آنالیز عددی

جلسه دوم

تقریب و خطا

تقریب $x = (0.b_1b_2b_3\cdots)_\beta \times \beta^e$

- قطع کردن:

$$fl_{chop}(x) = (0.b_1b_2b_3\cdots b_k)_\beta \times \beta^e$$

- گردکردن:

$$fl_{round}(x) = \begin{cases} (0.b_1b_2b_3\cdots b_k)_\beta \times \beta^e & b_{k+1} < \dfrac{\beta}{2} \\ \left[(0.b_1b_2b_3\cdots b_k)_\beta + \beta^{-k}\right] \times \beta^e & b_{k+1} \geq \dfrac{\beta}{2} \end{cases}$$

دقت ماشین

- مقدار δ که اگر فاصله دو عدد بیشتر از δ باشد، نمایش آنها در ماشین متفاوت باشد.

مثال: در ماشین ۲۳ بیت در مبنای ۲ دقت برابر

$2^{-23} \approx 1.2\times 10^{-7}$ است که تا ۶ رقم اعشار را دقیق محاسبه می کند.

در ماشین ۲۴ بیت در مبنای ۱۶ تا ۷ رقم اعشار را دقیق محاسبه می کند.

$$16^{-6} = 2^{-24} \approx 0.6\times 10^{-7}$$

خطا $\tilde{x} \sim x$

- خطای مطلق

$$e_{\tilde{x}} = \left| x - \tilde{x} \right|$$

- خطای نسبی

$$r_{\tilde{x}} = \frac{e_{\tilde{x}}}{\left| x \right|}$$

$$\tilde{x} = x \pm e_{\tilde{x}}$$

$$\tilde{x} = (۱ \pm r_{\tilde{x}})x$$

- خطای نسبی حدی

$$r_{\tilde{x}} = \frac{e_{\tilde{x}}}{\left| \tilde{x} \right|}$$

معمولاً خطای نسبی مهمتر از خطای مطلق است.

$x = ۳.۱۴۱۵۹۲$ $\qquad \tilde{x} = ۳.۱۴$

$e_{\tilde{x}} = ۰.۰۰۱۵۹۲$ $\qquad r_{\tilde{x}} \simeq ۰.۰۰۰۵۰۷$

$y = ۰.۰۰۰۰۱۲$ $\qquad \tilde{y} = ۰.۰۰۰۰۰۹$

$e_{\tilde{y}} = ۰.۰۰۰۰۰۳$ $\qquad r_{\tilde{y}} = ۰.۲۵$

خطا در روش قطع کردن

$$e_{chop} = \left|x - fl_{chop}(x)\right| = (\text{٠}.\text{٠٠٠}\cdots\text{٠}b_{k+\text{١}}\cdots)_\beta \times \beta^e \leq \beta^{e-k}$$

$$r_{chop} = \frac{e_{chop}}{x} \leq \frac{\beta^{e-k}}{\beta^{e-\text{١}}} = \beta^{-k+\text{١}}$$

خطا در روش گرد کردن

اگر $b_{k+1} \le \left[\frac{\beta - ۱}{۲}\right]$

$$e_{round} = \left|x - fl_{round}(x)\right| = (۰.۰۰۰۰\cdots۰ b_{k+1}\cdots)_{\beta} \times \beta^{e}$$

$$\le (۰.۰۰۰۰\cdots۰\left[\frac{\beta - ۱}{۲}\right](\beta - ۱)(\beta - ۱)\cdots)_{\beta} \times \beta^{e}$$

$$\le \left[\frac{\beta + ۱}{۲}\right]\beta^{-k-۱} \times \beta^{e}$$

$$r_{round} = \frac{e_{round}}{x} \le \frac{\left[\frac{\beta + ۱}{۲}\right]\beta^{e-k-۱}}{\beta^{e-۱}} = \left[\frac{\beta + ۱}{۲}\right]\beta^{-k}$$

خطا در روش گرد کردن

اگر $b_{k+1} \geq \left[\frac{\beta+۱}{۲}\right]$

$$e_{round} = \left|x - fl_{round}(x)\right| = \left|\beta^{-k} - (۰.۰۰۰۰\cdots۰b_{k+1}\cdots)_\beta\right| \times \beta^e$$

$$\leq \left(\beta^{-k} - \left[\frac{\beta+۱}{۲}\right]\beta^{-k-۱}\right)\beta^e = \left[\frac{\beta-۱}{۲}\right]\beta^{e-k-۱}$$

$$r_{round} = \frac{e_{round}}{x} \leq \frac{\left[\frac{\beta-۱}{۲}\right]\beta^{e-k-۱}}{\beta^{e-۱}} = \left[\frac{\beta-۱}{۲}\right]\beta^{-k}$$

مثال: تقریب عدد $x=\frac{2}{3}$ در کدام یک از دو ماشین زیر خطای کمتری دارد؟

- ۲۳ بیت در مبنای ۲
- ۲۴ بیت در مبنای ۱۶

$$x=\frac{2}{3}=(0.101010\ldots)_2=(0.AAA\ldots)_{16}$$

$$\tilde{x}_2=(0.101010\ldots1)_2 \qquad e_{\tilde{x}_2}=(0.\underbrace{00\ldots0}_{23}0101\ldots)_2=2^{-24}\times\frac{2}{3}$$

$$\tilde{x}_{16}=(0.AAAAAB)_{16} \quad e_{\tilde{x}_{16}}=16^{-6}-(0.000000AA\ldots)_{16}=16^{-6}\times\frac{1}{3}$$

انباشتگی خطا در جمع:

$$x = \tilde{x} \pm e_{\tilde{x}} \qquad y = \tilde{y} \pm e_{\tilde{y}}$$

$$-e_{\tilde{x}} - e_{\tilde{y}} \leq (x+y) - (\tilde{x}+\tilde{y}) \leq e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}$$

$$e_{\tilde{x}+\tilde{y}} = e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}$$

$$r_{\tilde{x}+\tilde{y}} = \frac{e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}}{x+y} = \frac{x}{x+y} r_{\tilde{x}} + \frac{y}{x+y} r_{\tilde{y}}$$

$$= \theta r_{\tilde{x}} + (\text{۱} - \theta) r_{\tilde{y}} \leq \max\{r_{\tilde{x}}, r_{\tilde{y}}\}$$

انباشتگی خطا در تفریق:

$$x = \tilde{x} \pm e_{\tilde{x}} \quad y = \tilde{y} \pm e_{\tilde{y}}$$

$$x - y \leq (\tilde{x} + e_{\tilde{x}}) - (\tilde{y} - e_{\tilde{y}}) = (\tilde{x} - \tilde{y}) + (e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}})$$

$$e_{\tilde{x}-\tilde{y}} = e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}$$

$$r_{\tilde{x}-\tilde{y}} = \frac{e_{\tilde{x}} + e_{\tilde{y}}}{x - y} = \frac{x}{x - y} r_{\tilde{x}} + \frac{y}{x - y} r_{\tilde{y}} = \frac{x + y}{x - y} r_{\tilde{x}+\tilde{y}} > r_{\tilde{x}+\tilde{y}}$$

انباشتگی خطا در ضرب:

$$\tilde{x} = (۱ \pm r_{\tilde{x}})x \qquad \tilde{y} = (۱ \pm r_{\tilde{y}})y$$

$$\tilde{x}\tilde{y} = xy(۱ \pm r_{\tilde{x}})(۱ \pm r_{\tilde{y}}) = xy(۱ \pm r_{\tilde{x}} \pm r_{\tilde{y}} \pm r_{\tilde{x}}r_{\tilde{y}})$$

$$r_{\tilde{x}\tilde{y}} \approx r_{\tilde{x}} + r_{\tilde{y}}$$

$$e_{\tilde{x}\tilde{y}} = xyr_{\tilde{x}\tilde{y}} \approx xy(r_{\tilde{x}} + r_{\tilde{y}}) = ye_{\tilde{x}} + xe_{\tilde{y}}$$

انباشتگی خطا در تقسیم:

$$\tilde{x} = (۱ \pm r_{\tilde{x}})x \qquad \tilde{y} = (۱ \pm r_{\tilde{y}})y$$

$$(۱ - r_{\tilde{x}})(۱ - r_{\tilde{y}}) \approx \frac{۱ - r_{\tilde{x}}}{۱ + r_{\tilde{y}}} \le \frac{(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}})}{(\frac{x}{y})} \le \frac{۱ + r_{\tilde{x}}}{۱ - r_{\tilde{y}}} \approx (۱ + r_{\tilde{x}})(۱ + r_{\tilde{y}})$$

$$r_{\tilde{x}/\tilde{y}} \approx r_{\tilde{x}} + r_{\tilde{y}}$$

$$e_{\tilde{x}/\tilde{y}} = \frac{x}{y} r_{\tilde{x}/\tilde{y}} \approx \frac{x}{y}(r_{\tilde{x}} + r_{\tilde{y}})$$

خطای نمایش: $x \odot y \sim fl(fl(x) \odot fl(y))$

اگر خطای نسبی نمایش ماشین r باشد، آنگاه $\delta_i \le r \quad i = ۱,۲,۳$

$$fl(x) = x(۱ + \delta_۱) \qquad fl(y) = y(۱ + \delta_۲)$$

$$\begin{aligned} fl(fl(x) \odot fl(y)) &= (fl(x) \odot fl(y))(۱ + \delta_۳) \\ &= (x \odot y)(۱ + r_{x \odot y})(۱ + \delta_۳) \\ &\approx (x \odot y)(۱ + r_{x \odot y} + \delta_۳) \end{aligned}$$

و خطای واقعی برابر است با

$$r_{x \odot y} + r$$

مثال

- در ماشینی که خطای نمایش r است، خطای واقعی در عمل جمع دو عدد حداکثر برابر است با

$$r_{\tilde{x}+\tilde{y}} + r \leq \max\{r_{\tilde{x}}, r_{\tilde{y}}\} + r \leq ۲r$$

و در جمع n عدد برابر با nr است.

تأثیر الگوریتم در میزان خطا

- در مثال زیر دیده می شود که در جمع اعداد اگر از کوچکترین شروع کنیم، خطا کمتر است.

$$R_{a+b} = \frac{a}{a+b} r_a + \frac{b}{a+b} r_b + \delta \leq ۲\delta$$

$$R_{(a+b)+c} = \frac{a+b}{a+b+c} R_{a+b} + \frac{c}{a+b+c} r_c + \delta \leq \frac{۳(a+b)+۲c}{a+b+c}\delta$$

$$R_{((a+b)+c)+d} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d} R_{(a+b)+c} + \frac{d}{a+b+c+d} r_d + \delta$$
$$\leq \frac{۴(a+b)+۳c+۲d}{a+b+c+d}\delta$$

مثال دیگر

- محاسبه عبارت $a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)$ به دو طریق

$$R_{a^۲} = ۲r_a + \delta \leq ۳\delta \qquad\qquad R_{b^۲} = ۲r_b + \delta \leq ۳\delta$$

$$R_{a^۲ - b^۲} = \frac{a^۲}{a^۲ - b^۲} R_{a^۲} + \frac{b^۲}{a^۲ - b^۲} R_{b^۲} + \delta \leq \frac{۴a^۲ + ۲b^۲}{a^۲ - b^۲}\delta$$

$$R_{(a-b)(a+b)} = R_{a+b} + R_{a-b} + \delta \leq ۲\delta + \left(\frac{a}{a-b} r_a + \frac{b}{a-b} r_b + \delta\right) + \delta$$

$$\leq \frac{۵a - ۳b}{a-b}\delta$$

مثال دیگر

- محاسبه تابع $f(x) = \sqrt{x+۱} - \sqrt{x}$ با ماشین حساب ۶ رقمی

و به روشی دیگر با تابع $f_A(x) = \dfrac{۱}{\sqrt{x+۱} + \sqrt{x}}$

x	۱	۱۰۰	$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۸}$
$f(x)$ مقدار واقعی	۰.۴۱۴۲۱۴	۰.۰۴۹۸۷۶	۰.۰۰۱۵۸۱	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۱۵۸	۰.۰۰۰۰۵
$f(x)$ مقدار محاسبه شده	۰.۴۱۴۲۱۴	۰.۰۴۹۸۸	۰.۰۰۱۵	۰.۰۰۱	۰	۰
$f_A(x)$ مقدار محاسبه شده	۰.۴۱۴۲۱۳	۰.۰۴۹۸۷۶	۰.۰۰۱۵۸۱	۰.۰۰۰۵	۰.۰۰۰۱۵۸	۰.۰۰۰۰۵

خطا در محاسبه توابع

$$f(x) = f(\tilde{x} \pm e_{\tilde{x}}) = f(\tilde{x}) \pm e_{\tilde{x}} f'(\tilde{x}) + \frac{e_{\tilde{x}}^{۲}}{۲!} f''(x_*)$$
$$\approx f(\tilde{x}) \pm e_{\tilde{x}} f'(\tilde{x})$$

$$e_{f(\tilde{x})} = e_{\tilde{x}} \left| f'(\tilde{x}) \right|$$

$$r_{f(\tilde{x})} = r_{\tilde{x}} \underbrace{\left| \frac{f'(\tilde{x})}{f(x)} x \right|}_{\text{عدد حالت (وضعیت)}}$$

مثال:

$$f(x) = b^x \Rightarrow K = \left| x \log b \right|$$

خطا در محاسبه توابع چند متغیره

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_۱, \cdots, \tilde{x}_n) \qquad \tilde{x}_i = x_i + e_{\tilde{x}_i}$$

$$f(\tilde{x} \pm e_{\tilde{x}}) \approx f(\tilde{x}) \pm \sum_{i=۱}^{n} \partial_i f(\tilde{x}) e_{\tilde{x}_i}$$

$$e_{f(\tilde{x})} = \sum_{i=۱}^{n} \left|\partial_i f(\tilde{x})\right| e_{\tilde{x}_i} \qquad r_{f(\tilde{x})} = \sum_{i=۱}^{n} \left|\frac{\partial_i f(\tilde{x})}{f(x)}\right| x_i r_{\tilde{x}_i}$$

مثال

- حجم کره با قطر d=۳/۷ که با خطای cm ۰/۰۵ محاسبه شده است و π=۳/۱۴ با خطای ۰/۰۰۱۶ را محاسبه کنید. کران بالای خطای مطلق و خطای نسبی را به دست آورید.

$$f(x,y) = \frac{۴}{۳}xy^{۳} \qquad f(۳.۱۴, ۳.۷) = ۲۱۲.۰۶۷۲$$

$$E = \frac{۴}{۳}\tilde{y}^{۳}e_{\tilde{x}} + ۴\tilde{x}\tilde{y}^{۲}e_{\tilde{y}} = ۸.۷۰۵۳$$

$$R = \frac{\frac{۴}{۳}\tilde{y}^{۳}e_{\tilde{x}} + ۴\tilde{x}\tilde{y}^{۲}e_{\tilde{y}}}{\frac{۴}{۳}xy^{۳}} \approx \frac{e_{\tilde{x}}}{\tilde{x}} + \frac{۳e_{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = ۰.۰۰۴۵۶۴$$

مثال

- حجم استوانه به شعاع $\frac{۵}{۳}$ و ارتفاع $\frac{۴}{۳}$ را در محاسبه با چهار رقم بامعنی برآورد کنید و کران بالای خطای نسبی را به دست آورید.

$$f(x,y,z) = xy^{۲}z \qquad x = \pi,\; y = \frac{۵}{۳},\; z = \frac{۴}{۳}$$

$$\tilde{x} = ۳.۱۴۲,\; \tilde{y} = ۱.۶۶۷,\; \tilde{z} = ۱.۳۳۳$$

$$r_{\tilde{x}} = r_{\tilde{y}} = r_{\tilde{z}} = \delta = \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴} \qquad f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = ۱۱.۶۴$$

$$R = \frac{\tilde{y}^{۲}\tilde{z}e_{\tilde{x}} + ۲\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}e_{\tilde{y}} + \tilde{x}\tilde{y}^{۲}e_{\tilde{z}}}{xy^{۲}z} + \delta \leq ۵\delta$$

پایداری محاسبه

محاسباتی که یک خطای کوچک در ورودی باعث خطای بزرگی در مقدار خروجی نشود.

مثال: در محاسبه $f(x)$ اگر مقدار ورودی با خطای h همراه باشد، خطای خروجی برابر است با $f(x+h)-f(x)\approx hf'(x)$

لذا اگر $f'(x)$ بزرگ باشد، محاسبه ناپایدار است.

مثال دیگر

$$x_۰ = ۱ \quad x_۱ = \frac{۱}{۳}$$

$$x_n = \frac{۴}{۳} x_{n-۱} - \frac{۱}{۳} x_{n-۲} \Rightarrow x_n = (\frac{۱}{۳})^n$$

اما در محاسبه با ۷ رقم اعشار

$x_۰ = ۱$	۷ رقم صحیح
$x_۱ = ۰.۳۳۳۳۳۳۳$	۷ رقم صحیح
$x_۲ = ۰.۱۱۱۱۱۱۲$	۶ رقم صحیح
$x_۳ = ۰.۰۳۷۰۳۷۲$	۵ رقم صحیح
$x_۸ = ۰.۰۰۰۰۳۷۵۷$	۰ رقم صحیح
$x_{۱۵} = ۳.۶۵۷۴۹۳$	خطای نسبی $۱۰^{۸}$