به نام او

**امتحان میان ترم درس آنالیز تابعی مقدماتی** وقت امتحان: ۲ ساعت

---

۱. ثابت کنید فضای $\ell^\infty$ باناخ است.

۲. صورت قضیه هان-باناخ را نوشته و به کمک آن نشان دهید برای هر $x_0 \neq 0$ در فضای نرم‌دار $X$ تابعک خطی پیوسته $\tilde{f}$ روی $X$ وجود دارد که $\|\tilde{f}\| = 1$ و $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.

۳. نشان دهید در هر فضای برداری نرم‌دار اگر گوی واحد فشرده باشد، بعد فضا متناهی است.

۴. اگر $X$ فضای برداری نرم‌دار باشد، ثابت کنید این نرم از یک ضرب داخلی روی $X$ می‌آید اگر و تنها اگر رابطه زیر برای هر $u, v \in X$ درست باشد:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

۵. الف- اگر $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله متعامد یکه در فضای ضرب داخلی $X$ باشد، نامساوی زیر را برای هر $x \in X$ ثابت کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

ب- همچنین نشان دهید اگر $X = \overline{\mathrm{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$ این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

۶. فرض کنید $f \neq 0$ تابعک خطی پیوسته روی فضای نرمدار $X$ باشد و $M = \ker f$.

الف- ثابت کنید برای هر $x \in X$، داریم: $\mathrm{dist}(x, M) = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$.

ب- برای فضای $X = \{u \in C[0,1] : u(0) = 0\}$ و تابعک $f(u) = \int_0^1 u(t)dt$ نشان دهید برای هر $u \in X$ داریم: $\mathrm{dist}(u, M) = |\int_0^1 u(t)dt|$. به علاوه برای هر بردارهای $u \in X - M$ مقدار $\inf_{v\in M} \|u-v\|$ اتخاذ نمی‌شود.

موفق باشید.

۹۵/۸/۲۵