به نام او

دانشگاه صنعتی شریف

تمرین سری اول درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، ۸۹/۱۲/۱

۱- فرض کنید Ω زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ بوده و $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ میدان C^1 باشد، هم‌چنین اگر $h : \Omega \to \mathbb{R}$ یک تابع مثبت هموار باشد، نشان دهید تصویر خمهای جواب دو معادله زیر یکسان است؛ یعنی اگر $x(t)$ و $y(t)$ به‌ترتیب جوابهای این دو معادله باشند، تابع صعودی $\sigma : dom(y) \to dom(x)$ وجود دارد که $y(t) = x(\sigma(t))$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dot{y} = h(y)f(y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

۲-در تمرین قبل نشان دهید تابع $h : \Omega \to \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر شرط اولیه x_0، دامنه تعریف جواب $y(t)$ برابر $(-\infty, \infty)$ است.

۳-فرض کنید $h(t)$ و $f(x)$ توابع مثبت و پیوسته روی $0 \leq t < \infty$ و $0 < x < \infty$ باشند. در این‌صورت

الف- اگر داشته باشیم $\int_1^\infty \frac{dx}{f(x)} = \infty$، آنگاه همه جوابهای

$$\dot{x} = h(t)f(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

برای $0 \leq t_0$ و $0 < x_0$ روی سرتاسر بازه $t_0 \leq t < \infty$ تعریف می‌شوند.

ب- اگر $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} = \infty$، آنگاه دامنه تعریف جواب معادله فوق شامل $0 < t \leq t_0$ خواهد بود.

ج- اگر $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ و $\left|g(t,X)\right| \leq h(t)f(\left|X\right|)$ که تابع f خواص دو قسمت قبل را دارد، نشان دهید جواب دستگاه $\dot{X} = g(t,X)$، با شرط اولیه $X(t_0) = X_0$، روی بازه $0 < t < \infty$ وجود دارد. به علاوه اگر $\int_0^\infty h(t)dt < \infty$، آنگاه این جواب کران‌دار است.

۴-فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع هموار، مثبت و تناوبی با دوره $p > 0$ باشد. ثابت کنید که اگر $x(t)$ یک جواب معادله $\dot{x} = f(x)$ باشد و $T := \int_0^p \frac{dx}{f(x)}$، آنگاه $x(t+T) - x(t) = p$. اگر علامت تابع f ثابت نباشد، چه می‌توان گفت؟

۵-اگر در دستگاه همیلتونی زیر همه سطوح تراز تابع هموار $H = H(X,Y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ کران‌دار باشد، نشان دهید که دامنه تعریف هر جواب $\mathbb{R}$ است.

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial Y}$$
$$\dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$

۶- به کمک تمرین قبل نشان دهید که جوابهای $x'' + x + x^3 = 0$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند. در رابطه با جوابهای $x'' + x' + x + x^3 = 0$ چه می‌توان گفت؟

۷- فرض کنید $f(t,x)$ و $F(t,v)$ به ترتیب توابعی پیوسته روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ باشند که $F(t,0)=0$، به علاوه داریم: $\left|f(t,x)-f(t,y)\right| \le F(t,\left|x-y\right|)$ و می‌دانیم که برای هر شرط اولیه $v(t_0)=v_0$، جواب معادله $\dot{v}=F(t,v)$ یکتا است. نشان دهید در این صورت جوابهای $X(t,t_0,x_0)$ از معادله زیر نسبت به (t,t_0,x_0) پیوسته است.

$$\dot{x}=f(t,x), \qquad x(t_0)=X_0$$

۸- **نامساوی گرنوال:** اگر φ، ψ و γ توابع حقیقی پیوسته باشند که $\varphi(t)\ge 0,\ \psi(t)\ge 0$ و

$$\varphi(t)\le\gamma(t)+\int_a^t\varphi(s)\psi(s)ds, \qquad a\le t\le b$$

آنگاه

$$\varphi(t)\le\gamma(t)+\int_a^t\gamma(s)\psi(s)\exp[\int_s^t\psi(\tau)d\tau]ds$$

۹- اگر میدان $f(x)$ نسبت به x به طور موضعی لیپشیتز بوده و $x(t)$ جوابی از $\dot{x}=f(x)$ باشد که $\lim_{t\to\infty}x(t)=x_0$، آنگاه $f(x_0)=0$.

۱۰- فرض کنید که $X_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ برای $i=1,2$ مشتق‌پذیر باشند که برای $t_0\le t$

$$\left|X_1(t_0)-X_2(t_0)\right|\le\gamma, \qquad \left|\dot{X}_i(t)-f(t,X_i(t))\right|\le\mu_i, \quad for\ i=1,2$$

اگر $f(t,X)$ نسبت به X لیپشیتز با ضریب K باشد، نشان دهید

$$\left|X_1(t)-X_2(t)\right|\le\gamma e^{K|t-t_0|}+\frac{\mu_1+\mu_2}{K}(e^{K|t-t_0|}-1)$$

آخرین مهلت ارایه تمرین: ۸۹/۱۲/۲۱