بسمه تعالی

راه حل سؤالات میان ترم دوم ریاضی عمومی ۱

پاییز ۱۳۹۰

راه حل سؤال ۱:

$$f(x)=(1+x^3)^{-1} \Rightarrow f'(x)=-3x^2(1+x^3)^{-2}, f''(x)=6x(2x^3-1)(1+x^3)^{-3}$$

$$f(1/01)\approx f(1)+0/01\times f'(1)=\frac{1}{2}-0/0075=0/4925$$

$$f(1/01)-[f(1)+0/01\times f'(1)]=\frac{1}{2}\times(0/01)^2\times f''(c), \quad 1<c<1/01$$

برای این مقدار c، علامت $f''(c)$ مثبت است. پس مقدار تقریبی از مقدار واقعی کمتر است.

برای قسمت ب باید ثابت کنیم:

$$\frac{1}{2}\times 10^{-4}\times 6c(2c^3-1)(1+c^3)^{-3} < 5\times 10^{-5}$$
$$\Leftrightarrow 6c(2c^3-1)(1+c^3)^{-3} < 1$$

بیشترین مقدار $(1+x^3)^{-3}$ در بازهٔ فوق به ازای $x=1$ اخذ می‌شود. یعنی کمتر از $\frac{1}{8}$ است. هم‌چنین بیشترین مقدار $x(2x^3-1)$ در نقطهٔ $x=1/01$ حاصل می‌شود که با جایگزاری، نامساوی فوق را ثابت می‌کند.

راه حل سؤال ۲:

به زودی

راه حل سؤال ۳:

الف)

$$\int_{۱}^{۲} \ln(x)dx = x\ln(x) - x\Big|_{۱}^{۲} = ۲\ln(۲) - ۲ - \ln(۱) + ۱ = ۲\ln(۲) - ۱ = \ln(۴) - ۱$$

ب)

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{۱}{n}\sqrt[n]{(n+۱)(n+۲)\cdots(n+n)} = \frac{۱}{n}\sqrt[n]{n^n(۱+\frac{۱}{n})(۱+\frac{۲}{n})\cdots(۱+\frac{n}{n})} \\
&= \sqrt[n]{(۱+\frac{۱}{n})\cdots(۱+\frac{n}{n})} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\ln(۱+\frac{i}{n}) = \int_{۰}^{۱}\ln(۱+x)dx = \int_{۱}^{۲}\ln(x)dx = ۲\ln(۲) - ۱ \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = e^{۲\ln(۲)-۱} = \frac{۴}{e}
\end{aligned}$$

راه حل سؤال ٤:

از تغییر متغیر $u = \tan(x)$ استفاده می‌کنیم. داریم $du = (۱+u^۲)dx$. پس:

$$\int \frac{۱}{tan(x)(۲+tan(x))}dx = \int \frac{۱}{u(۲+u)(۱+u^۲)}du$$

حال از روش ضرایب نامعین کسر فوق را تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{u(۲+u)(۱+u^۲)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{۲_u} + \frac{Cu+D}{۱+u^۲} \\
&= \frac{(A+B+C)u^۳ + (۲A+۲C+D)u^۲ + (A+B+۲D)u + ۲A}{u(۲+u)(۱+u^۲)}
\end{aligned}$$

بنابراین به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} A+B+C=٠ \\ ٢A+٢C+D=٠ \\ A+B+٢D=٠ \\ ٢A=١ \end{cases}$$

با حل این معادلات به دست می‌آید:

$$A=\frac{١}{٢}B=-\frac{١}{١٠},c=-\frac{٢}{٥},D=-\frac{١}{٥}$$

$$\Rightarrow \int \frac{١}{u(٢+u)(١+u^٢)}du$$

$$=\frac{١}{٢}\int \frac{١}{u}du-\frac{١}{١٠}\int \frac{١}{٢+u}du-\frac{٢}{٥}\int \frac{u}{١+u^٢}du-\frac{١}{٥}\int \frac{١}{١+u^٢}du$$

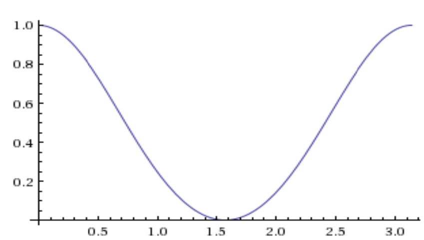
$$=\frac{١}{٢}\ln\left|u\right|-\frac{١}{١٠}\ln\left|٢+u\right|-\frac{١}{٥}\ln(١+u^٢)-\frac{١}{٥}\arctan(u)+const.$$

$$\Rightarrow \int \frac{١}{tan(x)(٢+tan(x))}dx$$

$$=\frac{١}{٢}\ln\left|\tan(x)\right|-\frac{١}{١٠}\ln\left|٢+\tan(x)\right|-\frac{١}{٥}\ln(١+\tan^٢(x))-\frac{x}{٥}+const.$$

راه حل سوال ۵:

الف) داریم $0 \le \frac{\pi}{2}\sin(t) \le \frac{\pi}{2}$ بنابراین بدست می‌آید:



$$0 \le \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(t)\right) \le 1 \quad (*)$$

با انتگرال‌گیری از نامساوی فوق و با توجه خواص انتگرال داریم:

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} sin(t)\right) dt \leq 1 \qquad (**)$$

همچنین از آنجایی که تابع $t \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{2} sin(t)\right)$ یک تابع **پیوسته** است که متحد با تابع ثابت صفر یا تابع ثابت یک نیست می‌توان نتیجه گرفت که نامساوی‌های (**) اکید خواهند بود. (برای بررسی دقیق به تمرین ۴,۱,۱۲ کتاب درسی، صفحه‌ی ۱۹۹ مراجعه شود.)

ب) با توجه به اینکه همواره $-1 \leq \cos(\pi \sin t)$ ، با انتگرال‌گیری روی $[0, \pi]$ نامساوی

$-1 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\pi \sin t) dt$ بدست می‌آید. همچنین با همان استدلال (الف) نامساوی اکید است یعنی $-1 < J(\pi)$.

برای اثبات نامساوی دیگر داریم:

$$J(\pi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t) dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\pi \sin t) dt$$

به کمک تعویض متغیر $\pi - t = u$ در انتگرال دوم خواهیم داشت:

$$J(\pi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t) dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin u) du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t) dt$$

(به عبارت دیگر تابع $\cos(\pi \sin t)$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ نسبت به خط $x = \frac{\pi}{2}$ تقارن دارد.)

حال با تعویض متغیر $\sin t = y$ خواهیم داشت:

$$J(\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{1} \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

و به کمک تغییر متغیر $y = t + \frac{1}{2}$ در انتگرال دوم خواهیم داشت:

$$J(\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}}dy - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi t)}{\sqrt{1-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}}dy$$

و لذا:

$$J(\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(\pi y)}{\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi y)\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}}\right)dy$$

و به دلیل اینکه برای $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ داریم $\cos \pi y \geq 0$ و همچنین:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}}\right) \leq 0$$

لذا مقدار انتگرال فوق کوچکتر یا مساوی صفر است. اثبات اکید بودن نامساوی مورد نظر مشابه قسمت (الف) می‌باشد.

برای اثبات قسمت نا بدیهی‌تر $J(\pi) < 0$ می‌توان از روش‌های زیر نیز استفاده نمود:

خلاصه‌ی روش دوم:

به کمک تقارن نمودار تابع دیدیم که:

$$J(\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t)dt$$

حال توجه کنید که بر بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ داریم:

$$\pi \sin t \geq 2t$$

(برای اثبات، مینیمم مطلق تابع مشتق پذیر $f(t) = \pi \sin t - 2t$ را بر بازه‌ی مذکور محاسبه کنید.)

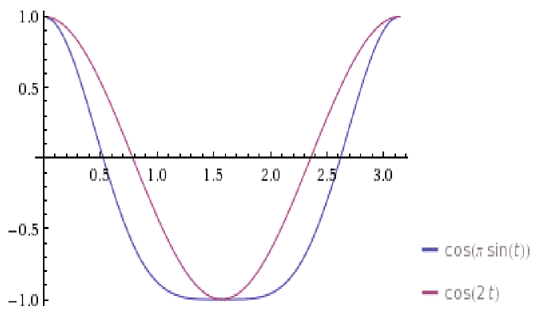
لذا با توجه به نزولی بودن تابع $cos(x)$ بر بازه‌ی $[0, \pi]$ خواهیم داشت:

$$\cos(\pi \sin t) \leq \cos(2t) \qquad \forall\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

لذا با انتگرال گیری از طرفین رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t)dt \leq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\, dt = 0$$

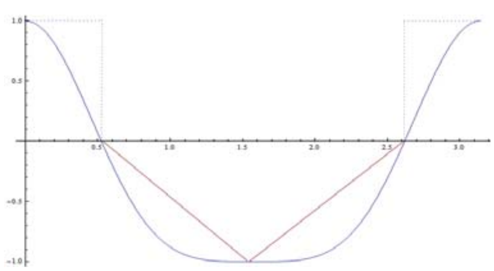
اثبات اکید بودن نیز مشابه قسمت الف است.



خلاصه‌ی روش سوم:

می‌توان دید که $g(t) = \cos(\pi \sin t)$ بر بازه‌ی $[0, \pi]$ دارای دو ریشه در نقاط $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ می‌باشد.(به نمودار زیر توجه کنید.)

همچنین با بررسی علامت **مشتق دوم** تابع g می‌توان دید که تقعر تابع بر بازه‌ی $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ رو به بالا می-باشد.(بررسی شود!)



بنابراین خطوط واصل به نقاط $(\frac{\pi}{6}, 0)$ و $(\frac{\pi}{2}, -1)$

و همچنین $(\frac{\pi}{2}, -1)$ و $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$، بالاتر از نمودار تابع قرار

می‌گیرد. حال با در نظر گرفتن ضوابط این خطوط و با توجه به این که g دارای کران بالای ۱ می‌باشد، خواهیم داشت:(توجه کنید که نقاط $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ نقاط عطف نمی‌باشند.)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(\pi \sin t)dt \leq \frac{\pi}{6} \times 1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos(\pi \sin t)dt \leq -\left(\text{مساحت مثلث}\right) \leq -\frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \cos(\pi \sin t)dt \leq \frac{\pi}{6}$$

و با جمع طرفین ۳ نامساوی بالا و با توجه به اینکه لااقل نامساوی اول اکید می‌باشد، حکم مورد نظر نتیجه می‌شود.

روش‌های دیگر:

می‌توان از مجموع بالای ریمان در بازه‌ای مناسب استفاده کرد. برای مثال می‌توان نشان داد که:

$$J(\pi) \leq 2\left(\frac{\pi}{6} \times 1 + \frac{\pi}{12} \times 0 + \frac{\pi}{12} \times \cos(\pi \sin\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{6} \times \cos(\pi \sin\frac{\pi}{3})\right) < 0$$

(مجموع ریمان بالای تابع g در افراز $\left[0,\frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right], \left[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right], \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right], [\frac{5\pi}{6},\pi]$)

همچنین می‌توان از تقریب‌هایی مانند روش ذوزنقه یا نقطه میانی و... در افرازی با طول مناسب استفاده کرد ولی کنترل خطای این روش‌ها احتیاج به محاسبات طولانی دارد.(به تغییر تقعر تابع نیز توجه شود.)