به نام او

دانشگاه صنعتی شریف

تمرین سری اول درس نظریه معادلات دیفرانسیل عادی، ۸۷/۱۱/۲۷

۱- **قضیه کوشی- پیانو**: فرض کنید میدان برداری $f:[t_\circ-a,t_\circ+a]\times B_b(X_\circ)\to\mathbb{R}^n$ پیوسته باشد و $M=\max\left|f(t,X)\right|$. معادله دیفرانسیل زیر دارای یک جواب روی بازه $[t_\circ-\delta,t_\circ+\delta]$ است که $\delta=\min(a,\frac{b}{M})$.

$$\dot{X}=f(t,X)$$
$$X(t_\circ)=X_\circ$$

برای اثبات دنباله زیر را تعریف کنید

$$u_m(t)=\begin{cases} X_\circ & t_\circ\le t\le t_\circ+\frac{1}{m}\\ X_\circ+\int_{t_\circ}^{t-\frac{1}{m}} f(s,u_m(s))ds & t\ge t_\circ+\frac{1}{m}\end{cases}$$

الف- نشان دهید دنباله توابع $\left\{u_m(t)\right\}$ خوش‌تعریف است.

ب- نشان دهید دنباله $\left\{u_m\right\}$ به طور یکنواخت کراندار و همپیوسته است.

ج- نشان دهید حد زیر دنباله‌ای از $\left\{u_m\right\}$ که بنابر قسمت قبل وجود دارد، جواب معادله است.

۲- به کمک راهنمایی زیر اثبات دیگری برای قضیه پیکارد ارایه کنید. S را مجموعه همه توابع پیوسته $\varphi:[t_\circ-\delta,t_\circ+\delta]\to B_b(X_\circ)$ همراه با نرم زیر در نظر بگیرید.

$$\left\|\varphi\right\|_\omega=\sup_{|t-t_\circ|\le\delta} e^{-2K|t-t_\circ|}\mid\varphi(t)\mid$$

الف- نشان دهید S یک فضای باناخ است.

ب- ثابت کنید عملگر $T(\varphi)(t)=X_\circ+\int_{t_\circ}^{t} f(s,\varphi(s))ds$ روی فضای S تعریف می‌شود و یک عملگر انقباضی است.

۳- فرض کنید Ω زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ بوده و $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ میدان C^1 باشد، هم‌چنین اگر $h:\Omega\to\mathbb{R}$ یک تابع مثبت هموار باشد، نشان دهید تصویر خمهای جواب دو معادله زیر یکسان است؛ یعنی اگر $x(t)$ و $y(t)$ به‌ترتیب جوابهای این دو معادله باشند، تابع صعودی $\sigma:dom(y)\to dom(x)$ وجود دارد که $y(t)=x(\sigma(t))$.

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)\\ x(t_\circ)=x_\circ\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\dot{y}=h(y)f(y)\\ y(t_\circ)=x_\circ\end{cases}$$

٤–در تمرین قبل نشان دهید تابع $h:\Omega\to\mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر شرط اولیه $x_\circ$، دامنه تعریف جواب $y(t)$ برابر $(-\infty,\infty)$ است.

۵–فرض کنید $h(t)$ و $f(x)$ توابع مثبت و پیوسته روی $\circ\le t<\infty$ و $\circ<x<\infty$ باشند. در این‌صورت

الف– اگر داشته باشیم $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{f(x)}=\infty$، آنگاه همه جوابهای

$$\dot{x}=h(t)f(x),\qquad x(t_\circ)=x_\circ$$

برای $t_\circ\ge\circ$ و $x_\circ>\circ$ روی سرتاسر بازه $t_\circ\le t<\infty$ تعریف می‌شوند.

ب– اگر $\int_{\circ}^{۱}\frac{dx}{f(x)}=\infty$، آنگاه دامنه تعریف جواب معادله فوق شامل $\circ<t\le t_\circ$ خواهد بود.

ج– اگر $g\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ و $\left|g(t,X)\right|\le h(t)f(\left|X\right|)$ که تابع f خواص دو قسمت قبل را دارد، نشان دهید جواب دستگاه $\dot{X}=g(t,X)$، با شرط اولیه $X(t_\circ)=X_\circ$، روی بازه $\circ<t<\infty$ وجود دارد. به علاوه اگر $\int_{\circ}^{\infty}h(t)dt<\infty$، آنگاه این جواب کران‌دار است.

٦–فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع هموار، مثبت و تناوبی با دوره $p>\circ$ باشد. ثابت کنید که اگر $x(t)$ یک جواب معادله $\dot{x}=f(x)$ باشد و $T:=\int_{\circ}^{p}\frac{dx}{f(x)}$، آنگاه $x(t+T)-x(t)=p$. اگر علامت تابع f ثابت نباشد، چه می‌توان گفت؟

۷–اگر در دستگاه همیلتونی زیر همه سطوح تراز تابع هموار $H=H(X,Y):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ کران‌دار باشد، نشان دهید که دامنه تعریف هر جواب $\mathbb{R}$ است.

$$\dot{X}=\frac{\partial H}{\partial Y}$$
$$\dot{Y}=-\frac{\partial H}{\partial X}$$

۸–به کمک تمرین قبل نشان دهید که جوابهای $x''+x+x^{۳}=\circ$ در سرتاسر $\mathbb{R}$ تعریف می‌شوند. در رابطه با جوابهای $x''+x'+x+x^{۳}=\circ$ چه می‌توان گفت؟

۹–فرض کنید $f(t,x)$ و $F(t,v)$ به ترتیب توابعی پیوسته روی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ باشند که $F(t,\circ)=\circ$، به علاوه داریم: $\left|f(t,x)-f(t,y)\right|\le F(t,\left|x-y\right|)$ و می‌دانیم که برای هر شرط اولیه $v(t_\circ)=v_\circ$، جواب معادله $\dot{v}=F(t,v)$ یکتا است. نشان دهید در این صورت جوابهای $X(t,t_\circ,x_\circ)$ از معادله زیر نسبت به $(t,t_\circ,x_\circ)$ پیوسته است.

$$\dot{x}=f(t,x),\qquad x(t_\circ)=X_\circ$$

۱۰- نامساوی گرنوال: اگر φ، ψ و γ توابع حقیقی پیوسته باشند که $\varphi(t) \geq 0, \psi(t) \geq 0$ و

$$\varphi(t) \leq \gamma(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds, \qquad a \leq t \leq b$$

آنگاه

$$\varphi(t) \leq \gamma(t) + \int_a^t \gamma(s)\psi(s)\exp[\int_s^t \psi(\tau)d\tau]ds$$

۱۱- اگر میدان $f(x)$ نسبت به x به طور موضعی لیپشیتز بوده و $x(t)$ جوابی از $\dot{x} = f(x)$ باشد که $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$، آنگاه $f(x_0) = 0$.

۱۲- فرض کنید که $X_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ برای $i = 1,2$ مشتق‌پذیر باشند که برای $t_0 \leq t$

$$\left|X_1(t_0) - X_2(t_0)\right| \leq \gamma, \qquad \left|\dot{X}_i(t) - f(t, X_i(t))\right| \leq \mu_i, \quad for\ i = 1,2$$

اگر $f(t, X)$ نسبت به X لیپشیتز با ضریب K باشد، نشان دهید

$$\left|X_1(t) - X_2(t)\right| \leq \gamma e^{K(t-t_0)} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{K}(e^{K(t-t_0)} - 1)$$