آنالیز عددی

جلسه سوم

حل معادلات غیر خطی

مرتبه همگرایی

- دنباله همگرای $\{x_n\}$ به α را همگرای از مرتبه p گوییم هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lambda$$

که $e_n = x_n - \alpha$ و در این صورت λ را ثابت خطای مجانبی

می نامیم. اگر $p=1$ همگرایی را خطی گوییم.

مثال: دنباله $x_n = \frac{1}{n^2}$ همگرای خطی به صفر است.

همگرایی مقایسه‌ای

- فرض کنید $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ و $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$، همگرایی $\{x_n\}$ از مرتبه $O(r_n)$ است، هرگاه

$$\left|\frac{x_n - \alpha}{r_n}\right| \leq C$$

و می نویسیم

$$x_n = \alpha + O(r_n)$$

وجود ریشه $f(x) = 0$

قضیه مقدار بینی: اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b) < 0$

در این صورت معادله $f(x) = 0$ حداقل یک ریشه در بازه (a,b) دارد.

تعداد ریشه

قضیه رُل: اگر تابع f در[a,b] پیوسته و روی (a,b) مشتقپذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$ آنگاه معادله $f'(x)=0$ حداقل یک ریشه در بازه (a,b) دارد.

تعمیم: اگر تابع f دارای n ریشه در بازه [a,b] باشد، آنگاه $f^{(k)}$ حداقل n-k ریشه در بازه (a,b) دارد.

مثال

$$f(x) = xe^x - 1$$

$$f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) = e - 1 > 0$$

$$f'(x) = (1 + x)e^x > 0 \qquad x \in (0,1)$$

تابع f دقیقاً یک ریشه در (۰و۱) دارد.

مثال

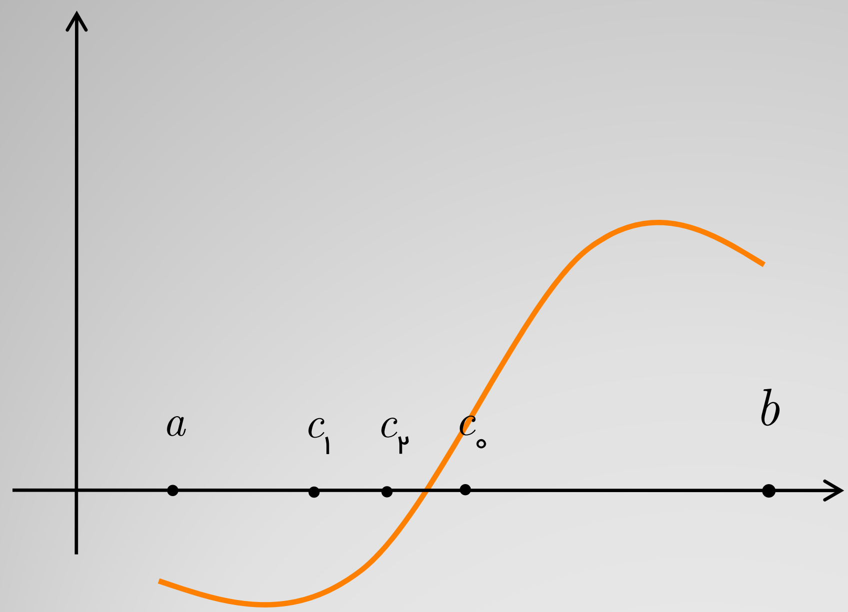
$$f(x) = x^{۲} - \sin x - ۱$$

$$f(-\frac{\pi}{۲}) > ۰, \qquad f(۰) < ۰, \qquad f(\frac{\pi}{۲}) < ۰$$

$$f'(x) = ۲x - \cos x\,, \qquad f''(x) = ۲ + \sin x > ۰$$

تابع f دقیقاً دو ریشه در $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ دارد.

روش تنصیف (دو بخشی)



الگوریتم روش تنصیف (دو بخشی)

اگر $f(a)f(b) < ۰$ تابع f یک ریشه در بازه (a,b) دارد.

$$a_۰ = a\,, \quad b_۰ = b\,, \quad c_۰ = \frac{a_۰ + b_۰}{۲}$$

اگر $f(a_n)f(c_n) < ۰$ قرار می دهیم $a_{n+۱} = a_n\,,\; b_{n+۱} = c_n$

اگر $f(b_n)f(c_n) < ۰$ قرار می دهیم $a_{n+۱} = c_n\,,\; b_{n+۱} = b_n$

اگر $f(c_n) = ۰$ به ریشه تابع رسیده ایم.

و در هر مرحله $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{۲}$

همگرایی روش تصنیف

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-۱} - a_{n-۱}}{۲} = \frac{b - a}{۲^n}$$

$$\left|c_n - \alpha\right| \leq \left|\frac{b_n - a_n}{۲}\right| = \frac{b - a}{۲^{n+۱}}$$

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha$$

زمان توقف الگوریتم

- خطای ریشه کمتر از δ باشد، یعنی $|c_n - \alpha| < \delta$

تعداد گامهای لازم:

$$|c_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} < \delta \quad \Leftarrow \quad n+1 > \log_2 \frac{b-a}{\delta}$$

- $|f(c_n)| < \varepsilon$

زمان توقف الگوریتم

- $f(c_n)$ تقریباً برابر صفر است، یعنی $\left|f(c_n)\right| < \varepsilon$

این معیار محک خیلی مناسبی نیست و به نسبت عکس مشتق تابع

خطا را زیاد می کند.

$$f(x) \approx f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) = (x-\alpha)f'(\alpha)$$

مثال:

$$f(x) = x^{100}$$

$$f(10^{-1}) = 10^{-100} \approx 0$$

محاسن روش تصنیف:

- همیشه همگرا است.
- تعداد تکرارهای لازم برای تقریب مورد نظر از قبل مشخص است.

معایب روش تصنیف:

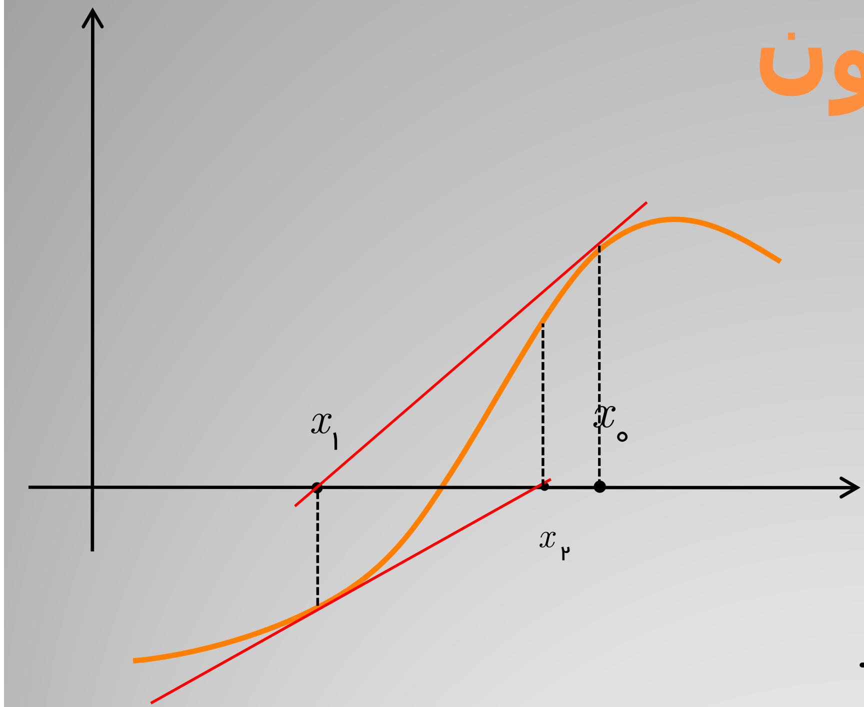
- سرعت همگرایی پایین است.

مثال: برای تقریب ریشه تابع $f(x) = x\sin x - ۱$ در بازه $(۰,۲)$ با چند مرحله از الگوریتم تصنیف می توان به دقت ۰.۰۱ رسید؟

$$\frac{b-a}{۲^{n+۱}} < ۱۰^{-۲} \Rightarrow ۱۰۰ < ۲^{n} \Rightarrow ۷ \leq n$$

k	a_k	c_k	b_k	$f(c_k)$
۰	۰	۱	۲	-۰.۱۵۸۵
۱	۱	۱.۵	۲	۰.۴۹۶۲
۲	۱	۱.۲۵	۱.۵	۰.۱۸۶۲
۳	۱	۱.۱۲۵	۱.۲۵	۰.۰۱۵۱
۴	۱	۱.۰۶۲۵	۱.۱۲۵	-۰.۰۷۱۸
۵	۱.۰۶۲۵	۱.۰۹۳۸	۱.۱۲۵	-۰.۰۲۸۴
۶	۱.۰۹۳۸	۱.۱۰۹۴	۱.۱۲۵	-۰.۰۰۶۶
۷	۱.۱۰۹۴	۱.۱۱۷۲	۱.۱۲۵	-۰.۰۰۴۲

روش نیوتن - رافسون



$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = f'(x_n)$$

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

مثال

- ریشه $x^2 - 2 = 0$ با دقت ۰.۰۰۰۱

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^2 - 2}{2x_n} = \frac{{x_n}^2 + 2}{2x_n}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 1.41417, \quad x_3 = 1.41142, \quad x_4 = 1.41142$$

تحلیل خطا

$$e_n = x_n - \alpha$$

$$e_{n+۱} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$۰ = f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n) f'(x_n) + \frac{۱}{۲}(\alpha - x_n)^{۲} f''(y_n)$$

$$e_{n+۱} = \frac{۱}{۲} {e_n}^{۲} \frac{f''(y_n)}{f'(x_n)}$$

قضیه: اگر تابع f'' پیوسته و α یک ریشه ساده باشد، ($f'(\alpha) \neq ۰$)

آنگاه همسایگی $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ وجود دارد که اگر $x_۰$ در این همسایگی

باشد، دنباله تولید شده به روش نیوتن به α همگرا از مرتبه حداقل ۲

است.

اثبات:

$$f'(x) \neq ۰, \quad for \left| x-\alpha \right| < \delta$$

$$۰ < m = \min_{\left|x-\alpha\right|<\delta} \left| f'(x) \right| \qquad M = \max_{\left|x-\alpha\right|<\delta} \left| f''(x) \right|$$

$$\rho = \frac{m}{۲M}, \qquad e_{n+۱} \leq \rho e_n^{۲}$$

$$\delta < \frac{۱}{\rho} \Rightarrow e_۱ < e_۰ \Rightarrow \left| x_۱ - \alpha \right| < \delta$$

$$e_n \le (\rho\delta) e_{n-۱} \le (\rho\delta)^n e_۰ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e_n = ۰ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+۱}}{{e_n}^۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{f''(y_n)}{۲f'(x_n)} = \frac{f''(\alpha)}{۲f'(\alpha)}$$

قضیه: اگر تابع f صعودی، محدب باشد، آنگاه با هر نقطه شروع به روش نیوتن به ریشه تابع همگرا خواهیم بود.

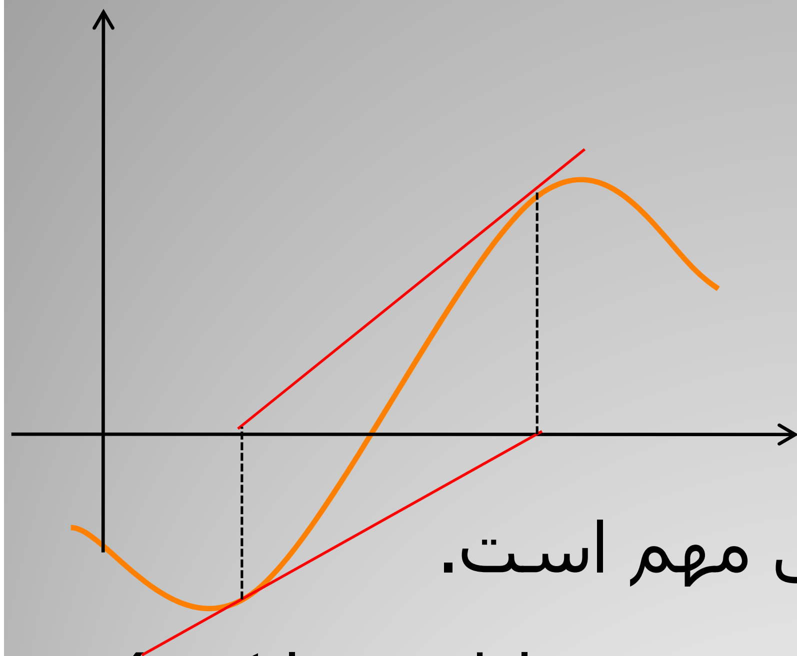
اثبات:

$$f' > 0,\ f'' > 0 \Rightarrow e_{n+1} = \frac{1}{2} e_n^{2} \frac{f''(y_n)}{f'(x_n)} > 0$$

$$\Rightarrow\ x_n > \alpha \Rightarrow f(x_n) > f(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow e_{n+1} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < e_n$$

دنباله $\{x_n\}$ نزولی و از پایین کراندار است. حد آن باید ریشه f باشد.



مزیت روش نیوتن:

- سرعت همگرایی بالای

معایب روش نیوتن:

- انتخاب نقطه شروع در همگرایی مهم است.

(می توان به کمک روش تصنیف یک تقریب اولیه پیدا کرد.)

- اگر$f'(\alpha)$خیلی کوچک باشد، (مثلاً α ریشه تکراری باشد) نه تنها تقریب اولیه باید خیلی دقیق باشد، بلکه سرعت همگرایی نیز کاهش پیدا می کند.

اگر α ریشه تکراری باشد

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x) \qquad h(\alpha) \neq ۰$$

$$e_{n+۱} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n\left(۱ - \frac{h(x_n)}{e_n h'(x_n) + m h(x_n)}\right)$$

$$g(x) = ۱ - \frac{h(x)}{(x-\alpha)h'(x) + m h(x)} \Rightarrow g(\alpha) = \frac{m-۱}{m}$$

اگر نقطه شروع به اندازه کافی نزدیک ریشه باشد، آنگاه

$$g(x_n) \leq \rho < ۱ \Rightarrow e_{n+۱} \leq \rho e_n$$

و در نتیجه دنباله تولید شده همگرا است، اما مرتبه همگرایی خطی است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+۱}}{e_n} = \lim_{n\to\infty} ۱ - \frac{h(x_n)}{e_n h'(x_n) + m h(x_n)} = \frac{m-۱}{m}$$

مثال: $x=0$ ریشه مرتبه ۳، $x-\sin x=0$ است.

روش نیوتن معمولی:

$$x_{n+1}=\frac{\sin x_n - x_n\cos x_n}{1-\cos x_n}$$

$$x_0=0.5,\ x_9=0.0002,\ x_{20}=0.0001,\ x_{21}=0.0001$$

روش نیوتن اصلاح شده:

$$x_{n+1}=x_n-3\frac{x_n-\sin x_n}{1-\cos x_n} \qquad x_0=0.5,\ x_1=-0.0042,\ x_2=0$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\sin x_n}{\cos x_n} \qquad x_0=0.5,\ x_1=-0.0463,\ x_2=0$$