به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری چهارم درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، ۸۸/۲/۲۰

۱-وضعیت پایداری مبداء را در هریک از دستگاههای زیر به دست آورید:

الف- $f(x,y)=(-x^3+y, x^6-y^3)$

ب- $f(x,y)=(-x+y^6, y^3+x^6)$

ج- $f(t,x,y)=(-x^3+\alpha(t)y, -\alpha(t)x-y^3)$ که $\alpha(t)$ تابع پیوسته و کران‌دار است.

د- $f(x,y)=(y, -x-(1+b\cos t)y)$ برای $\left|b\right|<1$.

ه- $f(x,y)=(y, -\sin x-(1+b\cos t)y)$ برای $\left|b\right|<1$.

و- $f(x,y)=(x(a-\alpha y), y(b-\beta x))$ همچنین وضعیت نقطه بحرانی دیگر این میدان را تعیین کنید. (همه ضرایب مثبت هستند.)

۲-الف- اگر ماتریس A پایدار مجانبی باشد، نشان دهید تابع $V(X)=X^TPX$ یک تابع لیاپانوف برای دستگاه $\dot{X}=AX$ است که $P=\int_0^\infty e^{tA^T}e^{tA}dt$. (ابتدا باید نشان دهید انتگرال همگراست.)

ب- اگر ماتریس A هذلولوی و ناپایدار باشد، تابعی به صورت $V(X)=X^TPX$ وجود دارد که $\dot{V}\geq c\left|X\right|^2$ و تابع V در هر همسایگی مبداء مقدار مثبت اتخاذ می‌کند.

۳-آیا در دستگاه خطی $\dot{X}=A(t)X$ پایداری مجانبی با پایداری نمایی هم‌ارز است؟ در صورتی که دستگاه پایدار نمایی باشد، نشان دهید $V(t,X)=X^TP(t)X$ یک تابع لیاپانوف است که $P(t)=\int_t^\infty \Phi(\tau,t)^T\Phi(\tau,t)d\tau$ و $\Phi(t,t_0)$ ماتریس اساسی است.

٤-اگر $x=0$ نقطه بحرانی دستگاه $\dot{x}=f(t,x)$ باشد و $V(t,x)$ برای ضرایب مثبت α, c_1, c_2, c_3 در شرایط زیر صدق کند، نشان دهید مبداء پایدار نمایی است.

$$c_1\left|X\right|^\alpha \leq V(t,X)\leq c_2\left|X\right|^\alpha \qquad \dot{V}(t,X)\leq -c_3\left|X\right|^\alpha$$

۵-اگر $x = 0$ نقطه بحرانی دستگاه $\dot{x} = f(t,x)$ باشد و $V(t,x)$ معین مثبت و $\dot{V}(t,x)$ منفی معین باشد، مبداء پایدار مجانبی است در صورتی که $f(t,x)$ در یک همسایگی مبداء برای هر $t \geq 0$ کران‌دار باشد یا اینکه $f(t,x)$ نسبت به t متناوب باشد.

۶-توابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ و $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ به طور پیوسته مشتق‌پذیرند و $f(0) = 0, h(0) > 0$. نشان دهید مبداء در $\dot{x} = f(x)$ پایدار نمایی است اگر و تنها اگر در $\dot{x} = h(x)f(x)$ پایدار نمایی باشد. آیا این مطلب برای پایدار مجانبی نیز صحیح است؟

۷-فرض کنید $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی معین مثبت باشد که مشتق فازی آن نسبت به میدان $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ در رابطه $\dot{V}(t,x) \leq g(t,V(t,x))$ صدق می‌کند. $g : \mathbb{R} \times \left[0,\infty\right) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که $g(t,0) = 0$. همچنین $x = 0$ نقطه بحرانی $\dot{x} = f(t,x)$ است.

الف- اگر مبداء در $\dot{y} = g(t,y)$ پایدار باشد، $x = 0$ در $\dot{x} = f(t,x)$ پایدار است.

ب- اگر $V(t,x) \leq W(x)$ و مبداء در $\dot{y} = g(t,y)$ پایدار نمایی باشد، $x = 0$ در $\dot{x} = f(t,x)$ پایدار نمایی است.

ج- در رابطه با پایداری مجانبی چه می‌توان گفت؟

د- اگر g روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ تعریف شود و $g(t,y) = g(t,-y)$، $V(t,x) \leq W(x)$، $\dot{V}(t,x) \geq g(t,V(t,x))$ و مبداء در $\dot{y} = g(t,y)$ ناپایدار باشد، $x = 0$ در $\dot{x} = f(t,x)$ ناپایدار است.

۸-میدان $f(x) = \nabla g(x)$ برای تابع هموار $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ میدان گرادیان می‌نامیم. نشان دهید در هر میدان گرادیان هیچ مداری، متناوب نیست. همچنین اگر همه نقاط بحرانی میدان منزوی باشند، هر مجموعه ω-حدی ناتهی یک نقطه بحرانی است.