آنالیز عددی

جلسه چهارم

حل معادلات غیر خطی

مشکل عمده روش نیوتن:

- برای محاسبه هر عضو دنباله باید $f(x_n)$ و $f'(x_n)$ را در هر مرحله محاسبه کرد. در روشهای جایگزین تقریبی از مشتق به جای $f'(x_n)$ جایگزین می کنیم.

راه حل اول: (روش استفنسن) همگرا از مرتبه ۲

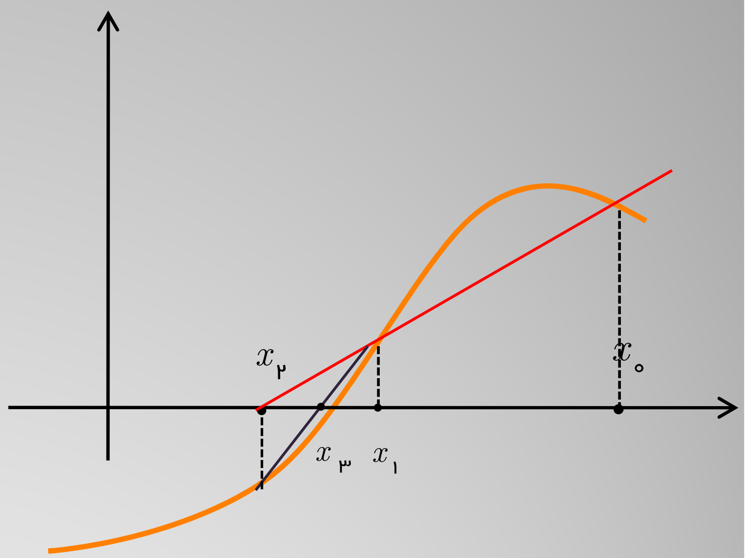
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left[f(x_n)\right]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

راه حل دوم: روش خط قاطع (وتری)- Secant

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



قضیه: اگر تابع f'' پیوسته و α یک ریشه ساده باشد، ($f'(\alpha) \neq 0$) آنگاه اگر نقاط آغازین x_1, x_0 به اندازه کافی نزدیک به α باشد، دنباله تولید شده در روش وتری به α همگرا از مرتبه حداقل عدد طلایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

$$e_n = x_n - \alpha$$

اثبات:

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(y_n)}$$

$$f(x_n) = e_n f'(\alpha) + O(e_n^2)$$

$$= e_n - \frac{e_n f'(\alpha) + O(e_n^2)}{f'(y_n)} = e_n \frac{f'(y_n) - f'(\alpha) + O(e_n)}{f'(y_n)}$$

$$= e_n \frac{(y_n - \alpha) f''(z_n) + O(e_n)}{f'(y_n)}$$

$$|y_n - \alpha| \le \max\{|e_n|, |e_{n-1}|\} \le |e_n| + |e_{n-1}|$$

$$\Rightarrow \quad |e_{n+1}| \le |e_n| (|e_n| + |e_{n-1}|) M$$

اگر $|e_0|, |e_1| < \delta$ و $2M\delta < 1$ آنگاه $|e_n| < \delta$ برای هر n و بنابراین $|e_{n+1}| < 2M\delta |e_n|$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} |e_n| = 0$$

مثال: ریشه $f(x) = \cos x - xe^x$ در بازه $(۰,۱)$ تا چهار رقم اعشار

n	x_n	$f(x_n)$
۰	۰	۱
۱	۱	−۲.۱۷۷۹۸
۲	۰.۳۱۴۶۶	۰.۵۱۹۸۷
۳	۰.۴۴۶۷۳	۰.۲۰۳۵۴
۴	۰.۵۳۱۷۱	−۰.۰۴۲۹۳
۵	۰.۵۱۶۹۰	۰.۰۰۲۵۹
۶	۰.۵۱۷۷۵	۰.۰۰۰۰۳
۷	۰.۵۱۷۷۶	۰

روشهای تکراری

تولید دنباله به صورت بازگشتی $x_{n+1} = F(x_n)$

اگر این دنباله به α همگرا باشد، آنگاه $\alpha = F(\alpha)$

یعنی α نقطه ثابت است.

نگاشت انقباضی

نگاشت F انقباضی است اگر ثابت 0<λ<1 وجود داشته باشد که

$$\left|F(x)-F(y)\right| < \lambda\left|x-y\right|$$

محک مناسب برای نگاشت انقباضی

$$\left|F'(x)\right| < ۱$$

قضیه نقطه ثابت باناخ

اگر I یک زیر مجموعه بسته از اعداد حقیقی باشد و $F: I \to I$ یک نگاشت انقباضی باشد، آنگاه F یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد. به علاوه این نقطه ثابت حد دنباله زیر برای هر نقطه آغازین $x_۰$ است.

$$x_{n+۱} = F(x_n)$$

مثال: دنباله بازگشتی زیر همگرا است.

$$x_{0} = -15$$

$$x_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}\left|x_{n}\right|$$

$$F(x) = 3 - \frac{1}{2}|x|$$

$$\left|F(x) - F(y)\right| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

مثال: جواب معادله $۲\tan x = x + ۱$ در بازه $(۰, \frac{\pi}{۲})$ به دست آورد.

- اگر معادله را به صورت $f(x) = ۲\tan x - ۱ = x$ در نظر بگیریم،

تابع f انقباضی نیست. زیرا $f'(x) = ۱ + \tan^۲ x > ۱$

- اما اگر $x = \tan^{-۱}(\frac{x+۱}{۲}) = g(x)$، تابع g بازه $(۰, \frac{\pi}{۲})$ را به خودش تصویر می کند و در این بازه انقباضی است. $g'(x) = \frac{۲}{۴ + (x+۱)^۲} < \frac{۲}{۵}$

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
x_n	۱	۰.۷۸۵۴	۰.۷۲۸۸	۰.۷۱۲۸	۰.۷۰۸۲	۰.۷۰۶۹	۰.۷۰۶۵	۰.۷۰۶۴	۰.۷۰۶۳	۰.۷۰۶۳

تحلیل خطا

$$e_n = x_n - \alpha$$

اگر $F'(\alpha) \neq ۰$

$$e_{n+۱} = F(x_n) - F(\alpha) = F'(y_n)e_n$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+۱}}{e_n} = F'(\alpha)$$

اگر $F^{(m)}(\alpha) \neq ۰, F'(\alpha) = \cdots = F^{(m-۱)}(\alpha) = ۰$

$$e_{n+۱} = F(x_n) - F(\alpha) = F(\alpha + e_n) - F(\alpha)$$

$$= e_n F'(\alpha) + \frac{۱}{۲} e_n^۲ F''(\alpha) + \cdots + \frac{۱}{(m-۱)!} e_n^{m-۱} F^{(m-۱)}(\alpha) + \frac{۱}{m!} e_n^m F^{(m)}(z_n)$$

$$= \frac{۱}{m!} e_n^m F^{(m)}(z_n)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+۱}}{e_n^m} = \frac{۱}{m!} F^{(m)}(\alpha)$$

مثال: همگرایی روش نیوتن

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad F(\alpha) = \alpha,\ f(\alpha) = ۰$$

$$F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left|f'(x)\right|^۲} \Rightarrow F'(\alpha) = ۰ \Rightarrow$$ همگرایی حداقل از مرتبه ۲

$$F''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

مثال: با کدامیک از توابع زیر با روش تکراری نقطه ثابت سریعتر می‌توان به $\sqrt{۲}$ میل کرد؟

$$g_۱(x) = \frac{x+۲}{x+۱}, \quad g_۲(x) = \frac{۱}{۲}(x + \frac{۲}{x})$$

$$g_۱'(\sqrt{۲}) \neq ۰ \Rightarrow$$ همگرایی خطی

$$g_۲'(\sqrt{۲}) = ۰ \Rightarrow$$ همگرایی از مرتبه حداقل ۲

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$g_۱(x_k)$	۱.۵	۱.۴	۱.۴۱۶۷	۱.۴۱۳۸	۱.۴۱۴۳	۱.۴۱۴۲	۱.۴۱۴۲
$g_۲(x_k)$	۱.۵	۱.۴۱۶۷	۱.۴۱۴۲	۱.۴۱۴۲			

چگونه سرعت همگرایی را افزایش دهیم: $f(\alpha) = ۰$

- اگر $f'(\alpha)$ معلوم و مخالف صفر باشد

$$f(x) = ۰ \;\Leftrightarrow\; f(x) + \lambda x = \lambda x$$

$$g(x) = \frac{f(x) + \lambda x}{\lambda} \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{f'(x) + \lambda}{\lambda}$$

اگر $\lambda = -f'(\alpha)$ همگرایی حداقل از مرتبه ۲ خواهد بود.

❖ اگر $f'(\alpha)$ معلوم نباشد

$$f(x)=0 \iff x-f(x)\phi(x)=x$$

$$G(x)=x-f(x)\phi(x) \Rightarrow G'(x)=1-f'(x)\phi(x)-f(x)\phi'(x)$$

$$G'(\alpha)=0 \Rightarrow 1-f'(\alpha)\phi(\alpha)=0$$

اگر $\phi(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$ همان روش نیوتن است و همگرایی حداقل از مرتبه ۲.

بنابراین روش نیوتن یکی از بهینه ترین روشها برای ریشه یابی است.

دستگاه معادلات غیر خطی

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$

(x_0,y_0) تقریب اولیه جواب، $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ تقریب بعدی

$$\begin{cases} 0 = f_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f_1(x_0,y_0) + \Delta x \partial_x f_1 + \Delta y \partial_y f_1 \\ 0 = f_2(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f_2(x_0,y_0) + \Delta x \partial_x f_2 + \Delta y \partial_y f_2 \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_0,y_0) \\ f_2(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

$$X_{m+1} = X_m - F'(X_m)^{-1} F(X_m)$$

مثال

$$\begin{cases} xy = z^{۲} + ۱ \\ xyz + y^{۲} = x^{۲} + ۲ \\ e^{x} + z = e^{y} + ۳ \end{cases} \Rightarrow F(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy - z^{۲} - ۱ \\ xyz + y^{۲} - x^{۲} - ۲ \\ e^{x} + z - e^{y} - ۳ \end{bmatrix}$$

$$F'(x,y,z) = \begin{bmatrix} y & x & -۲z \\ yz - ۲x & xz + ۲y & xy \\ e^{x} & -e^{y} & ۱ \end{bmatrix}$$

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x_n	۱	۱.۷۵۵	۱.۸۵۰	۱.۷۷۸	۱.۷۷۷	۱.۷۷۷
y_n	۱	۱.۵۳۶	۱.۴۲۱	۱.۴۲۴	۱.۴۲۴	۱.۴۲۴
z_n	۱	۱.۱۴۶	۱.۲۸۸	۱.۲۳۸	۱.۲۳۷	۱.۲۳۷

پیچیدگی محاسبه

محاسبه ریشه چندجمله‌ای:

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

برای کاهش پیچیدگی محاسبه در روش نیوتن نحوه محاسبه

مقادیر $p(x_n)$ و $p'(x_n)$ در هر مرحله بسیار موثر است.

الگوریتم هورنر

ایده اصلی تجزیه حول نقطه z_0

$$p(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0) + p(z_0) \;\Rightarrow$$

$$b_{n-1} = a_n\,,\, b_{n-2} = a_{n-1} + z_0 b_{n-1}, \ldots, b_0 = a_1 + z_0 b_1\,,\; p(z_0) = a_0 + z_0 b_0$$

$$\begin{array}{cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ + & & z_0 b_{n-1} & \cdots & z_0 b_1 & z_0 b_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & p(z_0) \end{array}$$

مثال: $p(z) = z^{۴} - ۴z^{۳} + ۷z^{۲} - ۵z - ۲$ $\qquad p(۳) = ?$

$$
\begin{array}{ccccc}
۱ & -۴ & ۷ & -۵ & -۲ \\
 & ۳ & -۳ & ۱۲ & ۲۱ \\
\hline
۱ & -۱ & ۴ & ۷ & ۱۹
\end{array}
$$

الگوریتم هورنر (محاسبه $p'(z_0)$)

$$p(z) = (z - z_0)q(z) + p(z_0) \Rightarrow p'(z_0) = q(z_0)$$

$$q(z) = b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0$$

$$\begin{array}{cccccc}
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & z_0 b_{n-1} & \cdots & z_0 b_2 & z_0 b_1 & z_0 b_0 \\
\hline
b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 & p(z_0) \\
 & z_0 c_{n-2} & \cdots & z_0 c_1 & z_0 c_0 & \\
\hline
c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 & q(z_0) &
\end{array}$$

روش بیرستو (Bairstow):

ریشه‌های مختلط یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی را پیدا می کند

(روش نیوتن برای چندجمله ای مختلط همگرا است. همچنین به

ریشه مختلط یک چندجمله ای حقیقی همگرا است)

اگر w یک ریشه مختلط چندجمله ای $p(z)$ باشد، $\bar{w}$ نیز ریشه است

و چندجمله ای بر عبارت زیر بخشپذیر است که u, v مقادیر حقیقی

هستند. $(z-w)(z-\bar{w}) = z^{۲} - uz - v, \quad u = w + \bar{w}, \; v = -\left|w\right|^{۲}$

$p(z)$ را بر $z^۲ - uz - v$ تقسیم می کنیم، باید باقیمانده برابر صفر باشد.

$$p(z) = (z^۲ - uz - v)q(z) + b_۱(z - u) + b_۰$$

اگر $q(z) = b_n z^{n-۲} + \cdots + b_۳ z + b_۲$ و $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_۱ z + a_۰$

آنگاه

$$\begin{cases} a_k = b_k - ub_{k+۱} - vb_{k+۲} & ۰ \leq k \leq n-۲ \\ a_{n-۱} = b_{n-۱} - ub_n \\ a_n = b_n \end{cases}$$

در این صورت ضرایب $b_1(u,v), b_0(u,v)$ به صورت تابعی از u, v در می آید و برای پیدا کردن ریشه دستگاه معادلات زیر را به روش نیوتن حل می کنیم.

$$\begin{cases} b_0(u,v) = 0 \\ b_1(u,v) = 0 \end{cases}$$

برای این منظور باید مشتقات جزیی $\frac{\partial b_1}{\partial v}, \frac{\partial b_1}{\partial u}, \frac{\partial b_0}{\partial v}, \frac{\partial b_0}{\partial u}$ را محاسبه کنیم.

$$c_k = \frac{\partial b_k}{\partial u}, d_k = \frac{\partial b_{k-۱}}{\partial v}$$

$$\begin{cases} a_n = b_n & \Rightarrow c_n = d_{n+۱} = ۰ \\ a_{n-۱} = b_{n-۱} - ub_n & \Rightarrow c_{n-۱} = b_n , d_n = ۰ \\ a_k = b_k - ub_{k+۱} - vb_{k+۲} & ۰ \leq k \leq n-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۰ = c_k - b_{k+۱} - uc_{k+۱} - vc_{k+۲} \\ ۰ = d_{k+۱} - ud_{k+۲} - b_{k+۲} - vd_{k+۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_k = b_{k+۱} + uc_{k+۱} + vc_{k+۲} \\ d_k = b_{k+۱} + ud_{k+۱} + vd_{k+۲} \end{cases} \Rightarrow$$

هر دو یک دنباله را تولید
می کنند، $c_k = d_k$

u, v تقریب اولیه جواب

$$\begin{cases} b_0(u,v) = 0 \\ b_1(u,v) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0(u,v) + \dfrac{\partial b_0}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial b_0}{\partial v}\Delta v = 0 \\ b_1(u,v) + \dfrac{\partial b_1}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial b_1}{\partial v}\Delta v = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial b_0}{\partial u} & \dfrac{\partial b_0}{\partial v} \\ \dfrac{\partial b_1}{\partial u} & \dfrac{\partial b_1}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = -J^{-1}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$