط اولیه معادله خطی جواب یکتا دارد و بازه ماکسیمال جواب برابر بزرگترین بازه‌ای است که ضرایب $A(t)$ و $g(t)$ پیوسته باشند.

مهمترین خاصیت دستگاههای خطی این است که مجموعه همه جوابهای معادله خطی همگن زیر تشکیل یک فضای برداری n-بعدی می‌دهد.

$$\dot{X} = A(t)X \tag{۱.۲}$$

اگر $u_۱(t), \ldots, u_k(t)$ جوابهایی برای معادله فوق باشند و $c_۱, \ldots, c_k$ اعداد حقیقی ثابت باشند، آنگاه به وضوح $u(t) = c_۱u_۱(t) + \cdots + c_ku_k(t)$ نیز در این معادله صدق می‌کند. بنابراین هر ترکیب خطی از جوابهای معادله خطی همگن، باز جواب معادله است و مجموعه همه جوابها یک فضای برداری است. اگر $X_i(t)$ برای $i = ۱, \ldots, n$ جواب معادله (۱.۲) با شرط اولیه $X_i(t_۰) = e_i$ باشد که $\{e_۱, \ldots, e_n\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ است. به وضوح $\{X_۱(t), \ldots, X_n(t)\}$ یک مجموعه مستقل خطی است. اما این مجموعه یک پایه برای فضای همه جوابها است،

زیرا اگر $X(t)$ جواب دلخواهی از (۱.۲) باشد و $X(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$، آنگاه $X(t)$ و $\alpha_1 X_1(t) + \cdots + \alpha_n X_n(t)$ دو جواب هستند که شرایط اولیه هر دو در زمان t_0 برابر است. بنابر یکتایی جواب نتیجه می‌شود که

$$X(t) = \alpha_1 X_1(t) + \cdots + \alpha_n X_n(t)$$

دقت کنید که تا هر زمان که ماتریس $A(t)$ پیوسته است همه این جوابها تعریف می‌شوند و این تساوی در کل این بازه زمانی برقرار است.

تعریف ۱.۲. *اگر $\Phi(t)$ ماتریس $n \times n$ باشد که ستونهای آن جوابهای مستقل خطی معادله (۱.۲) باشند، آن را یک* **ماتریس اساسی** *برای این معادله می‌نامیم.*

دقت کنید شرط اینکه ستونهای ماتریس اساسی $\Phi(t)$ جوابهای معادله (۱.۲) باشند معادل این است که ماتریس اساسی خود در این معادله صدق کند، یعنی $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$. توجه کنید شرط استقلال خطی جوابها در فضای برداری $\{u : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n | \, \dot{u} = A(t)u\}$ مطرح می‌شود و برای این منظور تنها کافی است این جوابها تنها در یک زمان مستقل خطی باشند. در قضیه زیر نشان داده می‌شود که این شرط لازم هم است و لذا شرط استقلال خطی ستونها معادل این است که ماتریس اساسی در زمان t_0 وارون‌پذیر باشد. این ویژگی مختص جوابهای یک معادله دیفرانسیل خطی است. به عنوان مثال دو تابع برداری $u(t) = (t, 1)^T$ و $v(t) = (t^2, t)^T$ در هر زمان به عنوان دو بردار در $\mathbb{R}^2$ وابسته خطی هستند، اما در فضای توابع برداری مستقل خطی هستند. لذا این دو نمی‌توانند جوابهای یک دستگاه خطی باشند.

قضیه ۲.۲. *اگر ماتریس $A(t)$ در بازه I پیوسته باشد و $\Phi(t)$ در این بازه در معادله (۱.۲) صدق کند، در این صورت $\Phi(t)$ ماتریس اساسی است اگر و تنها اگر $\det \Phi(t_0) \neq 0$ برای یک $t_0 \in I$.*

اثبات. اگر $\det \Phi(t_0) = 0$، آنگاه ماتریس $\Phi(t_0)$ تکین است و بردار $\xi \neq 0$ وجود دارد که $\Phi(t_0)\xi = 0$. اما تابع $X(t) = \Phi(t)\xi$ در بازه I در معادله (۱.۲) صدق می‌کند که $X(t_0) = 0$. بنابر یکتایی جواب باید $X(t) \equiv 0$ تا هر زمان که این جواب تعریف شود. پس $\Phi(t)\xi \equiv 0$ و یک ترکیب‌خطی از ستونهای $\Phi(t)$ وجود دارد که برابر تابع صفر می‌شود. یعنی $\Phi(t)$ نمی‌تواند ماتریس اساسی باشد.

برعکس، اگر ستونهای $\Phi(t)$ در فضای توابع وابسته خطی باشند آنگاه یک ترکیب‌خطی آن که به

صورت $\Phi(t)\xi$ قابل نمایش است متحد با صفر است. لذا برای زمان $t_\circ$ نیز $\Phi(t_\circ)\xi = \circ$ و در نتیجه ماتریس $\Phi(t_\circ)$ وارون‌پذیر نیست. □

قضیه ۳.۲. (فرمول آبل) *اگر $\Phi(t)$ در معادله (۱.۲) در بازه I صدق کند، آنگاه*

$$\frac{d}{dt}\det\Phi(t) = trA(t)\det\Phi(t)$$

و درنتیجه

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_\circ)\exp(\int_{t_\circ}^{t} trA(s)ds).$$

اثبات. قرار دهید:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

ستونهای این ماتریس در معادله (۱.۲) صدق می‌کنند، پس

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{1i} \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{ni} \end{bmatrix} = A(t)\begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\dot{\phi}_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\phi_{ki}$$

که $A(t) = [a_{ij}(t)]$. بنابر قضیه لایب‌نیتز برای مشتق توابع چند خطی (به خصوص تابع دترمینان) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det\Phi(t) &= \begin{vmatrix} \dot{\phi}_{11} & \cdots & \dot{\phi}_{1n} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \dot{\phi}_{21} & \cdots & \dot{\phi}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{\phi}_{n1} & \cdots & \dot{\phi}_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\phi_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\phi_{kn} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\phi_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\phi_{kn} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\begin{vmatrix}\phi_{k1} & \cdots & \phi_{kn}\\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn}\end{vmatrix}+\sum_{k=1}^{n} a_{2k}\begin{vmatrix}\phi_{11} & \cdots & \phi_{1n}\\ \phi_{k1} & \cdots & \phi_{kn}\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn}\end{vmatrix}+\cdots\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n} a_{nk}\begin{vmatrix}\phi_{11} & \cdots & \phi_{1n}\\ \phi_{21} & \cdots & \phi_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_{k1} & \cdots & \phi_{kn}\end{vmatrix}\\
&=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\begin{vmatrix}\phi_{11} & \cdots & \phi_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn}\end{vmatrix}=trA(t)\det\Phi(t)
\end{aligned}
$$

□

نتیجه ۴.۲. *اگر $\Phi(t)$ در معادله (۲.۱) در بازه I صدق کند، آنگاه $\det\Phi(t_0)=0$ اگر و تنها اگر $\det\Phi(t)=0$ برای هر $t\in I$.*

مثال ۵.۲. *دو تابع $u(t)=(t,1)^T$ و $v(t)=(0,t)^T$ نمی‌توانند جوابهای یک دستگاه خطی باشند. زیرا دترمینان $\begin{vmatrix} t & 0\\ 1 & t\end{vmatrix}$ تنها در $t=0$ برابر صفر است.*

قضیه ۶.۲. *اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی معادله (۲.۱) در بازه I باشد، آنگاه*

الف- اگر C یک ماتریس ثابت و وارون‌پذیر باشد، آنگاه $\Phi(t)C$ نیز یک ماتریس اساسی است.

ب- اگر $\Psi(t)$ نیز یک ماتریس اساسی دیگر باشد، آنگاه ماتریس ثابت و وارون‌پذیر C وجود دارد که $\Psi(t)=\Phi(t)C$ به ازای هر $t\in I$.

اثبات. الف- اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی باشد، آنگاه در معادله صدق می‌کند و دترمینان آن ناصفر است. در این صورت

$$\frac{d}{dt}\Phi(t)C=\dot{\Phi}(t)C=A(t)\Phi(t)C$$

چون C وارون‌پذیر است، پس $\Phi(t)C$ نیز وارون‌پذیر است و بنابر قضیه ۲.۲ یک ماتریس اساسی است.

ب- قرار دهید: $C:=\Phi(t_0)^{-1}\Psi(t_0)$، آنگاه $\Phi(t)C$ و $\Psi(t)$ هر دو در معادله صدق می‌کنند و در زمان t_0 برابرند، پس بنابر یکتایی جواب در بقیه زمانها نیز مساوی هستند. □

اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی معادله (۱.۲) باشد، آنگاه جواب این معادله با شرط اولیه $X(t_\circ) = X_\circ$ برابر است با

$$X(t) = \Phi(t)\Phi(t_\circ)^{-1}X_\circ$$

قضیه ۷.۲. (فرمول تغییر پارامترها[۱]) *اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی معادله (۱.۲) باشد، آنگاه جواب دستگاه غیر خطی*

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X + g(t) \\ X(t_\circ) = X_\circ \end{cases} \tag{۲.۲}$$

نمایشی به صورت زیر دارد:

$$X(t) = \Phi(t)\Phi(t_\circ)^{-1}X_\circ + \int_{t_\circ}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}g(s)ds$$

اثبات. قطعاً ساده‌ترین راه حل این است که فرمول بالا را در معادله جایگزین کنیم و ببینیم که در معادله صدق می‌کند. اما برای اینکه ببینیم این فرمول از کجا به دست آمده و وجه تسمیه آن به فرمول تغییر پارامترها یا فرمول تغییر ثابتها چیست راه حل زیر ارایه می‌شود. دقت کنید تمام توابع به صورت $\Phi(t)\xi$ یک جواب معادله همگن است. اکنون بردار ثابت ξ را به یک تابع وابسته به زمان تغییر می‌دهیم و عبارت $X(t) = \Phi(t)Y(t)$ را در معادله ناهمگن جایگزین می‌کنیم. معادله زیر برای $Y(t)$ به دست می‌آید:

$$\dot{Y}(t) = \Phi(t)^{-1}g(t)$$

جواب این معادله برابر است با:

$$Y(t) = Y(t_\circ) + \int_{t_\circ}^{t} \Phi(s)^{-1}g(s)ds$$

دقت کنید که $Y(t_\circ) = \Phi(t_\circ)^{-1}X_\circ$، و بدین ترتیب فرمول مورد نظر به دست می‌آید. □

۲.۲ دستگاه خطی با ضرایب ثابت

در این بخش به دنبال پیدا کردن جواب دستگاه خطی با ضرایب ثابت زیر هستیم:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(t_\circ) = X_\circ \end{cases} \tag{۳.۲}$$

---
[۱] Variation of Parameters formula

به روش تقریبهای متوالی دنباله زیر در بازه $|t-t_\circ| < \frac{1}{\|A\|}$، به جواب معادله همگرای یکنواخت است (مثال ۷.۱ و قضیه ۸.۱)

$$u_\circ(t) \equiv X_\circ, \qquad u_{k+1}(t) = X_\circ + \int_{t_\circ}^{t} Au_k(s)ds$$

با محاسبه جملات این دنباله نتیجه می‌شود که

$$u_k(t) = \big(I + (t-t_\circ)A + \cdots + \frac{1}{k!}(t-t_\circ)^k A^k\big)X_\circ$$

مقدار این حد که جواب معادله است، به صورت سری زیر نمایش می‌دهیم:

$$X(t) = \Big(\sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{1}{k!}(t-t_\circ)^k A^k\Big)X_\circ$$

عبارت داخل پرانتز را به عنوان اثر تابع نمایی روی ماتریس تعریف می‌کنیم:

$$\exp A := \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{۴.۲}$$

لذا جواب معادله (۳.۲) به صورت $X(t) = \exp\big((t-t_\circ)A\big)X_\circ$ است. هرچند از قضیه پیکارد (قضیه ۸.۱) همگرایی سری فوق تنها در یک بازه کوچک حول نقطه آغازین نتیجه می‌شود، اما این سری برای تمام مقادیر $t \in \mathbb{R}$ همگرا است و تابع $\exp\big((t-t_\circ)A\big)$ یک تابع مشتق‌پذیر است که در معادله (۳.۲) صدق می‌کند. زیرا اولاً بنابر قضیه M-وایراشتراس سری فوق برای هر α در بازه $|t-t_\circ| \le \alpha$ همگرای یکنواخت و در نتیجه پیوسته است:

$$\|\exp\big((t-t_\circ)A\big)\| = \|\sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{1}{k!}(t-t_\circ)^k A^k\| \le \sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{1}{k!}\alpha^k \|A\|^k = \exp(\alpha\|A\|)$$

ثانیاً مشتق مجموعهای جزئی همگرا است و در نتیجه مشتق تابع $\exp\big((t-t_\circ)A\big)$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp\big((t-t_\circ)A\big) &= \lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{k=\circ}^{m} \frac{1}{k!}(t-t_\circ)^k A^k\Big)' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}(t-t_\circ)^{k-1} A^k = A\exp\big((t-t_\circ)A\big)\end{aligned}$$

گزاره ۸.۲. *اگر $AB = BA$ آنگاه $\exp(A+B) = \exp A \exp B$. به علاوه ماتریس $\exp A$ همواره وارون‌پذیر است و $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.*

قضیه ۹.۲. *ماتریس $\exp(tA)$ ماتریس اساسی معادله $\dot{X} = AX$ است.*

ماتریسهای قطری

اکنون به محاسبه ماتریس $\exp(tA)$ می‌پردازیم. برای این منظور در ساده‌ترین حالت اگر $A = \mathrm{diam}(\lambda_۱, \ldots, \lambda_n)$ قطری باشد،

$$\exp(tA) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!} \begin{bmatrix} (t\lambda_۱)^k & & ۰ \\ & \ddots & \\ ۰ & & (t\lambda_n)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_۱} & & ۰ \\ & \ddots & \\ ۰ & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}$$

در این حالت دستگاه خطی $\dot{X} = AX$ متناظر n معادله مجزای $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$ است. بدیهی است که جواب این معادلات به صورت $x_i(t) = e^{t\lambda_i} x_i(۰)$ است.

ماتریسهای قطری شدنی

اگر ماتریس A قطری شدنی باشد، یعنی ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $P^{-۱}AP = D = \mathrm{diam}(\lambda_۱, \ldots, \lambda_n)$، آنگاه

$$\exp(tA) = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P D^k P^{-۱} = P \exp(tD) P^{-۱} = P \begin{bmatrix} e^{t\lambda_۱} & & ۰ \\ & \ddots & \\ ۰ & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

مقادیر ویژه مختلط

توجه کنید که وقتی یک ماتریس قطری شدنی است که n بردار ویژه حقیقی مستقل داشته باشد. در این صورت ستونهای ماتریس P بردارهای ویژه هستند. اگر بعضی از این بردارهای ویژه مختلط باشند، آنگاه ماتریس A در میدان $\mathbb{C}$ قطری می‌شود. در این صورت تمام محاسبات بالا معتبر است، اما اگر این محاسبات را در میدان $\mathbb{R}$ انجام دهیم برای مقدار ویژه مختلط $\lambda = \alpha \pm i\beta$ و بردار ویژه متناظر آن $W = U \pm iV$ داریم (دقت کنید وقتی ماتریس حقیقی باشد، مزدوج یک مقدار ویژه باز مقدار ویژه است که بردار ویژه آن نیز مزدوج می‌شود، لذا همیشه مقادیر ویژه مختلط را همراه با مزدوج آن به صورت زوج در نظر می‌گیریم):

$$A(U \pm iV) = (\alpha \pm i\beta)(U \pm iV) \Longrightarrow A \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

در نتیجه اگر $\{\lambda_۱, \overline{\lambda_۱}, \ldots, \lambda_m, \overline{\lambda_m}, \lambda_{۲m+۱}, \ldots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه ماتریس A به ترتیب متناظر بردارهای ویژه $\{U_۱ \pm iV_۱, \ldots, U_m \pm iV_m, W_{۲m+۱} \ldots, W_n\}$ باشند، (مقادیر ویژه می‌توانند

تکراری باشند) قرار دهید

$$P=\Big[U_1,V_1,\dots,U_m,V_m,W_{2m+1},\dots,W_n\Big]$$

در این صورت اگر P وارون‌پذیر باشد، آنگاه

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} D_1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & D_m & & & \\ & & & \lambda_{2m+1} & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

که به ازای مقادیر ویژه $\lambda_k=\alpha_k+i\beta_k$ و مزدوج آن روی قطر اصلی ماتریس 2×2

$$D_k=\begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}$$

ظاهر می‌شود. برای سادگی ماتریس شبه قطری بالا را به صورت

$$P^{-1}AP=\mathrm{diam}(D_1,\dots,D_m,\lambda_{2m+1},\dots,\lambda_n)$$

نشان می‌دهیم. در این صورت

$$P^{-1}\exp(tA)P=\mathrm{diam}\big(\exp(tD_1),\dots,\exp(tD_m),\exp(t\lambda_{2m+1}),\dots,\exp(t\lambda_n)\big)$$

در نتیجه برای محاسبه $\exp(tA)$ تنها لازم است ماتریسهای $\exp(tD_k)$ محاسبه شوند. برای این منظور به دو روش اقدام می‌کنیم:

روش اول: ماتریس $\exp(tD_k)$، ماتریس اساسی دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x}=\alpha_k x+\beta_k y \\ \dot{y}=-\beta_k x+\alpha_k y \end{cases}$$

دقت کنید چون λ_k مقدار ویژه مختلط است باید $\beta_k\neq 0$ و با قراردادن $y=\dfrac{\dot{x}-\alpha_k x}{\beta_k}$، این دستگاه معادل معادله مرتبه دوم $\ddot{x}-2\alpha_k\dot{x}+(\alpha_k^2+\beta_k^2)x=0$ خواهد شد که جواب عمومی آن برابر است با $x(t)=e^{t\alpha_k}(c_1\cos(\beta_k t)+c_2\sin(\beta_k t))$. از طرفی ستون اول ماتریس $\exp(tD_k)$ بردار $(x(t),y(t))^T$ است که در دستگاه بالا صدق می‌کند و در زمان $t=0$ برابر $e_1=(1,0)^T$ است. ($\exp(O)=I$) در نتیجه $x(t)=e^{t\alpha_k}\cos(\beta_k t)$ و $y(t)=-e^{t\alpha_k}\sin(\beta_k t)$. به طور مشابه ستون دوم ماتریس $\exp(tD_k)$ محاسبه می‌شود.

$$\exp(tD_k)=e^{t\alpha_k}\begin{bmatrix} \cos(\beta_k t) & \sin(\beta_k t) \\ -\sin(\beta_k t) & \cos(\beta_k t) \end{bmatrix}$$

روش دوم: $D_k = \alpha_k I + \beta_k N$، که

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابر گزاره ۸.۲، $\exp(tD_k) = \exp(t\alpha_k I)\exp(t\beta_k N)$. از طرفی داریم: $N^2 = -I$، در نتیجه

$$\begin{aligned}\exp(t\beta_k N) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\beta_k)^j N^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (t\beta_k)^{2j}}{(2j)!} I + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (t\beta_k)^{2j+1}}{(2j+1)!} N \\ &= \cos(\beta_k t) I + \sin(\beta_k t) N\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\exp(t\alpha_k I) = e^{t\alpha_k} I$ به همان نتیجه نهایی روش اول می‌رسیم.

بردارهای ویژه تعمیم یافته و فرم جردن

تکرر یک مقدار ویژه به عنوان ریشه معادله مشخصه ماتریس را تکرر جبری آن مقدار ویژه می‌نامیم. اگر به اندازه تکرر هر مقدار ویژه، بردار ویژه مستقل داشته باشیم، آنگاه ماتریس قطری شدنی است. اما در اکثر ماتریسها چنین اتفاقی نمی‌افتد. در چنین مواقعی فرم جردن که یک فرم شبه خطی است برای محاسبات ماتریسی به کار می‌آید.

تعریف ۱۰.۲. *بردار $u \neq 0$ یک بردار ویژه تعمیم یافته ماتریس A است، هرگاه $(A-\lambda I)^m u = 0$ برای یک مقدار m برقرار باشد. اگر $m = 1$ باشد، u همان بردار ویژه است.*

قضیه ۱۱.۲. *اگر λ مقدار ویژه با تکرر جبری m باشد، آنگاه بردار ویژه‌های تعمیم یافته $\mathcal{E}_i = \{V_1^i, \dots, V_{r_i}^i\}$ برای $1 \leq i \leq l$ وجود دارند که $r_1 + \cdots + r_l = m$ و مجموعه $\bigcup_{1 \leq i \leq l} \mathcal{E}_i$ مستقل خطی است. به علاوه اگر قرار دهیم $V_0^i = 0$، داریم*

$$(A - \lambda I)V_k^i = V_{k-1}^i \qquad 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq k \leq r_i$$

قضیه بالا نشان می‌دهد که به اندازه تکرر جبری هر مقدار ویژه بردار ویژه تعمیم یافته مستقل خطی وجود دارد، هرچند در هر مجموعه $\mathcal{E}_i$ تنها V_1^i بردار ویژه است. از رابطه بین بردارهای ویژه

تعمیم یافته نتیجه می‌شود که

$$
\begin{aligned}
A\left[V_1^i, V_2^i, \ldots, V_{r_i}^i\right] &= \left[\lambda V_1^i, V_1^i + \lambda V_2^i, \ldots, V_{r_i-1}^i + \lambda V_{r_i}^i\right] \\
&= \left[V_1^i, V_2^i, \ldots, V_{r_i}^i\right] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

بنابراین اگر برای تمام مقادیر ویژه ماتریس A، قضیه ۱۱.۲ را به کار بریم، به تعداد بعد ماتریس، n، بردار ویژه تعمیم یافته مستقل خطی وجود دارد که اگر به صورت مجموعه‌های $\mathcal{E}_i$ مرتب شوند و به ترتیب ستونهای ماتریس P را تشکیل دهند، آنگاه $P^{-1}AP = \operatorname{diam}(J_1, \ldots, J_s)$. هر کدام از ماتریسهای J_i متناظر یکی از مجموعه‌های $\mathcal{E}_j$ برای یکی از مقادیر ویژه ماتریس A است و آن را یک بلوک جردن می‌نامند. هرکدام از این بلوکهای جردن به صورت زیر هستند:

$$
\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}
$$

با توجه به نکته بالا برای محاسبه $\exp(tA)$ تنها کافی است $\exp(tJ)$ برای بلوکهای جردن محاسبه شود. برای این منظور توجه کنید که اگر J یک بلوک جردن $r \times r$ باشد، آنگاه $J = \lambda I + N$ و N^k برای $1 \leq k \leq r-1$ ماتریسی است که همه درایه‌های آن برابر صفر است مگر k-اُمین قطر بالای قطر اصلی که روی آن عدد یک است. همچنین $N^r = 0$ و درنتیجه

$$
\exp(tN) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k N^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

ماتریس حاصل یک ماتریس بالا مثلثی است که روی قطر اصلی آن عدد یک قرار دارد و روی k-اُمین قطر بالای قطر اصلی مقدار $\dfrac{t^k}{k!}$ قرار دارد. بدین ترتیب داریم $\exp(tJ) = e^{t\lambda}\exp(tN)$.

در حالتی که مقدار ویژه مختلط باشد، محاسبات بالا در میدان $\mathbb{C}$ معتبر است. اما اگر بخواهیم در میدان $\mathbb{R}$ باشیم، مشابه بحثهایی که برای قطری سازی در این حالت داشتیم، اینجا نیز به جای

مقدار ویژه مختلط $\lambda = \alpha \pm i\beta$، روی قطر اصلی ماتریسهای ۲ × ۲،

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

قرار می‌گیرد. در واقع بلوکهای جردن متناظر مقادیر ویژه مختلط و مزدوج آن به صورت زیر است:

$$J = \begin{bmatrix} D & I_2 & & 0 \\ 0 & D & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \dots & 0 & D \end{bmatrix}$$

که I_2 ماتریس همانی ۲ × ۲ است. در این حالت نیز

$$\exp(tJ) = e^{t\alpha} \begin{bmatrix} S & tS & \frac{t^2}{2}S & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}S \\ 0 & S & tS & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}S \\ \vdots & & \ddots & \ddots & tS \\ 0 & \dots & \dots & 0 & S \end{bmatrix}$$

که در آن

$$S = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

قضیه ۱۲.۲. *اگر A یک ماتریس دلخواه $n \times n$ باشد، هر درآیه $\exp(tA)$ ترکیبی خطی از توابع به صورت $e^{t\alpha}\cos(\beta t)p(t)$ و $e^{t\alpha}\sin(\beta t)p(t)$ است که $\alpha \pm i\beta$ یک مقدار ویژه ماتریس A است و $p(t)$ یک چند جمله‌ای است از درجه حداکثر یکی کمتر از بعد بلوکهای جردنی که این مقدار ویژه در آن ظاهر می‌شود.*

۲.۳ زیرفضاهای پایدار

تعریف ۱۳.۲. *ماتریس A را نیمه ساده گوییم، هرگاه در فرم جردن مختلط آن بلوکهای جردن متناظر هر مقدار ویژه‌ای که قسمت حقیقی آن صفر است، $\mathrm{Re}\lambda = 0$، یک بعدی باشد. اگر فرم جردن حقیقی را در نظر بگیریم باید بلوکهای متناظر مقادیر ویژه به صورت $\pm i\beta$، ۲ × ۲ و به صورت ماتریسهای D باشد که در بخش قبل معرفی کردیم. به علاوه بلوکهای جردن متناظر مقدار ویژه صفر (در صورت وجود) نیز یک بعدی باشد.*

قضیه ۱۴.۲. *اگر $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشد. در این صورت*

الف- اگر $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$ برای هر $1 \leq k \leq n$، آنگاه ثابتهای $\mu, C > 0$ وجود دارند که برای هر شرط اولیه $X(t_0) = X_0$ و جواب معادله (۳.۲) داشته باشیم:

$$|X(t)| \leq Ce^{-\mu(t-t_0)}|X_0| \qquad \text{برای } t \geq t_0$$

ب- اگر $\mathrm{Re}\lambda_k \leq 0$ برای هر $1 \leq k \leq n$ و ماتریس A نیمه ساده باشد، آنگاه ثابت $M > 0$ وجود دارد که برای هر شرط اولیه $X(t_0) = X_0$ و جواب معادله (۳.۲) داشته باشیم:

$$|X(t)| \leq M|X_0| \qquad \text{برای } t \geq t_0$$

ج- اگر $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$ به ازای لااقل یکی از مقادیر ویژه، آنگاه برای هر $\epsilon > 0$، بردار $|X_0| < \epsilon$ وجود دارد که برای جواب معادله (۳.۲) با شرط اولیه $X(t_0) = X_0$ داریم:

$$\lim_{t\to+\infty} |X(t)| = \infty$$

اثبات. الف- می‌دانیم که $X(t) = \exp\big((t-t_0)A\big)X_0$، بنابراین کافی است برای $t \geq 0$ ثابت شود $\|\exp(tA)\| \leq Ce^{-\mu t}$. اگر $a_{ij}(t)$ درآیه‌های ماتریس $\exp(tA)$ باشند، آنگاه بنابر هم‌ارزی نرمها در فضاهای برداری با بعد متناهی نتیجه می‌شود، ثابت C_1 وجود دارد که

$$\|\exp(tA)\| \leq C_1 \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$$

حال $\mu > 0$ را با شرط زیر انتخاب کنید:

$$\max_{1\leq k\leq n} \mathrm{Re}\lambda_k < -\mu < 0$$

آنگاه هرکدام از توابع $e^{\mu t}a_{ij}(t)$ برای $t \geq 0$ کراندار هستند. زیرا بنابر قضیه ۱۲.۲، $a_{ij}(t)$ ترکیب خطی جملات به صورت $e^{t\alpha}\cos(\beta t)p(t)$ و $e^{t\alpha}\sin(\beta t)p(t)$ است که $\alpha \pm i\beta$ یک مقدار ویژه است. بنابر انتخاب μ، می‌دانیم که $\alpha + \mu < 0$، و در نتیجه $\lim_{t\to+\infty} e^{\mu t}a_{ij}(t) = 0$. اگر $e^{-\mu t}a_{ij}(t) \leq C_{ij}$ برای $t \geq 0$، آنگاه

$$\|\exp(tA)\| \leq C_1 \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \leq C_1 \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}e^{-\mu t} \leq Ce^{-\mu t}$$

ب- مشابه قسمت قبل تنها کافی است نشان دهیم که توابع $a_{ij}(t)$ برای $t \geq t_0$ کراندار هستند. این مطلب با توجه به اینکه این درآیه‌ها ترکیب خطی توابع به صورت $e^{t\alpha}\cos(\beta t)p(t)$ و $e^{t\alpha}\sin(\beta t)p(t)$ هستند نتیجه می‌شود. زیرا که بنابر فرض قضیه $\alpha \leq 0$، و اگر $\alpha = 0$ از نیمه ساده بودن ماتریس و قضیه ۱۲.۲ نتیجه می‌شود که درجه چندجمله‌ای $p(t)$ برابر صفر است.

ج- اگر $W = U+iV$ بردار ویژه متناظر مقدار ویژه λ_k باشد، آنگاه $X(t) = \mathrm{Re}(\rho e^{(t-t_\circ)\lambda_k}W)$ جواب معادله (۲.۳) با شرط اولیه $X(t_\circ) = \rho U$ است. ρ را به اندازه کافی کوچک بگیرید که $|X_\circ| < \epsilon$. اگر $\lambda_k = \alpha + i\beta$،

$$|X(t)| = |\rho|\,|\cos(\beta(t-t_\circ))U + \sin(\beta(t-t_\circ))V|e^{(t-t_\circ)\alpha}$$

اما $\alpha > \circ$، و در نتیجه $\lim_{t\to+\infty} e^{(t-t_\circ)\alpha} = \infty$. بنابراین در حالتی که λ_k مقدار ویژه حقیقی باشد، یعنی $\beta = \circ$، به وضوح حکم مورد نظر برای جواب $X(t)$ برقرار است. در حالت $\beta \neq \circ$ نیز بردارهای U و V مستقل هستند و تابع داخل نرم در سمت راست عبارت بالا که یک تابع تناوبی ناصفر است، همیشه از صفر فاصله دارد، لذا باز می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t\to+\infty}|X(t)| = \infty$.
□

نکته ۲.۱۵. *از شرایط الف در قضیه بالا نتیجه می‌شود که $\lim_{t\to+\infty}|X(t)| = \circ$. در چنین حالتی مبدأ را **چاه**[۲] می‌نامیم. هم‌چنین برای زمانهای $t \leq t_\circ$، خواهیم داشت:*

$$|X_\circ| = |\exp\big((t_\circ - t)A\big)X(t)| \leq \|\exp\big((t_\circ - t)A\big)\|\,|X(t)| \leq Ce^{\mu(t-t_\circ)}|X(t)|$$

لذا با همان ضرایب ثابت $\mu, C > \circ$ که در قضیه آمده است، نتیجه می‌شود

$$|X(t)| \geq C^{-1}e^{-\mu(t-t_\circ)}|X_\circ| \qquad \text{برای } t \leq t_\circ$$

و به خصوص اینکه برای $X_\circ \neq \circ$، $\lim_{t\to-\infty}|X(t)| = \infty$. نتیجه مشابهی با شرایط قسمت ب در حالت $t \leq t_\circ$ نیز برقرار است.

$$|X(t)| \geq m|X_\circ| \qquad \text{برای } t \leq t_\circ$$

نکته ۲.۱۶. *در قضیه قبل قسمت ب اگر شرط نیمه ساده بودن ماتریس A را حذف کنیم دیگر نتیجه کرانداری $\|\exp\big((t-t_\circ)A\big)\|$ برای $t \geq t_\circ$ برقرار نیست. ولی می‌توان آن را با یک چندجمله‌ای کنترل کرد. زیرا درآیه‌های $a_{ij}(t)$ که ترکیب خطی توابع به صورت $e^{t\alpha}\cos(\beta t)p(t)$ و $e^{t\alpha}\sin(\beta t)p(t)$ هستند برای $\alpha \leq \circ$ کراندار هستند و برای $\alpha = \circ$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر k، که بعد بلوکهای جردن ماتریس A متناظر مقادیر ویژه با قسمت حقیقی صفر حداکثر $k+۱$ است. بنابراین ضریب ثابت $M > \circ$ وجود دارد که*

$$\|\exp\big((t-t_\circ)A\big)\| \leq M(|t|^k + ۱) \qquad \text{برای } t \geq t_\circ$$

---
[۲] sink

و در این صورت برای $t \le t_\circ$:

$$\|\exp\big((t-t_\circ)A\big)\| \ge M^{-1}(|t|^k+1)^{-1} \qquad \text{برای } t \le t_\circ$$

زمانی که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A مثبت باشد، نتیجه مشابه قضیه فوق برقرار است. برای اثبات تنها کافی است ماتریس $-A$ را در قضیه قبل قرار دهید. لذا در حالتی که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه مثبت باشد، وقتی $t \to -\infty$ همه جوابها به مبدأ میل می‌کنند. در این حالت مبدأ را **چشمه**[۳] می‌نامیم.

قضیه ۱۷.۲. *اگر $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشد. در این صورت*

الف- اگر $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$ برای هر $1 \le k \le n$، آنگاه ثابتهای $\mu, C > 0$ وجود دارند که برای هر شرط اولیه $X(t_\circ) = X_\circ$ و جواب معادله (۳.۲) داشته باشیم:

$$|X(t)| \le Ce^{\mu(t-t_\circ)}|X_\circ| \qquad \text{برای } t \le t_\circ$$

ب- اگر $\mathrm{Re}\lambda_k \ge 0$ برای هر $1 \le k \le n$ و ماتریس A نیمه ساده باشد، آنگاه ثابت $M > 0$ وجود دارد که برای هر شرط اولیه $X(t_\circ) = X_\circ$ و جواب معادله (۳.۲) داشته باشیم:

$$|X(t)| \le M|X_\circ| \qquad \text{برای } t \le t_\circ$$

ج- اگر $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$ به ازای لااقل یکی از مقادیر ویژه، آنگاه برای هر $\epsilon > 0$، بردار $|X_\circ| < \epsilon$ وجود دارد که برای جواب معادله (۳.۲) با شرط اولیه $X(t_\circ) = X_\circ$ داریم:

$$\lim_{t\to-\infty} |X(t)| = \infty$$

دو قضیه قبل رفتار جوابهای ماتریسهایی که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه آن مثبت یا منفی است را نشان می‌دهد. در حالت کلی می‌توان فضا را به سه زیرفضا تجزیه کرد که روی هرکدام رفتار جوابها مانند قضایای قبل قابل تعیین است.

تعریف ۱۸.۲. *متناظر هر ماتریس A می‌توان فضای $\mathbb{R}^n$ را به سه زیر فضای زیر تجزیه کرد:*

زیرفضای پایدار:

$$E^s := \mathrm{Span}\{U, V \mid \text{بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی منفی است } U+iV\}$$

زیرفضای مرکزی:

$$E^c := \mathrm{Span}\{U, V \mid \text{بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر است } U+iV\}$$

---
[۳] source

زیرفضای ناپایدار:

$E^u := \mathrm{Span}\{U, V \mid$ *بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت است* $U + iV\}$

از قضیه ۱۱.۲ نتیجه می‌شود که $E^s \oplus E^c \oplus E^u = \mathbb{R}^n$.

تعریف ۱۹.۲. *زیرمجموعه E نسبت به معادله $\dot{X} = f(X)$ ناوردا (پایا)*[۴] *است هرگاه برای هر $X_\circ \in E$ جواب این معادله با شرط اولیه $X(t_\circ) = X_\circ$ در E باقی بماند، یعنی تا هر زمان که جواب تعریف شود $X(t) \in E$.*

لم ۲۰.۲. *اگر E زیرفضای $\mathbb{R}^n$ باشد که $AE \subseteq E$، آنگاه E نسبت به معادله $\dot{X} = AX$ ناوردا است.*

اثبات. اگر $X_\circ \in E$ باشد، از خاصیت $AE \subseteq E$ نتیجه می‌شود که $A^k X_\circ \in E$، پس

$$\sum_{k=\circ}^{N} \frac{(t - t_\circ)^k}{k!} A^k X_\circ \in E$$

و از بسته بودن زیرفضا می‌توان نتیجه گرفت حد سری فوق که همان $\exp\big((t - t_\circ)A\big)X_\circ$ است، در E قرار دارد. □

قضیه ۲۱.۲. *برای هر ماتریس A زیرفضاهای پایدار، مرکزی و ناپایدار متناظر آن E^s، E^c و E^u نسبت به معادله $\dot{X} = AX$ ناوردا است.*

اثبات. بنابر لم فوق تنها باید نشان دهیم $AE^s \subseteq E^s$. بنابر قضیه ۱۱.۲ اجتماع تمام مجموعه‌های به شکل $\mathcal{E}_i$، متناظر همه مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی، تشکیل یک پایه برای زیرفضای E^s می‌دهند. اگر $V_j^i \in \mathcal{E}_i$ یک بردار ویژه تعمیم یافته باشد، آنگاه

$$AV_j^i = V_{j-1}^i + \lambda V_j^i \in \mathrm{Span}\mathcal{E}_i \subseteq E^s$$

□

قضیه ۲۲.۲. *برای هر ماتریس A، ثابتهای $C, \mu > \circ$ وجود دارند که برای جواب $X(t)$ از (۳.۲)*

الف- اگر $X_\circ \in E^s$، آنگاه

$$|X(t)| \leq Ce^{-\mu t}|X_\circ| \qquad t \geq t_\circ \text{ برای}$$

[۴] invariant

$$|X(t)| \geq C^{-1} e^{-\mu t} |X_0| \qquad t \leq t_0 \text{ برای}$$

ب- اگر $X_0 \in E^u$، آنگاه

$$|X(t)| \leq C e^{\mu t} |X_0| \qquad t \leq t_0 \text{ برای}$$

$$|X(t)| \geq C^{-1} e^{\mu t} |X_0| \qquad t \geq t_0 \text{ برای}$$

ج- اگر ماتریس A نیمه ساده باشد، ثابتهای $m, M > 0$ وجود دارند که برای هر $X_0 \in E^c - \{0\}$، آنگاه

$$m|X_0| \leq |X(t)| \leq M|X_0|$$

اثبات. ماتریس P را که ستونهای آن از بردارهای ویژه تعمیم یافته تشکیل شده در نظر بگیرید که $P^{-1}AP = J$ فرم جردن است و به علاوه $J = \mathrm{diam}(J_s, J_c, J_u)$ که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریسهای J_s، J_c و J_u به ترتیب منفی، صفر و مثبت است. با تغییر متغیر $Y = P^{-1}X$، دستگاه $\dot{X} = AX$ به دستگاه $\dot{Y} = JY$ تبدیل می‌شود که اگر $Y = (x, y, z)^T$ متناظر سه دستگاه مستقل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \dot{x} = J_s x \\ \dot{y} = J_c y \\ \dot{z} = J_u z \end{cases}$$

شرط اولیه $X_0 \in E^s$ به این معنی است که $y = 0$ و $z = 0$. اکنون با استفاده از قضیه ۱۴.۲ و نکته ۱۵.۲ برای دستگاه $\dot{x} = J_s x$، قسمت الف اثبات می‌شود. قسمت ب و ج نیز به طور مشابه برقرار است. □

نکته ۲۳.۲. *مشابه نکته ۱۶.۲ برای قضیه فوق نیز برقرار است. اگر شرط نیمه ساده بودن را در قسمت ج حذف کنیم، آنگاه ضرایب ثابت $m, M > 0$ و مقدار $k \geq 0$ وجود دارند که برای هر $t \in \mathbb{R}$،*

$$m(1 + |t|^k)^{-1} |X_0| \leq |X(t)| \leq M(1 + |t|^k)|X_0|$$

قضیه ۲۴.۲. *برای هر ماتریس A که $X(t; X_0)$ جواب (۳.۲) باشد، زیرفضاهای پایدار، مرکزی و*

ناپایدار برابرند با:

$$E^s = \{X_\circ \in \mathbb{R}^n : \exists \mu > \circ, \lim_{t\to\infty} e^{\mu t} X(t; X_\circ) = \circ\}$$
$$E^u = \{X_\circ \in \mathbb{R}^n : \exists \mu > \circ, \lim_{t\to -\infty} e^{-\mu t} X(t; X_\circ) = \circ\}$$
$$E^c = \{X_\circ \in \mathbb{R}^n : \forall \mu > \circ, \lim_{t\to\infty} e^{-\mu t} X(t; X_\circ) = \lim_{t\to -\infty} e^{\mu t} X(t; X_\circ) = \circ\}$$

اثبات. از قضیه ۲۲.۲ نتیجه می‌شود که E^s زیرمجموعه سمت راست عبارت بالا است. (کافی است μ را کوچکتر از مقدار معرفی شده در قضیه ۲۲.۲ بگیرید.) برعکس اگر $\lim_{t\to\infty} e^{\mu t} X(t; X_\circ) = \circ$ برای یک مقدار $\mu > \circ$ برقرار باشد، آنگاه $X_\circ = X_\circ^s + X_\circ^c + X_\circ^u$ را تجزیه بردار $X_\circ$ در $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ بگیرید. از خطی بودن معادله نتیجه می‌شود که

$$X(t; X_\circ) = X(t; X_\circ^s) + X(t; X_\circ^c) + X(t; X_\circ^u)$$

از قضیه ۲۲.۲نتیجه می‌شود که اگر $X_\circ^u \neq \circ$، آنگاه $\lim_{t\to+\infty} |X(t; X_\circ^u)| = \infty$ با یک رشد نمایی، و از طرف دیگر بنابر نکته ۲۳.۲ رشد جواب $X(t; X_\circ^c)$ چندجمله‌ای است. لذا سمت راست نامساوی زیر بیکران می‌شود، درحالی که سمت چپ به صفر میل می‌کند، پس $X_\circ^u = \circ$.

$$|X(t; X_\circ)| \geq |X(t; X_\circ^u)| - |X(t; X_\circ^s)| - |X(t; X_\circ^c)|$$

اکنون نامساوی زیر را در نظر بگیرید، که $\mu < \gamma$ در شرط الف قضیه ۲۲.۲ نیز صدق می‌کند.

$$e^{\gamma t}|X(t; X_\circ^c)| \leq e^{\gamma t}|X(t; X_\circ)| + e^{\gamma t}|X(t; X_\circ^s)|$$

در حالت حدی $t \to +\infty$ سمت راست به صفر میل می‌کند، اما سمت چپ بیکران می‌شود. (نکته ۲۳.۲) □

۴.۲ دستگاههای خطی دو بعدی

برای درک بهتر دستگاههای خطی با ضرایب ثابت، حالتهای مختلفی که دستگاه $\dot{X} = AX$ در صفحه می‌تواند داشته باشد را بررسی می‌کنیم. فرم جردن یک ماتریس دو بعدی می‌تواند سه شکل مختلف زیر را داشته باشد.

$$\begin{bmatrix} \lambda & \circ \\ \circ & \mu \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \circ & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

در شکل سوم فرم جردن که متناظر مقدار ویژه مختلط $\alpha \pm i\beta$، است فرض بر این است که $\beta \neq \circ$. با در نظر گرفتن این سه شکل برای فرم جردن ماتریس A، می‌توان به ۱۴ حالت مختلف برای دینامیک

دستگاه $\dot{X} = AX$ رسید.

حالت اول: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ که $\lambda = \mu > 0$.

در این حالت مبدأ گره[۵] ناپایدار سره نامیده شود.

حالت دوم: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ که $\lambda = \mu < 0$.

در این حالت مبدأ گره پایدار سره نامیده شود.

حالت سوم: $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ که $\lambda = \mu = 0$.

در این حالت دستگاه ناتبهگون[۶] نامیده شود.

حالت چهارم: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ که $\lambda > \mu > 0$.

در این حالت مبدأ گره ناپایدار ناسره نامیده شود.

حالت پنجم: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ که $\lambda < \mu < 0$.

در این حالت مبدأ گره پایدار ناسره نامیده شود.

حالت ششم: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ که $\lambda > \mu = 0$.

در این حالت دستگاه ناتبهگون نامیده شود.

حالت هفتم: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ که $\lambda < \mu = 0$.

در این حالت دستگاه ناتبهگون نامیده شود.

حالت هشتم: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ که $\lambda < 0 < \mu$.

در این حالت مبدأ زینی[۷] نامیده شود.

حالت نهم: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ که $\lambda > 0$.

در این حالت مبدأ گره ناپایدار نامیده شود.

حالت دهم: $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ که $\lambda < 0$.

در این حالت مبدأ گره پایدار نامیده شود.

حالت یازدهم: $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ که $\lambda = 0$.

در این حالت دستگاه ناتبهگون نامیده شود.

حالت دوازدهم: $J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ که $\alpha > 0$.

---

[۵] node
[۶] degenerate
[۷] saddle

در این حالت مبدأ مارپیچ[۸] ناپایدار نامیده شود.

حالت سیزدهم: $J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ که $\alpha < 0$.

در این حالت مبدأ مارپیچ پایدار نامیده شود.

حالت چهاردهم: $J = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$

در این حالت مبدأ مرکز[۹] نامیده شود.

۵.۲ ماتریسهای وابسته به زمان

در دو بخش قبل جوابهای یک دستگاه خطی را که ضرایب آن ثابت هستند، بررسی شد. در این بخش دستگاههای خطی را در نظر می‌گیریم که ضرایب دیگر ثابت نیستند و وابسته به زمان هستند. در بعد یک شکل کلی یک معادله خطی همگن به صورت $\dot{x} = a(t)x$ است. جواب این معادله برابر است با

$$x(t) = x(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$$

از این شکل جواب این ایده به ذهن می‌رسد که جواب دستگاه $\dot{X} = A(t)X$ به صورت زیر باشد

$$X(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)ds)X(t_0) \tag{۵.۲}$$

دقت کنید انتگرال از ماتریس $A(s)$، یک ماتریس است و اثر تابع exp روی یک ماتریس با همان رابطه (۴.۲) تعریف می‌شود. اگر

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds \tag{۶.۲}$$

آنگاه $B'(t) = A(t)$ و $(B^2)' = B'B + BB' = AB + BA$. اگر A و B با هم جابه جا شوند، ($AB = BA$) آنگاه $(B^k)' = kAB^{k-1}$ و

$$\frac{d}{dt}\exp(B(t)) = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B(t)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A(t)B(t)^{k-1}}{(k-1)!} = A(t)\exp(B(t))$$

گزاره ۲۵.۲. *اگر $A(t)$ ماتریس پیوسته روی بازه I باشد و $B(t)$ با رابطه (۶.۲) تعریف شود، آنگاه درصورتی که $A(t)$ و $B(t)$ با هم جابه جا شوند، $\exp(B(t))$ ماتریس اساسی معادله $\dot{X} = A(t)X$ است.*

---

[۸] spiral
[۹] center

مثال ۲.۲۶. *اگر* $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{bmatrix}$، $B(t) = \int_0^t A(s)ds = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$ و

$$\exp(B(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{t}(e^{\frac{t^2}{2}} - 1) & e^{\frac{t^2}{2}} \end{bmatrix}$$

در این مثال A و B باهم جابه جا نمی‌شوند و به را حتی می‌توان دید که

$$\frac{d}{dt}\exp(B(t)) \neq A(t)\exp(B(t)).$$

یک ماتریس اساسی برای این دستگاه خطی می‌تواند ماتریس زیر باشد

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \int_0^t e^{\frac{t^2-s^2}{2}} ds & e^{\frac{t^2}{2}} \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس $A(t)$ نزدیک (به معنایی که در ادامه خواهیم دید) یک ماتریس ثابت A باشد، در قضایای زیر خواهیم دید که رفتار جوابهای (۱.۲) شبیه رفتار جوابهای دستگاه خودگردان $\dot{X} = AX$ است.

قضیه ۲.۲۷. *اگر $A(t) = A + B(t)$ که A یک ماتریس ثابت است و $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\|dt < \infty$، در این صورت اگر همه جوابهای $\dot{X} = AX$ در بازه $[t_0, \infty)$ کران‌دار باشد، آنگاه همه جوابهای $\dot{X} = A(t)X$ نیز در این بازه کران‌دار است.*

اثبات. $\exp(tA)$ ماتریس اساسی $\dot{X} = AX$ است و چون همه جوابهای این دستگاه کران‌دار است، پس

$$\|\exp(tA)\| \leq C \qquad t \geq 0 \text{ برای}$$

بنابر فرمول تغییر پارامترها (۲.۷) برای معادله $\dot{X} = AX + B(t)X(t)$ خواهیم داشت:

$$X(t) = \exp\big((t-t_0)A\big)X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\big((t-s)A\big)B(s)X(s)ds$$

بنابراین برای $t \geq t_0$،

$$|X(t)| \leq C|X_0| + C\int_{t_0}^{t} \|B(s)\|\,|X(s)|ds$$

با استفاده از نامساوی گرونوال (لم ۱.۲۶) داریم:

$$|X(t)| \leq C|X_0|\exp\big(C\int_{t_0}^{t}\|B(s)\|ds\big) \leq C|X_0|\exp\big(C\int_{t_0}^{\infty}\|B(s)\|ds\big) < \infty$$

□

قضیه ۲۸.۲. *اگر $A(t) = A + B(t)$ که A یک ماتریس ثابت و قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه آن منفی است، به علاوه $\lim_{t\to+\infty} \|B(t)\| = 0$. در این صورت همه جوابهای $\dot{X} = A(t)X$ وقتی $t \to +\infty$ به صفر میل می‌کنند، یعنی با تغییر کوچک ماتریس A مبدأ هم‌چنان چاه می‌ماند.*

اثبات. مشابه قضیه قبل داریم

$$X(t) = \exp\big((t-t_0)A\big)X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\big((t-s)A\big)B(s)X(s)ds$$

اما بنابر قضیه ۱۴.۲، $\|\exp(tA)\| \leq Ce^{-\mu t}$ برای $t \geq 0$، بنابراین

$$|X(t)| \leq Ce^{-\mu(t-t_0)}|X_0| + \int_{t_0}^{t} Ce^{-\mu(t-s)}\|B(s)\|\,|X(s)|ds$$

و بنابر نامساوی گرونوال

$$e^{\mu t}|X(t)| \leq Ce^{\mu t_0}|X_0| \exp\Big(C\int_{t_0}^{t} \|B(s)\|ds\Big)$$

اکنون زمان T را به گونه‌ای انتخاب کنید که $\|B(t)\| \leq \frac{\mu}{2C}$ برای $t \geq T$، در این صورت برای مقدار ثابت M،

$$e^{\mu t}|X(t)| \leq Me^{\frac{\mu}{2}(t-T)}$$

و بدین ترتیب نتیجه مطلوب به دست می‌آید. □

قضیه بالا نشان می‌دهد که اگر مبدأ برای دستگاه خطی با ضرایب ثابت $\dot{X} = AX$، چاه باشد، آنگاه با اختلال کوچک در ماتریس ضرایب مبدأ هم‌چنان یک چاه می‌ماند. دقت کنید که ممکن است قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس ضرایب $A(t)$ برای هر t منفی باشد ولی همه جوابها به مبدأ میل نکنند. به عنوان مثال تمرین ۶ را ببینید.

۶.۲ نمایش فلوکه[۱۰]

در این بخش دستگاههایی را بررسی می‌کنیم که ماتریس ضرایب $A(t)$، یک ماتریس پیوسته و تناوبی است با دوره تناوب $T > 0$، یعنی $A(t+T) = A(t)$. نتیجه اصلی که در این بخش به دست می‌آوریم، نمایشی برای هر ماتریس اساسی این دستگاه خطی به صورت

$$\Phi(t) = P(t)\exp(tR) \qquad (۷.۲)$$

[۱۰] Floquet

است که به نمایش فلوکه معروف است. در این نمایش ماتریس $P(t)$ پیوسته وارون‌پذیر و تناوبی با دوره تناوب T است. ماتریس R نیز یک ماتریس ثابت است.

اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی $\dot{X} = A(t)X$ باشد که تناوبی با دوره تناوب T است، آنگاه $\Phi(t+T)$ نیز ماتریس اساسی است. زیرا

$$\frac{d}{dt}\Phi(t+T) = \dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T)$$

بنابر قضیه ۶.۲ ماتریس ثابت و وارون‌پذیر C وجود دارد که

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C$$

اگر نمایش فلوکه (۷.۲) برقرار باشد، باید $C = \exp(TR)$. گزاره زیر برای اثبات وجود ماتریس R به کار می‌رود.

گزاره ۲۹.۲. *اگر ماتریس C وارون‌پذیر باشد، آنگاه ماتریس (مختلط) B وجود دارد که $\exp(B) = C$. دراین صورت ماتریس B را لگاریتم ماتریس C تعریف کرده و با $B := \log(C)$ نشان می‌دهیم.*

اثبات. ابتدا توجه کنید که اگر $P^{-1}CP$ فرم جردن ماتریس C باشد و $\exp(B) = P^{-1}CP$، آنگاه $\exp(PBP^{-1}) = C$. بنابراین کافی است گزاره بالا را تنها برای فرمهای جردن و بلکه تنها برای بلوکهای جردن اثبات کنیم. $J = \lambda I + N$ را یک بلوک جردن ماتریس C بگیرید که λ یک مقدار ویژه ناصفر (ممکن است مختلط باشد) آن است، زیرا C وارون‌پذیر است. به راحتی می‌توان دید رابطه

$$\log(J) = (\log\lambda)I + \log(I + \frac{N}{\lambda})$$

برقرار است که منظور از $\log\lambda = \ln|\lambda| + i \arg\lambda$ همان تابع لگاریتم مختلط است. لذا کافی است $\log(I + \frac{N}{\lambda})$ تعریف شود. دقت کنید ماتریس N پوچ‌توان است و $N^n = 0$ که n بعد ماتریس J است. برای این منظور از بسط تیلور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log(1 + x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$$

و برای ماتریس پوچ‌توان $M = \frac{N}{\lambda}$ تعریف می‌کنیم

$$\log(I + M) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-M)^k}{k}$$

دقت کنید که مجموع فوق متناهی جمله دارد و مشکلی برای همگرایی سری نداریم. اکنون نشان می‌دهیم که $\exp(\log(I+M)) = I+M$. برای این منظور نشان می‌دهیم

$$\exp(-\sum_{k=۱}^{n-۱} \frac{(-x)^k}{k}) = ۱ + x + (\text{جملات با درجه بزرگتر یا مساوی } n)$$

با توجه به شرط پوچ‌توانی $M^n = ۰$، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. اما برای اثبات ادعای فوق توجه کنید که

$$۱ + x = \exp(\log(۱+x)) = \exp(-\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k})$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\exp(-\sum_{k=۱}^{n-۱} \frac{(-x)^k}{k}) =&(۱+x)\exp(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k})\\ =&(۱+x)\sum_{m=۰}^{\infty} \frac{۱}{m!}(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}))^m\\ =&(۱+x)\big(۱ + (\text{جملات با درجه بزرگتر یا مساوی } n)\big)\end{aligned}$$

□

نکته ۳۰.۲. *توجه کنید شرط وارون‌پذیری ماتریس برای وجود لگاریتم الزامی است. به علاوه لگاریتم یک ماتریس یکتا تعریف نمی‌شود و همه ماتریسهای $B + ۲k\pi iI$ هم در رابطه $\exp(B + ۲k\pi iI) = C$ صدق می‌کنند.*

قضیه ۳۱.۲. **(نمایش فلوکه)** *اگر ماتریس $A(t)$ پیوسته و تناوبی با دوره تناوب $T > ۰$ باشد و $\Phi(t)$ ماتریس اساسی دستگاه $\dot{X} = A(t)X$، آنگاه ماتریس پیوسته، وارون‌پذیر و تناوبی $P(t)$ با دوره تناوب T و ماتریس ثابت R وجود دارند که نمایش (۲ .۷) برقرار باشد.*

اثبات. بنابر مطالب قبل قرار دهید:

$$R = \frac{۱}{T}\log(C)$$

که $\Phi(t+T) = \phi(t)C$. در این صورت باید $P(t) := \Phi(t)\exp(-tR)$ که یک ماتریس وارون‌پذیر و تناوبی است:

$$\begin{aligned}P(t+T) =&\Phi(t+T)\exp(-(t+T)R) = \Phi(t)C\exp(-(t+T)R)\\ =&\Phi(t)\exp(TR)\exp(-(t+T)R) = \Phi(t)\exp(-tR) = P(t)\end{aligned}$$

□

با تغییر متغیر $Y = P(t)^{-1}X$ دستگاه (۱.۲) به دستگاه خطی با ضرایب ثابت $\dot{Y} = RY$ تبدیل می‌شود. از آنجا که ماتریس $P(t)$ پیوسته، متناوب و وارون‌پذیر است، $\|P(t)\|$ و $\|P(t)^{-1}\|$ کران‌دار هستند. لذا با مقادیر ویژه ماتریس R می‌توان رفتار جوابهای (۱.۲) را تعیین کرد.

تعریف ۳۲.۲. *مقادیر ویژه ماتریس R، را **نماهای مشخصه** ماتریس $A(t)$ و مقادیر ویژه ماتریس $\exp(TR)$ را **مضارب مشخصه** می‌نامیم.*

توجه کنید که در نمایش فلوکه ماتریس R یکتا تعریف نمی‌شود، لذا نماهای مشخصه خوش‌تعریف نیستند ولی با اختلاف مضربی از $\frac{2\pi i}{T}$ قابل تعیین هستند. اما مضارب مشخصه به طور یکتا تعیین می‌شوند و به صورت $\{e^{T\lambda_1}, \ldots, e^{T\lambda_n}\}$ هستند که $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ نماهای مشخصه هستند.

گزاره ۳۳.۲. *مضارب مشخصه ماتریس تناوبی $A(t)$ به طور یکتا تعیین می‌شود و همگی مخالف صفر هستند.*

قضیه ۳۴.۲. *اگر $\rho_1, \ldots, \rho_n$ مضارب مشخصه ماتریس متناوب $A(t)$ باشند. در این صورت*

الف- همه جوابهای معادله (۱.۲) به صفر میل می‌کنند اگر و تنها اگر $|\rho_k| < 1$ برای هر $1 \leq k \leq n$.

ب- اگر $|\rho_k| \leq 1$ برای هر $1 \leq k \leq n$ و تکرر هر مضرب مشخصه $|\rho_k| = 1$ برابر یک باشد، آنگاه همه جوابهای معادله (۱.۲) کران‌دار است.

ج- اگر $|\rho_k| > 1$ به ازای لااقل یکی از مقادیر ویژه، آنگاه معادله (۱.۲) جوابی دارد که

$$\lim_{t\to+\infty} |X(t)| = \infty$$

اثبات. می‌دانیم $\rho_k = e^{T\lambda_k}$ که λ_k نمای مشخصه است. در این صورت شرط $|\rho_k| < 1$ معادل شرط $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$ است. لذا به کمک قضیه ۱۴.۲ در شرایط قسمت الف، همه جوابهای $\dot{Y} = RY$ به صفر میل می‌کنند. از آنجا که $P(t)$ نیز یک ماتریس کران‌دار است باید $X = P(t)Y$ نیز به صفر میل کند. بقیه قسمتهای دیگر قضیه نیز به طور مشابه نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳۵.۲. *ρ مضرب مشخصه ماتریس $A(t)$ است اگر و تنها اگر جواب غیر بدیهی از (۱.۲) وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند:*

$$X(t+T) = \rho X(t)$$

اثبات. هر جواب به صورت $X(t) = \Phi(t)X_0$ است، لذا شرط بالا معادل است با

$$\Phi(t+T)X_0 = \rho\Phi(t)X_0$$

به کمک نمایش فلوکه $\Phi(t) = P(t)\exp(tR)$، نتیجه می‌شود

$$P(t+T)\exp((t+T)R)X_0 = \rho P(t)\exp(tR)X_0$$

$P(t) = P(t+T)$، بنابراین

$$\exp(TR)X_0 = \rho X_0$$

در نتیجه شرط ارایه شده در قضیه معادل این است که ρ یک مقدار ویژه $\exp(TR)$ باشد. □

نکته ۳۶.۲. *از قضیه قبل نتیجه می‌شود که (۱.۲) جواب تناوبی با دوره تناوب T دارد اگر و تنها اگر لااقل یکی از مضارب مشخصه برابر یک باشد.*

دو قضیه بالا در عمل چندان کاربرد ندارند، چون که محاسبه مضارب مشخصه به راحتی امکان‌پذیر نیست. زیرا برای اینکه ماتریس $\exp(TR)$ مشخص باشد، به شناسایی ماتریس اساسی احتیاج است و اگر ماتریس اساسی را بدانیم همه جوابها شناخته شده‌اند. قضیه زیر که یک نتیجه مستقیم از فرمول آبل است یک رابطه‌ای بین مضارب مشخصه ارایه می‌کند که بدون اطلاع از ماتریس اساسی و تنها از خود ماتریس $A(t)$ به دست می‌آید.

قضیه ۳۷.۲. *اگر $\rho_1, \ldots, \rho_n$ مضارب مشخصه ماتریس تناوبی $A(t)$ با دوره تناوب T باشند، آنگاه*

$$\rho_1\rho_2\cdots\rho_n = \exp\Big(\int_0^T trA(s)ds\Big)$$

اثبات. بنابر قضیه ۳.۲ داریم:

$$\det\Phi(T) = \det\Phi(0)\exp\Big(\int_0^T trA(s)ds\Big)$$

بنابر نمایش فلوکه $\Phi(T) = \Phi(0)\exp(TR)$، پس

$$\rho_1\rho_2\cdots\rho_n = \det\exp(TR) = \exp\Big(\int_0^T trA(s)ds\Big)$$

□

مثال ۳۸.۲. *اگر*

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \cos t & b \\ a & \frac{1}{2} + \sin t \end{bmatrix}$$

آنگاه $\rho_۱\rho_۲ = \exp(\int_۰^{۲\pi} trA(s)ds) = e^{۲\pi}$، بنابراین لااقل نرم یکی از مضارب مشخصه بزرگتر از یک است و در نتیجه دستگاه $\dot{X} = A(t)X$ لااقل یک جواب بیکران دارد.

مثال ۳۹.۲. *معادله $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + (\sin t)x = ۰$ را در نظر بگیرید به یک دستگاه خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود که ماتریس آن عبارت است از*

$$A(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -\sin t & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

در نتیجه $\rho_۱\rho_۲ = e^{-۲\pi\varepsilon}$. اگر $\varepsilon > ۰$، لااقل نرم یکی از مضارب مشخصه کوچکتر از یک است و بنابر قضیه ۳۵.۲ معادله فوق لااقل یک جواب $x(t)$ دارد که

$$\lim_{t\to\pm\infty} |x|^۲ + |\dot{x}|^۲ = ۰$$

همچنین اگر $\varepsilon < ۰$، لااقل نرم یکی از مضارب مشخصه بزرگتر از یک است و معادله لااقل یک جواب بیکران دارد. در حالت $\varepsilon = ۰$ نیز معادله لااقل یک جواب کران‌دار دارد.

تمرین

۱. اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A منفی باشد، می‌دانیم که ثابتهای $\mu, C > ۰$ وجود دارند که

$$|\exp(tA)X_۰| \leq Ce^{-\mu t}|X_۰|$$

الف- نشان دهید زمان $T > ۰$ وجود دارد که برای $t \geq T$ داریم:

$$|\exp(tA)X_۰| \leq e^{-\mu t}|X_۰|$$

ب- نشان دهید $|X|_* = \int_۰^T e^{\mu s}|\exp(sA)X|ds$ یک نرم روی $\mathbb{R}^n$ است.

ج- ثابت کنید $|\exp(tA)X|_* \leq e^{-\mu t}|X|_*$ برای هر $t \geq ۰$.

۲. الف- اگر J یک بلوک جردن $m\times m$ باشد و $Q = \mathrm{diam}(۱, \varepsilon, \varepsilon^۲, \ldots, \varepsilon^{m-۱})$ ماتریس $Q^{-۱}JQ$ را به دست آورید.

ب- به کمک قسمت قبل نشان دهید ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $P^{-۱}AP$ شبیه فرم جردن A است با این تفاوت که به جای درآیه‌های ۱ بالای قطر اصلی مقدار ε قرار دارد، همچنین متناظر مقادیر ویژه مختلط به جای ماتریس $I_۲$، ماتریس $\varepsilon I_۲$ قرار دارد.

ج- اگر $\|Y\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|y_i|$ که $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$، نشان دهید نرم $\|X\|_* = \|P^{-1}X\|_\infty$ همان خاصیت تمرین قبل را دارد؛ یعنی اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A منفی باشد، ثابت $\mu > 0$ وجود دارد که $|\exp(tA)X|_* \le e^{-\mu t}|X|_*$ برای هر $t \ge 0$.

۳. نشان دهید همه جوابهای دستگاه خطی با ضرایب ثابت $\dot{X} = AX$ وقتی $t \to +\infty$، به صفر میل می‌کنند اگر و تنها اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A منفی باشند.

۴. فرض کنید $\lambda = i\mu \neq 0$ مقدار ویژه ماتریس حقیقی A باشد و بعد فضای ویژه متناظر آن (تعداد بردارهای ویژه مستقل) برابر m باشد. نشان دهید در دستگاه $\dot{X} = AX$ تعداد جوابهای متناوب مستقل با دوره تناوب اصلی $\frac{2\pi}{\mu}$ برابر $2m$ است. در رابطه با تعداد جوابهای متناوب مستقل با دوره تناوب $\frac{2\pi}{\mu}$ چه می‌توان گفت؟

۵. فرض کنید ماتریس $A(t)$ روی بازه $[0,\infty)$ پیوسته بوده و همه جوابهای (۱.۲) روی این بازه کران‌دار باشند. اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی این دستگاه باشد،

الف- نشان دهید $\Phi(t)^{-1}$ روی $[0,\infty)$ کران‌دار است اگر و تنها اگر

$$\liminf_{t\to\infty}\int_0^t trA(s)ds > -\infty$$

ب- ثابت کنید در شرایط قسمت (الف)، دستگاه فوق به غیر از جواب بدیهی صفر جواب دیگری مانند $X(t)$ ندارد که در شرط $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$ صدق کند.

ج- اگر $p(t)$ تابع کران‌دار روی $[0,\infty)$ بوده و $\varphi(t)$ یک جواب غیر بدیهی $y''+p(t)y = 0$ باشد که $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$، نشان دهید این معادله یک جواب بیکران دارد.

۶. اگر

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1+\frac{3}{2}\cos^2 t & 1-\frac{3}{2}\sin t\cos t \\ -1-\frac{3}{2}\sin t\cos t & -1+\frac{3}{2}\sin^2 t \end{bmatrix}$$

قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه $A(t)$ برای هر t منفی است، اما

$$X(t) = e^{\frac{t}{2}}\begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

یک جواب بیکران برای دستگاه $\dot{X} = A(t)X$ است.

۷. اگر $\Phi(t)$، ماتریس اساسی دستگاه (۱.۲) و روی $[0,\infty)$ کراندار باشند، به علاوه $A(t)$ و $B(t)$ ماتریسهای پیوسته‌ای باشند که $\int_0^\infty \|B(s)\|ds < \infty$.

الف- نشان دهید همه جوابهای

$$\dot{Y} = (A(t) + B(t))Y \qquad (۸.۲)$$

روی $[0,\infty)$ کراندار است.

ب- برای هر جواب $Y(t)$ از (۸.۲)، جواب یکتای $X(t)$ از (۱.۲) وجود دارد که $\lim\limits_{t\to+\infty} |X(t) - Y(t)| = 0$.

(راهنمایی: از عبارت $X(t) = Y(t) + \int_t^\infty \Phi(t)\Phi(s)^{-1}B(s)Y(s)ds$ مشتق بگیرید و دقت کنید که چرا این انتگرال تعریف شده است.)

ج- برای هر جواب $X(t)$ از (۱.۲)، جواب یکتای $Y(t)$ از (۸.۲) وجود دارد که نتیجه قسمت قبل برقرار باشد.

(راهنمایی: معادله انتگرالی $Y(t) = X(t) - \int_t^\infty \Phi(t)\Phi(s)^{-1}B(s)Y(s)ds$ را روی بازه $\alpha \le t < \infty$ برای α به اندازه کافی بزرگ، حل کنید.)

د- برای $\omega > 0$ و تابع پیوسته $b(t)$ که $\int_0^\infty |b(t)|dt < \infty$، نشان دهید $y'' + (\omega^2 + b(t))y = 0$ دارای جواب $\varphi(t)$ است که

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t) - \sin\omega t|^2 + |\varphi'(t) - \omega\cos\omega t|^2 = 0$$

۸. الف- فرض کنید $g(t)$ تابعی پیوسته و کراندار روی $\mathbb{R}$ بوده و قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس B مثبت و ماتریس C منفی باشد و

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

نشان دهید هر جواب دستگاه $\dot{X} = AX + g(t)$ که هم‌ارز با دستگاه زیر است

$$\dot{X}_1 = BX_1 + g_1(t) \qquad \dot{X}_2 = CX_2 + g_2(t)$$

به صورت زیر نمایش داده می‌شود. (چرا این توابع برای تمام مقادیر $t \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شوند؟)

$$X_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\big((t-s)B\big)g_1(s)ds, \quad X_2(t) = -\int_t^\infty \exp\big((t-s)C\big)g_2(s)ds$$

ب- اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه A ناصفر باشد، مشابه قسمت قبل یک رابطه انتگرالی برای تجزیه جوابهای دستگاه $\dot{X} = AX + g(t)$ به زیرفضاهای E^s و E^u بنویسید.

ج- نشان دهید اگر تابع پیوسته g روی $\mathbb{R}$ کران‌دار بوده و قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس A ناصفر باشد، آنگاه $\dot{X} = AX + g(t)$ حداقل یک جواب کران‌دار دارد.

۹. اگر $\int_۰^\infty \|B(s)\|ds < \infty$ و λ یک مقدار ویژه با تکرر جبری یک ماتریس A است. فرض کنید V بردار ویژه متناظر آن باشد. در این صورت نشان دهید $\dot{X} = (A + B(t))X$ دارای جواب $\varphi(t)$ است که $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}\varphi(t) = V$.

(راهنمایی: معادله انتگرالی زیر را در بازه $\alpha \leq t < \infty$ حل کنید

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}V + \int_\alpha^t \Phi^s(t-\tau)B(\tau)\varphi(\tau)d\tau - \int_t^\infty \Phi^u(t-\tau)B(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

که $\Phi^s(t) + \Phi^u(t) = \exp(tA)$ به ترتیب متناظر مقادیر ویژه با قسمت حقیقی کمتر از $\mathrm{Re}\lambda$ و بیشتر از آن هستند.)

۱۰. به کمک مسأله قبل نشان دهید که اگر $g(t)$ تابع پیوسته‌ای باشد که $\int_۰^\infty t^۲|g(t)|dt < \infty$، آنگاه معادله $y'' + g(t)y = ۰$ دارای جوابهای $\varphi_۱(t)$ و $\varphi_۲(t)$ است که وقتی $t \to +\infty$

$$\varphi_۱(t) \to ۱, \quad \varphi_۱'(t) \to ۰, \quad \frac{\varphi_۲(t)}{t} \to ۱, \quad \varphi_۲'(t) \to ۱$$