آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه اول - ۹۵/۶/۲۸

به نام او

آنالیز تابعی مقدماتی

منابع درسی :

Kreyszig : Introductory Functional Analysis with Applications

Rynne & Youngson : Linear Functional Analysis

سیاست نمره‌دهی :

میان‌ترم ۶ نمره

پایان‌ترم ۱۰ نمره

تمرین ۴ نمره

فضای متریک : (X, d) $\quad d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$

(۱) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(۲) $d(x,y) = d(y,x)$

(۳) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

مثال ① متر گسسته روی هر مجموعه دلخواه X.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

مثال ② متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$.

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$
$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$d(x,y) = \left(|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2}$$

مثال ۳ فضای l^∞ : مجموعه همه دنباله‌های کران‌دار در $\mathbb{R}$.

$$l^\infty = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \exists M>0,\ \forall n\ |x_n| \le M \right\}$$

$$X=(x_n)_{n=1}^{\infty} \quad , \quad Y=(y_n)_{n=1}^{\infty}$$

متر سوپریمم

$$d(X,Y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

(۱) $d(X,Y)=0 \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n-y_n| = 0 \Longrightarrow \forall n\ |x_n-y_n|=0$

$\Longrightarrow x_n = y_n \quad \forall n$

$\Longrightarrow X=Y$

(۲) $d(X,Y)=d(Y,X)$

(۳) $d(X,Z) \le d(X,Y)+d(Y,Z)$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - z_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n-y_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n - z_n|$$

$$|x_n - z_n| \le |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$$

مثال ۴) $C[a,b]$ مجموعه توابع پیوسته با متر سوپریمم.

$$f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d(f,g)=\sup_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|$$

مثال ۵) S مجموعه همه دنباله‌ها در $\mathbb{R}$

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$$

نامساوی مثلث:

$$\frac{|x_n-z_n|}{1+|x_n-z_n|}\le\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}+\frac{|y_n-z_n|}{1+|y_n-z_n|}\ ?$$

$$f(t)=\frac{t}{1+t}$$

$$f(t+s)\le f(t)+f(s)\ ?$$

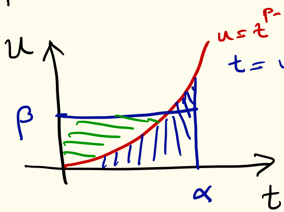
مثال ۹ فضای ℓ^p $(p\geq 1)$

$$\ell^p=\left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \;:\; \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty \right\}$$

$$\ell^p \subsetneq \ell^\infty$$

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{1/p}$$

لم ۱ نامساوی یانگ $\quad \alpha\beta\leq \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$ هرگاه $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. (تساوی اگر $\beta^q=\alpha^p$)



$(\alpha,\beta>0)$

$$\alpha\beta\leq \underbrace{\int_0^{\alpha} t^{p-1}\,dt}_{} + \underbrace{\int_0^{\beta} u^{q-1}\,du}_{} = \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$$

لم ۲ نامساوی هولدر

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{1/q}$$

$$\tilde{x}_n:=\frac{x_n}{\left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}}\;,\quad \tilde{y}_n=\frac{y_n}{\left(\sum|y_n|^q\right)^{1/q}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\tilde{x}_n\tilde{y}_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tilde{x}_n|^p}{p}+\frac{|\tilde{y}_n|^q}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

لم ۳ نامساوی مینکوفسکی :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}$$

حالت $p=1$ $\leftarrow$ بدیهی است.

$$|x_n+y_n|^p \le (|x_n|+|y_n|)\,|x_n+y_n|^{p-1}$$

هولدر $\longrightarrow$ $$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n+y_n|^{\overset{p}{(p-1)q}}\right)\right)^{1/q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p \le \left[\left(\sum |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |y_n|^p\right)^{1/p}\right] \times \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{1/q}}$$

نتیجه : مجموعه ℓ^p یک فضای برداری است.

$$X=(x_n)_{n=1}^{\infty} \quad , \quad Y=(y_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$X+Y=(x_n+y_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$r.X=(rx_n)_{n=1}^{\infty}$$

نکته: $1 \le p < q \le \infty$ آنگاه $l^q \supsetneq l^p$.

$$x \in l^p \Rightarrow \sum |x_n|^p < \infty \Rightarrow \exists N,\ n \ge N \quad |x_n| < 1$$

$$|x_n|^q < |x_n|^p$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty$$ (آزمون مقایسه)

$$\Rightarrow x \in l^q$$

مثال $\quad x_n = n^{-\alpha} \quad , \quad x_n^p = n^{-1}$

$$\Rightarrow \alpha = 1/p$$

$$\sum |x_n|^q = \sum n^{-q/p} < \infty$$

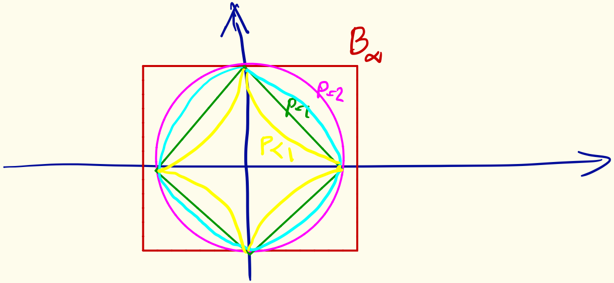
حالت $p<1$

اصلاً نامساوی مثلث برقرار نیست !

$\mathbb{R}^2 \qquad X=(x_1,x_2)\ ,\ Y=(y_1,y_2)$

$$d_p(X,Y) = \left(|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p\right)^{1/p}$$

$$d_\infty(X,Y) = \max\left(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\right)$$



$X=(0,0)$

$Y=(0,1)$

$Z=(1,1)$

$d(X,Y)=d(Y,Z)=1$

$d(X,Z)=2^{1/p} > d(X,Y)+d(Y,Z)$

$$B_1 = \{X\in\mathbb{R}^2 : d_p(X,0)\le 1\}$$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه دوم - ۹۵/۷/۴

توپولوژی در یک فضای متریک (X,d)

گوی باز به مرکز $x_0 \in X$ و شعاع r ، $B(x_0,r)=B_r(x_0)=\{x\in X : d(x,x_0)<r\}$

گوی بسته $\overline{B_r}(x_0)=\{x\in X : d(x,x_0)\leq r\}$

مجموعه باز : $U\subseteq X$ باز گفته می‌شود هرگاه برای هر $x_0\in U$ شعاع r وجود داشته باشد که

$$B_r(x_0)\subseteq U$$

مجموعه بسته : هر مجموعه‌ای که مکمل آن باز باشد.

تعریف : نقطه حدی مجموعه A ، $x_0 \in \lim(A)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall r>0 ,\ (B_r(x_0)-\{x_0\})\cap A\neq\emptyset$$

تعریف ـ بستار A ، $\overline{A}=A\cup\lim(A)$

تعریف - U زیرمجموعه چگال A است هرگاه $A \subseteq \overline{U}$

تعریف - فضای متریک جدایی‌پذیر: زیرمجموعه چگال و شمارا دارد.

مثال - $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^n$، $\mathbb{C}^n$ جدایی‌پذیر هستند. (بردارهایی که همه درایه‌های گویا هستند)

مثال - X با متر گسسته هر زیرمجموعه‌ای باز و بسته است. تنها مجموعه چگال X است. در صورتی X جدایی‌پذیر است که شمارا باشد.

مثال: $\ell^p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ برای $1 \leq p < \infty$

ادعا: $M = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = 0 \\ x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{Q} \end{array} \right\}$ $\Longrightarrow$ شمارا است.

$$= \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{Q}^N$$

$X = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ دلخواه. نشان می‌دهیم برای هر $\varepsilon > 0$ $Y \in M$ وجود دارد که

$$d_p(X, Y) < \varepsilon$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \implies \exists N, \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

$$1 \leq i \leq N \qquad |y_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{N^{1/p}} \quad , y_i \in \mathbb{Q}$$

$$y = (y_1, \dots, y_N, 0, 0, \dots) \in M$$

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon}{2N^{1/p}}\right)^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{1/p}$$

$$\leq \left[\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \times 2\right]^{1/p} = 2^{1/p}\,\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

مثال - $\ell^\infty = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \exists M, \ |x_n| \leq M \}$ جدایی‌پذیر نیستند.

$$\underbrace{\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \{0,1\} \}}_{\text{مجموعه ناشمارا معادل } [0,1)} \subseteq \ell^\infty \longrightarrow$$ فاصله هر دو عضو جدا از هم یک است.

$\downarrow$

هر مجموعه چگال یک عضو در گوی به شعاع $\frac{1}{3}$ حول اعضای این مجموعه است.

تعریف- همگرایی دنباله. $x_n \in (X,d)$ همگرا به x گفته می‌شوند هرگاه

$d(x_n,x) \longrightarrow 0$ وقتی $n \to \infty$.

تعریف- دنباله کوشی: $\{x_n\}$ در (X,d) کوشی است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$،

$$\exists N,\ n,m \geq N \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

تعریف- فضای تام: هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

مثال- $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$ تام هستند.

مثال- ℓ^∞ تام است.

کوشی

$u_n \in \ell^\infty$ کوشی است یعنی

$$\forall \varepsilon\ \exists N,\ m,n>N: d_\infty(u_n,u_m) < \varepsilon$$

$$u_n = (x_i^n)_{i=1}^\infty$$

$$d_\infty(u_n,u_m) = \sup_{1\leq i<\infty} |x_i^n - x_i^m|$$

$$\Rightarrow \exists \bar{u} \in \ell^\infty$$

$$d_\infty(u_n,\bar{u}) \to 0$$

$u_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots)$

$u_2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots)$ $\quad\Longrightarrow\quad |x_i^n - x_i^m| \leq d_\infty(u_n, u_m)$

$\vdots$

$u_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots)$

$\Downarrow$

$\vdots$

$\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است در R

$\downarrow$

$\Downarrow$

$\bar{u} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n = \bar{x}_i$

۱) $\bar{u} \in \ell^\infty$ ؟

۲) $d_\infty(u_n, \bar{u}) \to 0$ ؟

1) $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ کران دار است؟

$\{u_n\}$ در l^{∞} کوشی است $\Rightarrow \exists N,\ m,n \geq N \quad d_\infty(u_m, u_n) < \cancel{1}\ \varepsilon$

$\Rightarrow \quad |x_i^m - x_i^n| < \cancel{1}\ \varepsilon \quad \forall\, 1 \leq i$

در n ثابت حد داریم و $m \to \infty$

$\Rightarrow \quad |\bar{x}_i - x_i^n| < \cancel{1}\ \varepsilon \Rightarrow d_\infty(\bar{u}, u_n) < \varepsilon$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_n \in l^{\infty} \Rightarrow \{x_i^n\} \text{ کران دار} \\ \Rightarrow \{\bar{x}_i\} \text{ کران دار} \end{array}}$$

مثال- فضای ℓ^p (برای $1 \le p < \infty$) تام است. (تمرین: اثبات قبل را تکرار کنید.)

گزاره: X فضای تام آنگاه $M \subseteq X$ تام است اگر و تنها اگر M بسته باشد.

مثال $C \subseteq \ell^\infty$ مجموعه همه دنباله‌های همگرا تام است.

ادعا: $u_n \in C$ و $u_n \to \bar{u}$ $\Longleftarrow$ $\bar{u} \in C$ (یعنی C بسته است)

$$u_n = (x_i^n)_{i=1}^\infty \xrightarrow{\ell^\infty} \bar{u} = (\bar{x}_i)_{i=1}^\infty$$

$$\Rightarrow \sup_{1 \le i < \infty} |x_i^n - \bar{x}_i| \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to +\infty \Rightarrow \exists N, n \ge N \quad \forall i \quad |x_i^n - \bar{x}_i| < \varepsilon$$

$$u_n \in C \Rightarrow \lim_{i \to \infty} x_i^n = y_n \Rightarrow \exists M, i,j > M, \ |x_i^n - x_j^m| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \le |\bar{x}_i - x_i^n| + |x_i^n - x_j^n| + |x_j^n - \bar{x}_j| < 3\varepsilon \Rightarrow \{\bar{x}_i\} \text{ کوشی است}$$

مثال فضای توابع پیوسته (با متر سوپریمم) $C[a,b]$ ،

$$d_\infty(f,g)=\sup_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|$$

این فضا، فضای تام است.

تمرین: اثبات تام بودن $C[a,b]$

متمم سازی یک فضای متریک.

(X,d) تام نیست. $\Longleftarrow$ فضای متریک $(\hat{X},\hat{d})$ وجود دارد که $X\subseteq\hat{X}$ چگال است و

$$\forall\, x,y\in X\ ,\quad d(x,y)=\hat{d}(x,y)$$

که $(\hat{X},\hat{d})$ تام است.

$$\hat{X}=\bar{X}/\sim$$

، $\bar{X}=\{$ تمام دنباله‌های کوشی در X $\}$

$=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\mid x_n\in X$ و کوشی است $\}$

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}\sim(y_n)_{n=1}^{\infty}\iff\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$$

$$\hat{d}\left(\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right], \left[(y_n)_{n=1}^{\infty}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

چرا حد وجود دارد ؟

تعریف ما به انتخاب نماینده از کلاس هم‌ارزی وابسته نیست.

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه ۴ ۹۵/۷/۶

فضای برداری

$(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$

جمع برداری — میدان برداری

$\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$

$(V, +)$ یک گروه آبلی

$+ : V \times V \longrightarrow V$

$w, v, u \in V$

$v + u = u + v$

$v + (u + w) = (v + u) + w$

$\exists\, 0 \in V : \quad v + 0 = v$

$\forall v \in V \ \exists w \in V, \quad v + w = 0 \qquad (w = -v)$

$\cdot : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$

مثال: $V = \mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$

مثال: فضای توابع پیوسته حقیقی $C[a,b]$ روی میدان $\mathbb{R}$

$$f, g \in C[a,b] \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(r.f)(x) = \underbrace{r.f(x)}_{\text{ضرب دو عدد حقیقی}}$$

مثال فضای ℓ^p .

$$\ell^p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$$

جمع برداری

جمع اعداد حقیقی

$$r.(x_n)_{n=1}^{\infty} = (r x_n)_{n=1}^{\infty}$$

ضرب اسکالر

ضرب دو عدد حقیقی

تعریف: (زیرفضا) اگر V فضای برداری باشد و $W \subseteq V$ زیرفضای V است هرگاه

نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد.

درواقع $(W, +, \cdot)$ یک فضای برداری است.

تعریف: (ترکیب خطی) اگر $v_1, \dots, v_n \in V$ و $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ آنگاه بردار

$$r_1 v_1 + \dots + r_n v_n$$

یک ترکیب خطی $v_1, \dots, v_n$ گفته می‌شود.

تعریف: اگر V فضای برداری باشد و $M \subseteq V$ (صرفاً زیرمجموعه)

$$\operatorname{Span} M = \left\{ \text{همه ترکیبهای خطی که به وسیله بردارهای } M \text{ به دست می‌آیند} \right\}$$

تمرین: $\operatorname{Span} M$ کوچکترین زیرفضای V است که شامل M است.

تعریف: (استقلال خطی) بردارهای $v_1, \dots, v_n$ را مستقل خطی گوییم هرگاه برای هر ترکیب خطی

$$r_1 v_1 + \dots + r_n v_n = 0$$

نتیجه شود که $r_1 = \dots = r_n = 0$

تعریف: M را پایه فضای برداری V گوییم هرگاه $\operatorname{Span} M = V$ و در ضمن M مستقل خطی باشد.

مثال در فضای برداری ℓ^p، $M=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه نیست

$$e_n = (0,0,\dots,\underset{\uparrow\ n\text{-ام}}{1},0,\dots)$$

در حقیقت $Span(M)$ شامل همه دنباله‌هایی است که از یکی به بعد صفر است.

$$Span\, M = \left\{ \underbrace{r_1 e_1 + \cdots + r_n e_n}_{(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, 0, \ldots)} \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N},\ r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R} \\ e_1, \ldots, e_n \in M \end{array} \right\}$$

<u>سؤال</u> وجود پایه برای یک فضای برداری:

$$\mathcal{A} = \{ M \subseteq V : Span\, M = V \}$$

$$V \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset$$

$$M_1 \leq M_2 \iff M_1 \subseteq M_2$$

به کمک لم زرن می‌توان دید که $\mathcal{A}$ کوچکترین عضو دارد.

تعریف: کاردینال یک پایه برای فضای برداری V را بعد فضا می‌نامیم.

تمرین: اگر M_1 و M_2 دو پایه برای V باشند آنگاه $|M_1| = |M_2|$.

فضای برداری نرم دار

$\|\cdot\| : V \longrightarrow [0,\infty)$ نرم $\leftarrow$ (طول بردار)

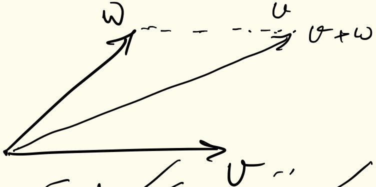
(۱) $\|v\| \geq 0$

(۲) $\|v\| = 0_{\in \mathbb{R}} \Longleftrightarrow v = 0$

بردار صفر

(۳) $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$

(۴) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



نکته: در حقیقت یک فضای برداری نرم دار یک فضای متریک است.

$$d(v,w) = \|v - w\|$$

مثال: $\mathbb{R}^n$ و C^n.

$$X=(x_1,\dots,x_n)$$

$$\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|X\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

مثال: $X=(x_i)_{i=1}^{\infty}\in \ell^p$

$$\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$p=\infty \Rightarrow \|X\|_\infty=\sup_{1\le i}|x_i|$$

مثال- روی فضای برداری $C[a,b]$

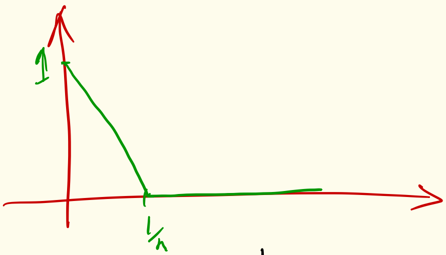
$$\|f\|_\infty=\sup_{a\le t\le b}|f(t)|\ ,\quad \|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

تمرین: چرا $\|f\|_p$ برای $1\le p$ یک نرم است؟

تعریف: فضای برداری نرم دار V را باناخ گوییم هرگاه نسبت به متر القایی از آن نرم فضای V تام باشد. (هر دنباله کوشی در V همگرا باشد)

مثال: $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{C}^n$ ، ℓ^p ، ℓ^∞ فضای باناخ هستند.

مثال: فضای $C[a,b]$ با نرم سوپریمم باناخ است ولی با نرم $\|f\|_p$ باناخ نیست.



$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & x>1/n \\ 1-nx & x\le 1/n \end{cases}$$

$n<m$

$$\|f_n-f_m\|=\int_0^1 |f_n(x)-f_m(x)|\,dx=\int_0^{1/m}(m-n)x\,dx+\int_{1/m}^{1/n} f_n(x)$$

$$=\frac{m-n}{2m^2}+\left(x-\frac{nx^2}{2}\right)\Big|_{1/m}^{1/n}\longrightarrow 0$$

سؤال: آیا هر متری روی یک فضای برداری از یک نرم می‌آید؟ خیر

متر گسسته.

سؤال: یک فضای برداری باناخ داریم. چه موقع زیرفضای آن نیز باناخ است؟

اگر زیرفضا بسته باشد (نسبت به متر القایی از نرم) آنگاه زیرفضا نیز باناخ است.

سؤال: آیا ممکن است زیرفضای یک فضای برداری بسته نباشد؟ بله

مثال: فضای بردار $C[a,b]$ با نرم سوپریمم

زیرفضا را همه چندجمله‌ایها قرار دهید.

مثال: در ℓ^p، زیرفضا را همه دنباله‌هایی بگیریم که از یکی به بعد صفر هستند. در حقیقت این زیرفضا در ℓ^p چگال است.

$$\overline{\operatorname{Span}(M)} = \ell^p$$

$$M = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad e_n = (0,\dots,0,\underset{n\text{-ام}}{1},0,\dots)$$

نکته: برای $p=\infty$، در مثال قبل

$$\ell^\infty \neq \overline{\operatorname{Span} M}.$$

$\downarrow$

مجموعه همه دنباله‌هایی که به صفر همگرا هستند.

تعریف: اگر $\{v_n\}$ ، ... ، v_3 ، v_2 ، v_1 یک دنباله‌ای از بردارها در فضای برداری V باشد
نرم‌دار

سری $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ به بردار $v \in V$ همگرا است

هرگاه برای $x_m = \sum_{n=1}^{m} v_n$ داشته باشیم

$$\|x_m - v\| \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad m \to \infty$$

آزمون همگرایی: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$ همگرا باشد (یک سری اعداد حقیقی) آنگاه

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ همگرا است (در یک فضای باناخ)

تعریف: مجموعه M را پایه شادر برای فضای برداری V می‌نامیم هرگاه M مستقل خطی باشد و

$$\overline{\operatorname{Span} M} = V$$

در حقیقت اگر $M=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ آنگاه

$$\overline{\operatorname{Span} M} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r_n v_n \;:\; r_n \in \mathbb{R} \right\}$$

به شرط آنکه سری همگرا باشد

نکته: متوجه باشیم که پایه شادر می‌تواند پایه (به معنای جبر خطی) نباشد.

به عنوان مثال وقتی $e_n=(0,0,\dots,0,\underset{\text{n-ام}}{1},0,\dots)$

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه شادر است (برای ℓ^p) هر چند

$$\operatorname{Span}\{e_n\} \neq \ell^p \quad (1\le p<\infty)$$

نکته: اگر یک فضای برداری پایه شادر شمارا داشته باشد، آنگاه جدایی پذیر است.

در نتیجه ℓ^∞ پایه شادر شمارا ندارد.

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه چهارم ۹۵/۷/۱۱

هم ارزی نرمها

X فضای برداری نرم دار با دو نرم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ این دو نرم هم ارز گفته می‌شوند هرگاه ثابتهای c و $C > 0$ وجود داشته باشند که

$$\forall v \in X, \quad c\|v\|_2 \le \|v\|_1 \le C\|v\|_2$$

در نتیجه توپولوژی به دست آمده روی X توسط این دو نرم یکسان است.

قضیه: در یک فضای برداری با بعد متناهی هر دو نرم هم ارز هستند.

$$X = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

$$\boxed{\max_{v \neq 0} \frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} \le C}$$

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

$$\frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} \le \frac{|a_1| \cdot \|e_1\|_1 + \dots + |a_n| \cdot \|e_n\|_1}{\quad}$$

$$\|e_1\|_1, \dots, \|e_n\|_1 \leq C(\|e_1\|_2, \dots, \|e_n\|_2)$$

$$C = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|e_i\|_1}{\|e_i\|_2}$$

$$\|v\|_1 \leq \sum |a_i| \cdot \|e_i\|_1 \leq \sum C|a_i| \cdot \|e_i\|_2 \overset{?}{\not\leq} C\|v\|_2$$

$$\max_{v \neq 0} \frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} = \max_{v \neq 0} \frac{\left\| \|v\|_2 \cdot \frac{v}{\|v\|_2} \right\|_1}{\|v\|_2}$$

$$= \max_{v \neq 0} \left\| \frac{v}{\|v\|_2} \right\|_1$$

$$= \max_{\|v\|_2 = 1} \|v\|_1 < \infty \rightarrow$$

به شرط آنکه مجموعه $\|v\|_2 = 1$ فشرده باشد.

گزاره اگر X فضای برداری با بعد متناهی باشد و $\|\cdot\|$ یک نرم برای آن باشد

کره واحد $\{v : \|v\|=1\}$ فشرده است.

اثبات قضیه

$$v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

$$\|v\| = |a_1| + \cdots + |a_n|$$

این تعریف، یک نرم ارائه می‌کند.

$$\|v\|_1 = \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\|_1$$

$$\overset{?}{\leq} |a_1| \cdot \|e_1\|_1 + \cdots + |a_n| \cdot \|e_n\|_1 \leq C(|a_1| + \cdots + |a_n|)$$

$$\leq C\|v\|$$

$$C = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|_1$$

ادعا

$$|a_1|+\cdots+|a_n| = \|v\| \le M\cdot\|v\|_1$$

$$M = \max_{\|v\|=1} \|v\|_1 < \infty$$

$\{v : \|v\|=1\}$ فشرده است.

$\|\cdot\|_1$ روی فضای $(X,\|\cdot\|)$ پیوسته است.

تعریف پیوستگی

$$\left\{\begin{array}{l} \|v_n - v\| \to 0 \\ \Longrightarrow \|v_n - v\|_1 \to 0 \end{array}\right.$$

و این درست است چون $\|v\|_1 \le C\|v\|$.

<u>سوال</u> چرا $\{v : \|v\| = 1\}$ فشرده است؟ (نسبت به توپولوژی القایی از نرم

$(\,\|v\| = |a_1| + \cdots + |a_n|\,)$

$$T : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{پیوسته}} X$$

$$T(a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

گوی واحد در X تصویر گوی واحد $\mathbb{R}^n$ است.

<u>تعریف فشردگی</u>: X فضای متریک نرم‌دار و $K \subseteq X$.

K فشرده است هرگاه هر دنباله‌ای در K زیردنباله همگرا داشته باشد.

هر پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از K (یعنی $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$) دارای زیرپوشش متناهی است

یعنی $K \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$.

$(X, \|\cdot\|_X)$ و $(Y, \|\cdot\|_Y)$ دو فضای متریک نرم دار هستند و

$f: X \longrightarrow Y$ پیوسته است هرگاه

برای هر باز $U \subseteq Y$ داریم $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ در X باز باشد.

یا به طور معادل برای هر دنباله $x_n \in X$ که $\|x_n - x\|_X \to 0$ داشته باشیم

$$\|f(x_n) - f(x)\|_Y \longrightarrow 0$$

قضیه: در فضای برداری بعد متناهی هر دو نرم هم‌ارز هستند.

نتیجه: هر فضای برداری بعد متناهی تام است.

نتیجه: هر زیرفضای بعد متناهی یک فضای برداری نرم‌دار بسته است.

نتیجه: گوی واحد در هر فضای برداری نرم‌دار بعدمتناهی فشرده است.

نتیجه: هر مجموعه کران‌دار و بسته در هر فضای برداری نرم‌دار بعدمتناهی فشرده است.

$$T:(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \xrightarrow{\text{همسانریختی}} (X, \|\cdot\|)$$

$$|a_1| + \cdots + |a_n|$$

سؤال: آیا گوی واحد در فضای برداری بعدنامتناهی فشرده است؟

مثال: ℓ^∞ و

$$\text{گوی واحد} \ni e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

n-ام

$$\|e_n\|_\infty = 1$$

$$\|e_n - e_m\|_\infty = 1 \quad n \neq m$$

$\longrightarrow$ $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ هیچ زیردنباله همگرایی ندارد.

گزاره: اگر در یک فضای برداری گوی واحد فشرده باشد، بعد فضا متناهی است.

اثبات: دنباله $\{x_n\}$ در گوی واحد پیدا می‌کنیم که $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$.

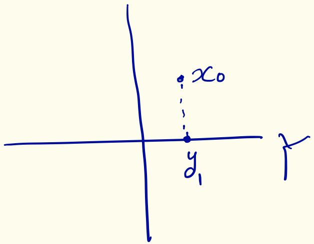
$$\operatorname{dist}\big(x_n, \underbrace{\operatorname{Span}\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle}\big) \geq 1/2$$

لم: X فضای برداری نرم‌دار، و Y زیرفضای برداری بعد متناهی. آنگاه $x \in X$ که $\|x\| = 1$ وجود دارد که

$$\operatorname{dist}(x, Y) \geq 1/2 \qquad \theta \qquad \theta < 1$$

$$\exists\, x_0 \notin Y, \quad 0 < \alpha = \operatorname{dist}(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$$

$$\Longrightarrow \exists\, y_1 \in Y, \ \alpha \leq \|x_0 - y_1\| \leq \cancel{2\alpha} \ \frac{\alpha}{\theta}$$



$$x = \frac{x_0 - y_1}{\|x_0 - y_1\|}, \quad \|x\| = 1$$

$$\operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| =$$

$$= \inf_{y\in Y} \left\| \frac{x_0}{\|x_0-y_1\|} - y \right\| = \inf_{y\in Y} \frac{1}{\|x_0-y_1\|} \cdot \left\| x_0 - y\cdot\|x_0-y_1\| \right\|$$

$$= \inf_{y\in Y} \frac{1}{\|x_0-y_1\|} \cdot \|x_0 - y\| \geq \frac{1}{2\alpha} \underbrace{\inf_{y\in Y} \|x_0-y\|}_{=\alpha} = \frac{1}{2}$$

<u>تمرین</u>: در لم قبل فرض کنید Y زیرفضای بسته است. آیا برای $\theta=1$ لم درست است؟

(راهنمایی: درست نیست)

آنالیزِ تابعی مقدماتی

جلسه پنجم ۹۵/۷/۱۳

تمرینِ سری اول

ص ۱۶ ۱، ۴، ۱۱

ص ۲۵ ۱۲

ص ۳۹ ۳، ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۵

ص ۴۶ ۷

تحویلِ ۹۵/۷/۲۷ امتحان ۹۵/۸/۲۵

عملگرهای خطی

اگر X و Y دو فضای برداری باشند به تابع $T: X \longrightarrow Y$ عملگر خطی گفته می‌شود هرگاه

Tx

$\langle T, x \rangle$

$$T(rx) = rT(x) \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in X$$

$$\underbrace{T(x+y)}_{\text{جمع در } X} = \underbrace{T(x) + T(y)}_{\text{جمع در فضای } Y} \quad \forall x, y \in X$$

تعریف:

$$X \supseteq \operatorname{Nul} T = \{x \in X : T(x) = 0_Y\}$$

زیرفضا

$$Y \supseteq \operatorname{Im} T = \{Tx : x \in X\}$$

زیرفضای Y

عملگر صفر :

$$O : X \longrightarrow Y$$

$$O(x) = 0_Y$$

عملگر همانی :

$$I : X \longrightarrow X$$

$$I(x) = x$$

مثال :

$$T(x_n)_{n=1}^{\infty} = (n x_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$T : A \longrightarrow A$$

مجموعه دنباله‌ای که از یکی به بعد صفر هستند.

مثال: P فضای همه چندجمله‌ای‌ها

$$T(p) = p'$$

تعریف: فرض کنید $T: X \to Y$ خطی باشد، T را وارون‌پذیر گوییم هرگاه $S: Y \to X$ وجود داشته باشد که

$$I_Y = T \circ S : Y \to Y$$

$$I_X = S \circ T : X \to X$$

S را وارون T گوییم و با $S = T^{-1}$ نشان می‌دهیم.

T^{-1} در صورت وجود خطی است. شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری T این است که یک به یک و پوشا باشد.

T یک به یک است $\Longleftrightarrow$ $Null\, T = \{0\}$

T پوشا است $\Longleftrightarrow$ $Im\, T = Y$.

<u>گزاره</u>: اگر $T: X \to Y$ و $S: Y \to Z$ وارون پذیر باشند آنگاه

$T \circ S : X \longrightarrow Z$ وارون پذیر است و

$$(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$$

سؤال: اگر $T: X \to Y$ خطی باشد و X و Y دو فضای برداری نرم دار

در چه صورت T پیوسته است؟

<u>نکته</u>: T پیوسته است $\Longleftrightarrow$ T در $x=0$ پیوسته باشد.

$y + x_n \to 0 + y \Rightarrow Ty + Tx_n \to T0 + Ty = 0$

اگر بعد X متناهی باشد، هر عملگر خطی پیوسته است.

$$X = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} x_m = a_m^1 e_1 + \dots + a_m^n e_n \longrightarrow 0 \\ \|x_m\| \sim |a_m^1| + \dots + |a_m^n| \end{array}\right\} \Rightarrow a_m^k \longrightarrow 0 \text{ as } m \to \infty$$

$$Tx_m = a_m^1 Te_1 + \dots + a_m^n Te_n$$

$$\|Tx_m\|_Y \leq |a_m^1| \cdot \|Te_1\|_Y + \dots + |a_m^n| \cdot \|Te_n\|_Y \longrightarrow 0$$

درنتیجه T در $x=0$ پیوسته است.

آیا در بعد نامتناهی عملگر خطی ناپیوسته وجود دارد ؟

$$T : P \longrightarrow P$$ ← فضای چندجمله‌ای‌ها

$$Tp = p' \quad , \quad \|p\| = \sup_{0 \le t \le 1} |p(t)|$$

$$, \ p_n(t) = \frac{1}{n} t^n \xrightarrow{P} 0 \ , \ \left(\|p_n\| = 1/n \right)$$

$$Tp_n = t^{n-1} \quad , \quad \|Tp_n\| = 1$$

$\Longrightarrow$ T پیوسته نیست.

تعریف: عملگر خطی $T : X \to Y$ را کراندار گوییم هرگاه ثابت مثبت $C > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in X$

$$\|Tx\|_Y \le C \|x\|_X$$

$$\|T\| = \sup_{X \ni x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

مثال: 0 (عملگر صفر) کران دار است و $\|0\| = 0$

مثال: عملگر همانی $\|I\| = 1$

مثال: $T : P \longrightarrow P$ کران دار نیست.

$Tp = p'$

$p_n(t) = \frac{1}{n} t^n$

$Tp_n = t^{n-1} \Rightarrow \dfrac{\|Tp_n\|}{\|p_n\|} = \dfrac{1}{1/n} = n$

قضیه: $T : X \xrightarrow{\text{خطی}} Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر کران دار باشد.

T کران دار است $\overset{?}{\Longrightarrow}$ T پیوسته است $\Longleftrightarrow$ T در $x=0$ پیوسته است

$\Updownarrow$

$\left(\lim_{n\to\infty} Tx_n = 0 \quad x_n \to 0 \text{ هرگاه} \right)$

$\|Tx_n\|_Y \leq c\|x_n\|_X \longrightarrow 0$

T پیوسته است $\Longrightarrow$ T در $x=0$ پیوسته است $\Longrightarrow \left(\exists \delta>0 \ , \ \|x\|_X<\delta \rightarrow \|Tx\|_Y<1\right)$

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|_Y=\sup_{\|y\|=1/r} r\|Ty\|_Y<r$$

$$\|Ty\|_Y<1$$

$$x=ry \qquad 1/r<\delta$$

تکرار: $T: X \xrightarrow{\text{خطی}} Y$ کران دار است هرگاه $\|T\|=\sup_{\|x\|_X=1}\|Tx\|_Y<\infty$

$$\Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \|T\|\cdot\|x\|_X$$

نکته: اگر $\dim X<\infty$ همواره T کران دار است.

توقف:
مجموعه همه توابع خطی $=L(X,Y)$
مجموعه همه توابع خطی کران دار (پیوسته) $=B(X,Y)$

$B \subseteq L$ و L فضای برداری است.

$T, S \in L(X, Y)$

$$(T+S)(x) = Tx + Sx$$

$$(rT)(x) = r \cdot Tx$$

نرم عملگری $\|T\|$ یک نرم روی فضای برداری $B(X,Y)$ است.

$$\|T\| = 0 \iff T = 0$$

$$\|rT\| = |r| \cdot \|T\|$$

$$\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

نکته: اگر T عملگر خطی کران‌دار باشد که وارون‌پذیر است. آیا وارون آن کران‌دار است؟

$$1 = \|T \circ T^{-1}\| \geq \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$$

مثال: $T : A \longrightarrow A$

A مجموعه دنباله‌هایی که از جایی به بعد صفر هستند.

$$T\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right] = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

$$\left\| T\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right] \right\|_{\ell^\infty} = \sup_{1 \leq n} \left|\frac{x_n}{n}\right|$$

$$\leq \sup_{1 \leq n} |x_n| = \|X\|_{\ell^\infty}$$

$$T^{-1}\left[(x_n)_{n=1}^{\infty}\right] = (n x_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$\Longrightarrow \quad \|T\| \leq 1$$

$$T(1, 0, 0, \dots) = (1, 0, 0, \dots)$$

$$\Longrightarrow \quad \|T\| = 1$$

T یک به یک و پوشا است و وارون‌پذیر است. ولی وارون آن پیوسته نیست؟

گزاره: $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ آنگاه (تمرین)

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

$$T : X \longrightarrow Y$$

$$\operatorname{Null} T = T^{-1}(0_Y)$$

قضیه: T پیوسته است $\Longleftarrow$ $\operatorname{Null} T$ بسته است.

سؤال: آیا عکس قضیه بالا درست است؟ خیر مثال: عملگر مشتق.

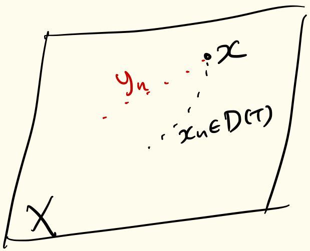
سؤال: آیا عملگری وجود دارد که فضای پوچ آن بسته نباشد؟

توسیع پیوسته عملگرهای خطی

$T: \underbrace{D(T)}_{\text{زیرفضا}} \subseteq X \xrightarrow{\text{خطی}} Y$ کراندار، اگر Y فضای باناخ باشد آنگاه

$\tilde{T}: \overline{D(T)} \longrightarrow Y$ خطی و کراندار وجود دارد که

$$\tilde{T}\Big|_{D(T)} = T$$



$$\tilde{T}x = \lim_{n\to\infty} T x_n = \lim_{n\to\infty} T y_n$$

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\|$$

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|$$

$\longrightarrow$ $\{Tx_n\}$ در Y کوشی است

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه ششم ۹۵/۷/۱۸

تابعک خطی

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ خطی باشد

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(rx) = rf(x) \qquad r \in \mathbb{R}$$

مجموعه همه تابعکهای خطی روی فضای برداری X را با X^* نشان می‌دهیم و به آن فضای دوگان X گفته می‌شود.

$X' =$ فضای تابعکهای خطی که پیوسته نیز هستند.

$0 \in X', X^* \Leftarrow X', X^* \neq \emptyset$ در واقع X^* یک فضای برداری است و X' یک زیرفضای آن.

آیا $X^* \neq \{0\}$ ؟ جواب: بله به شرط آنکه $X \neq \{0\}$. اگر $\{e_i\}_{i\in I}$ یک پایه برای X

باشد،
$$\begin{cases} f(e_1) = 1 \\ f(e_i) = 0 & i \neq 1 \end{cases}$$
و براحتی می‌توان f را به کل X

توسعه داد. به سادگی می‌توان دید که $f \in X^*$.

سؤال: آیا $X' \neq \{0\}$ ؟ جواب: بله. اثبات به کمک لم زیر در صفحه آینده

X' یک فضای نرم دار است در واقع

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} |f(x)|$$

این نرم خوش‌تعریف است زیرا پیوستگی تابع خطی با کران‌داری معادل است.

$$|f(x)| \leq \|f\|_{X'} \cdot \|x\|_X$$

مثال: $X = C[a,b]$ با نرم سوپریمم.

$$f(u) = \int_a^b u(t)\,dt \in X'$$

$$|f(u)| \leq \int_a^b |u(t)|\,dt \leq \int_a^b \|u\|_\infty\,dt = (b-a)\cdot\|u\|_\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \|f\| \leq b-a \\ u \equiv 1 \Rightarrow \quad f(u) = b-a \end{array}\right\} \Rightarrow \|f\| = b-a$$

$$f(u) = u(t_0) \quad , \quad X = C[a,b] \; : \text{مثال}$$

$$|f(u)| = |u(t_0)| \leq \|u\|_\infty \Rightarrow \|f\|_{X'} \leq 1$$

$$u \equiv 1 \Rightarrow \|f\|_{X'} = 1$$

$$\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in X = \ell^2 \; : \text{مثال}$$

$$\langle f, x \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

$$x \to (x_i)_{i=1}^{\infty}$$

$$|\langle f, x \rangle| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2\right)^{1/2}}_{\|\alpha\|_{\ell^2}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}}_{\|x\|_{\ell^2}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{X'} \leq \|\alpha\|_{\ell^2}$$

$$\langle f, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = \|\alpha\|_{\ell^2}^2$$

$$\Rightarrow \|f\|_{X'} = \|\alpha\|_{\ell^2}$$

$$X \longrightarrow X' \text{ یا } X^* \longrightarrow X'', X^{**}$$

$\downarrow$

فضای دوگان X' و X^*.

$$f \in X'' \Longrightarrow f : X' \xrightarrow[\text{پیوسته}]{\text{تابعک خطی}} \mathbb{R}$$

$$\|f\|_{X''} = \sup_{X' \ni u \neq 0} \frac{\langle f, u\rangle}{\|u\|_{X'}}$$

نگاشت دوگانی:

$$i : X \longrightarrow X''$$

$$x \in X \quad , \quad i(x) : X' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle i(x), u \rangle := \langle u, x \rangle$$

① چرا $i(x) \in X''$ ؟ توقف کران‌دار (پیوستگی) $\left|\langle i(x), u\rangle\right| \le C \|u\|_{X'}$ ؟

$$\left|\langle i(x), u\rangle\right| = \left|\langle u, x\rangle\right| \le \|u\|_{X'} \cdot \|x\|_X$$

$$\Rightarrow \quad \|i(x)\|_{X''} \leq \|x\|_X$$

$$\|x\|_X = \sup_{X' \ni u \neq 0} \frac{|\langle u, x\rangle|}{\|u\|_{X'}} \longrightarrow$$ اثبات ـ جلسه آینده

$$\Rightarrow \quad \|i(x)\|_{X''} = \|x\|_X$$

② i یک عملگر خطی است.

$$\langle i(x+y), u\rangle = \langle u, x+y\rangle$$
$$= \langle u, x\rangle + \langle u, y\rangle$$
$$= \langle i(x), u\rangle + \langle i(y), u\rangle$$
$$= \langle i(x) + i(y), u\rangle$$

$$i(x+y) = i(x) + i(y)$$

③ i یک به یک است. اگر $i(x)=0$ آنگاه $\|x\|_X = \|i(x)\|_{X''}$

$$\Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad Nul(i) = \{0\}$$

④ آیا i پوشا است؟ جواب: خیر.

تعریف: اگر برای فضای برداری نرم‌دار X عملگر دوگانی پوشا باشد، آنگاه X را یک فضای بازتابی می‌نامیم.

مثال: X فضای برداری بعدمتناهی باشد.

$$X = Span\langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

$$X^* = X' = Span\langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle$$

پایهٔ دوگان

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

i پوشا است: $X \longrightarrow X''$

بعد n — بعد n

مثال: $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$

$\left(\|Tx\|_Y = \|x\|_X \right.$ وجود دارد که $T: X \to Y$ یعنی نگاشت خطی وارون‌پذیر $\left. X \cong Y \right)$

$$T: \ell^\infty \longrightarrow (\ell^1)'$$

$$c = (c_i)_{i=1}^\infty \in \ell^\infty, \quad T(c): \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell^1 \quad \langle T(c), x \rangle = \sum_{i=1}^\infty c_i x_i$$

$T(c)$ تابعک خطی پیوسته است.

$$\left| \langle T(c), x \rangle \right| \leq \left| \sum_{i=1}^\infty c_i x_i \right| \leq \|c\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^\infty |x_i|$$

$$= \|c\|_\infty \cdot \|x\|_{\ell^1}$$

$$\Rightarrow T(c) \in (\ell^1)', \quad \|T(c)\|_{(\ell^1)'} \leq \|c\|_\infty$$

$$x_n = (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots) \quad , \quad \|x_n\|_{\ell^1} = 1$$

nام

$$\langle T(c), x_n\rangle = c_n \quad , \quad \sup_n \frac{|\langle T(c), x_n\rangle|}{\|x_n\|_{\ell^1}} = \sup |c_n| = \|c\|_\infty \le \|T(c)\|_{(\ell^1)'}$$

$$\Longrightarrow \|T(c)\|_{(\ell^1)'} = \|c\|_\infty$$

چرا T پوشا است؟ $f \in (\ell^1)'$ درنظر بگیریم.

$$c_n := \langle f, x_n\rangle$$

$$|c_n| = |\langle f, x_n\rangle| \le \|f\|_{(\ell^1)'} \cdot \|x_n\|_{\ell^1} = \|f\|_{(\ell^1)'}$$

$$\Longrightarrow c = (c_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$$

ادعا: $T(c) = f$

به وضوح این تساوی روی زیرمجموعه همه دنباله‌هایی که از یکجا به بعد صفر هستند درست است. از طرفی این مجموعه در ℓ^1

چگال است. در واقع $T(c)$ و f دو تابعک خطی پیوسته روی ℓ^1 هستند که در یک زیرمجموعه چگال

برابرند. در نتیجه $f = T(c)$ روی کل ℓ^1.

مثال: $(\ell^p)' \cong \ell^q$ که $1 < p < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$T^p_q : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)'$$

$$c = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^q \ , \quad T(c) : \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle T(c), x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

تمرین - به کمک نامساوی هولدر نشان دهید T خوش‌تعریف است و ایزومتری.

$$\| T(c) \|_{(\ell^p)'} = \| c \|_{\ell^q}$$

نکته: بنابر مثال قبل $(\ell^q)' \cong \ell^p \Longrightarrow (\ell^p)'' \cong \ell^p$

ولی این مطلب دلیل اینکه ℓ^p بازتابی باشد نمی‌شود. چون تعریف بازتابی این است که عملگر دوگانی

$$i : X \longrightarrow X''$$

پوشا باشد. در واقع مثالی وجود دارد که X بازتابی نیست ولی $X \cong X''$. (کتاب برزیس)

سؤال: چرا ℓ^p بازتابی است؟

$$T_q^p : \ell^q \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{ایزومتری}} (\ell^p)'$$

$$T_p^q : \ell^p \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{ایزومتری}} (\ell^q)'$$

$$i : \ell^p \xrightarrow{\text{ایزومتری}} (\ell^p)''$$

$$\langle i(x), u \rangle = \langle u, x \rangle$$

$$T^{p}_{q} : \ell^{q} \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{ایزومتری}} (\ell^{p})'$$

$$T^{q}_{p} : \ell^{p} \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{ایزومتری}} (\ell^{q})'$$

$$i : \ell^{p} \xrightarrow{\text{ایزومتری}} (\ell^{p})''$$

$$\langle i(x), u \rangle = \langle u, x \rangle$$

$$u \in (\ell^{p})'$$

$$u = T^{p}_{q} y, \quad \langle u, x \rangle = \sum y_i x_i$$

$$\langle i(x), T^{p}_{q} y \rangle = \langle T^{p}_{q} y, x \rangle$$

$$= \sum y_i x_i$$

$$= \langle T^{q}_{p} x, y \rangle$$

$$= \langle f \circ T^{p}_{q}, y \rangle$$

دلخواه $f \in (\ell^{p})''$, $f : (\ell^{p})' \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$

$$f \circ T^{p}_{q} \in (\ell^{q})' \Leftarrow f \circ T^{p}_{q} : \ell^{q} \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists x \in \ell^{p} : T^{q}_{p}(x) = f \circ T^{p}_{q} \Longrightarrow$$

ادعا: $i(x) = f$

$$\langle i(x), u \rangle = \langle u, x \rangle$$

$$T_\infty^1 : \ell^\infty \xrightarrow[\text{ایزومتری}]{\text{پوشا}} (\ell^1)'$$

$$T_1^\infty : \ell^1 \xrightarrow{\text{ایزومتری}} (\ell^\infty)'$$

$$\langle T_1^\infty(c), x \rangle = \sum c_i x_i$$

$$\leq \|c\|_{\ell^1} \cdot \|x\|_\infty$$

T_1^∞ پوشا نیست.

$$(\ell^1)' \cong \ell^\infty$$

$$(\ell^\infty)' \supsetneq \ell^1$$

تمرین: ℓ^1 و ℓ^∞ بازتابی نیستند.

$f \in (\ell^\infty)'$, $\langle f, e_n \rangle = c_n$

$|c_n| \leq \|f\| \cdot \|e_n\|_\infty = \|f\|_{(\ell^\infty)'}$

$\langle f, x \rangle = \langle f, \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \rangle = \sum x_n \langle f, e_n \rangle = \sum c_n x_n$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه هفتم ۹۵/۷/۲۵

قضیه هان ـ باناخ

<u>لم زرن</u>: یک مجموعه جزئی مرتب که هر زنجیره آن کران پایین (بالا) داشته باشد، آنگاه عضو مینیمال (ماکسیمال) دارد.

<u>تابعک زیرخطی</u>: $p: X \longrightarrow \mathbb{R}$ زیرخطی است هرگاه

(۱) زیرجمعی $\quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(۲) $\quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall \alpha \geq 0$

مثال. $p(x) = \|x\|$ یک تابعک زیرخطی است.

<u>قضیه هان ـ باناخ</u>: X فضای برداری حقیقی است و p یک تابعک زیرخطی روی X است.
به علاوه فرض کنید f یک تابعک خطی باشد که روی زیرفضای Z از X تعریف شده است و

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Z$$

آنگاه یک توسیع خطی f مانند $\tilde{f}$ به کل X وجود دارد که

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

اثبات: $E = \{ g : D(g) \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ g(x) \leq p(x)$ و g توسیع خطی f است $\}$

$$g_1 \leq g_2 \iff D(g_1) \subseteq D(g_2) \ , \ g_2\big|_{D(g_1)} = g_1$$

هر زنجیری مانند $\{g_i\}_{i\in I}$ یک کران بالا دارد که برابر است با: $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$D(g) = \bigcup_{i\in I} D(g_i) \ , \ g\big|_{D(g_i)} = g_i$$

بنابر لم زرن این مجموعه یک عضو ماکسیمال دارد مانند $\tilde{f}$. ادعا می‌کنیم که $D(\tilde{f}) = X$.

فرض کنید $0 \neq y_1 \in X - D(\tilde{f})$ ، $Y_1 = \mathrm{Span}\big(D(\tilde{f}) \cup \{y_1\}\big)$

$\tilde{f}$ را به Y_1 توسیع می‌دهیم تنها کافی است مسئله $c = \tilde{f}(y_1)$ به گونه‌ای

تعیین شود که رابطه $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ حفظ شود.

$$x = y + \alpha y_1 \Rightarrow \tilde{f}(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \overset{?}{\leq} p(y + \alpha y_1)$$

$$\alpha c \leq p(y+\alpha y_1) - \tilde{f}(y) \qquad \forall y \in D(\tilde{f}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

اگر $\alpha>0$،

$$c \leq \frac{1}{\alpha}\left[p(y+\alpha y_1) - \tilde{f}(y)\right]$$

$$= p\left(y/\alpha + y_1\right) - \tilde{f}\left(y/\alpha\right)$$

کافیست

$$* \qquad c \leq \inf_{y\in D(\tilde{f})}\left[p(y+y_1) - \tilde{f}(y)\right]$$

اگر $\alpha<0$،

$$c \geq \frac{1}{\alpha}\left[p(y+\alpha y_1) - \tilde{f}(y)\right]$$

$$= -p\left(-y/\alpha - y_1\right) + \tilde{f}\left(-y/\alpha\right)$$

$$* \qquad c \geq \sup_{y\in D(\tilde{f})}\left[-p(y-y_1) + \tilde{f}(y)\right]$$

وجودِ چنین c معادل این است که

$$-p(y-y_1) + \tilde{f}(y) \leq p(z+y_1) - \tilde{f}(z)$$

$$\tilde{f}(y+z) \leq p(z+y_1) + p(y-y_1) \quad ✓$$

نتایج قضیه هان-باناخ :

۱) $X' \neq \{0\}$ ، $0 \neq e \in X$ دلخواه درنظر بگیریم و $Z = \langle e \rangle$ ، $f(te) = t$

$f : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابعک خطی که در رابطه $f(x) \leq p(x) = c\|x\|$ که $c = \frac{1}{\|e\|}$ صدق می‌کند.

بنابراین $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که $|\tilde{f}(x)| \leq c\|x\|$. بنابراین $\tilde{f}$ پیوسته است.

$$\tilde{f}(e) = f(e) = 1 \implies \tilde{f} \neq 0$$

۲) اگر f یک تابعک خطی پیوسته روی زیرفضای Z از X باشد، آنگاه یک توسیع آن به X مانند $\tilde{f}$ وجود دارد که

$$\|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{Z'}$$

$$f : Z \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ |f(x)| \leq \|f\|_{Z'} \|x\| = p(x)$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ |\tilde{f}(x)| \leq p(x) \implies \|\tilde{f}\|_{X'} \leq \|f\|_{Z'}$$

$$\|\tilde{f}\|_{X'} = \sup_{x \in X} |\tilde{f}(x)| \geq \sup_{x \in Z} |\tilde{f}(x)| = \|f\|_{Z'}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{f}(x) \le C\|x\| \\ \tilde{f}(-x) \le C\|x\|\end{array}\right\} \Longrightarrow |\tilde{f}(x)| \le C\|x\|$$

<u>سؤال:</u>

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{f}(x) \le p(x) \\ \tilde{f}(-x) \le p(-x)\end{array}\right. \not\Longrightarrow |\tilde{f}(x)| \le p(x)$$

۳) X فضای نرم‌دار و $x_0 \neq 0$ آنگاه تابعک خطی پیوسته وجود دارد که $f(x_0) = \|x_0\|$ و $\|f\| = 1$.

۴)

$$\|x\|_X = \sup_{0\neq f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{X'}}$$

$$|f(x)| \le \|f\|_{X'} \cdot \|x\|_X \Rightarrow \sup \frac{|f(x)|}{\|f\|_{X'}} \le \|x\|_X$$

برعکس نامساوی از نتیجه ۳ به دست می‌آید.

۵ اگر $\langle f, x\rangle = 0$ برای هر $f \in X'$ آنگاه $x = 0$.

(از ۳ نتیجه می‌شود)

۶ تمرین: Z زیرفضای X است و $x_0 \in X \setminus Z$ که $0 < dist(x_0, Z)$ آنگاه $f \in X'$ وجود دارد که

$$f(x_0) = dist(x_0, Z) \quad , \quad \|f\|_{X'} = 1 \quad , \quad f\big|_Z = 0$$

تعریف: $A \subseteq X$ زیرمجموعه باشد، زیرفضای $A^\perp \subseteq X'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A^\perp = \{ f \in X' : \langle f, x\rangle = 0 \ \forall x \in A \}$$

اگر $E \subseteq X'$ زیرمجموعه، زیرفضای $E^\perp \subseteq X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E^\perp = \{ x \in X : \langle f, x\rangle = 0 \ \forall f \in E \}$$

۷ گزاره: $(A^\perp)^\perp = \overline{Span\, A}$ $\quad A \subseteq X$

$$E^{\perp} = \bigcap_{f \in E} \mathrm{Nul}(f) \longrightarrow$$ زیرفضای بسته

سؤال: آیا $A^{\perp}$ بسته است؟

$$A^{\perp} = \bigcap_{x \in A} \mathrm{Nul}(i(x))$$ که $i: X \longrightarrow X''$ نشاندن طبیعی است

$$f_n \longrightarrow f \Rightarrow \|f_n - f\|_{X'} \longrightarrow 0$$

اثبات گزاره

$$(A^{\perp})^{\perp} = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in A^{\perp}\} \supseteq A$$

$$A^{\perp} = \{f \in X' : f|_A = 0\}$$

چون $(A^{\perp})^{\perp}$ زیرفضای بسته است پس $(A^{\perp})^{\perp} \supseteq \overline{\mathrm{Span}\, A}$.

$$x_0 \in (A^{\perp})^{\perp} \setminus \overline{\mathrm{Span}\, A} \Rightarrow \mathrm{dist}(x_0, \overline{\mathrm{Span}\, A}) > 0$$

$$\Rightarrow \exists f : f(x_0) \neq 0,\ f|_{\overline{\mathrm{Span} A}} = 0 \Rightarrow f \in A^{\perp}$$

۸) $\text{Span}A$ در X چگال است $\Longleftrightarrow$ $A^{\perp}=\{0\}$.

اثبات: $(A^{\perp})^{\perp}=\overline{\text{Span}A}=X \Longrightarrow A^{\perp}=\{0\}$

قضیه هان-باناخ (صورت مختلط). X فضای برداری حقیقی یا مختلط، p یک تابعک زیرخطی حقیقی که

$$p(x+y)\le p(x)+p(y)\ ,\quad p(\alpha x)=|\alpha|\cdot p(x)$$

f یک تابعک خطی که روی زیرفضای Z از X تعریف شده است و

$$|f(x)|\le p(x)\quad \forall x\in Z$$

در این صورت توسیع $\tilde f$ به کل فضای X وجود دارد که

$$|\tilde f(x)|\le p(x)\quad \forall x\in X$$

اثبات - اگر X فضای برداری حقیقی باشد، نسخه قبلی هان-باناخ اثبات می‌کند که $\tilde f$ وجود دارد که

$$\tilde f(x)\le p(x) \Longrightarrow \tilde f(-x)\le p(-x)=p(x)$$

$$\Longrightarrow |\tilde f(x)|\le p(x)$$

اگر X فضای برداری مختلط باشد. $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ که f_1 و f_2 دو تابعک حقیقی هستند روی فضای X به عنوان یک فضای برداری حقیقی. داریم:

$$|f_1(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$$

$$if(x) = f(ix) \Longrightarrow i f_1(x) - f_2(x) = f_1(ix) + i f_2(ix)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f_1(ix) = -f_2(x) \\ f_1(x) = f_2(ix) \end{cases}$$

بنابر نسخه حقیقی قضیه هان-باناخ تابعک خطی حقیقی $\tilde{f}_1$ وجود دارد به طوری که $\tilde{f}_1(x) \leq p(x)$

تعریف کنید:

$$\tilde{f}(x) := \tilde{f}_1(x) - i \tilde{f}_1(ix)$$

آنگاه ① $\tilde{f}$ تابعک خطی نسبت به میدان مختلط است.

② $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)| e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(e^{-i\theta} x) = |\tilde{f}(x)| = \tilde{f}_1(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x)$$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه هشتم ۹۵/۷/۲۷

جواب سؤال جلسه قبل :

$$T_1^\infty : l^1 \longrightarrow (l^\infty)'$$

$$\langle T_1^\infty(c), x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$$

نشان دهید T_1^∞ پوشا نیست.

$$Z \subseteq l^\infty$$

همه دنباله‌هایی که همگرا هستند.

$$T : Z \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

به وضوح T خطی و پیوسته است.

$$|\lim x_n| = |T(x)| \leq C \|x\|_\infty = C \sup_n |x_n|$$

به ازای $C=1$ برقرار است.

بنابر هان-باناخ T یک توسیع به کل l^∞ دارد. اگر $T = T_1^\infty(c)$ به ازای یک $c \in l^1$، آنگاه

$$0 = \langle T, e_n \rangle = \langle T_1^\infty(c), e_n \rangle = \sum c_i e_n^i = c_n$$

ضرب داخلی: اگر X فضای برداری باشد، تابع $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \underset{\mathbb{C}}{\overset{\mathbb{R}}{}}$ یا ضرب داخلی گوییم هرگاه:

1) $\langle x+y , z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

2) $\langle \alpha x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle$

3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

4) $\langle x, x \rangle \geq 0$

5) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

نرم القایی از ضرب داخلی:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

نامساوی مثلث:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\sqrt{\langle x+y , x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\langle x+y, x+y \rangle \leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \leq 2 \|x\| \cdot \|y\|$$

نامساوی کوشی شوارتز

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \le |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$$

شرط تساوی: نامساوی بالا به تساوی تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر $\{x,y\}$ وابسته خطی باشند.

$$0 \le \|x-\alpha y\|^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \|x\|^2 - \langle x,\alpha y\rangle - \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha y,\alpha y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + |\alpha|^2\|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$

برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ داریم:

$$0 \le \alpha^2\cdot\|y\|^2 - 2(\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)\alpha + \|x\|^2$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Re}\langle x,y\rangle|^2 - \|y\|^2\cdot\|x\|^2 \le 0 \longrightarrow$$ نامساوی کوشی شوارتز

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\langle x,y\rangle \le \|x\|\cdot\|y\|$$

$$\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| e^{i\theta}$$

$$\langle e^{-i\theta}x, y\rangle = |\langle x,y\rangle| \xRightarrow{\text{بنا بر نتیجه بالا}} |\langle x,y\rangle| \le \|e^{-i\theta}x\|\cdot\|y\| = \|x\|\cdot\|y\|$$

مثال: $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$

$$X=(x_1,\dots,x_n)$$
$$Y=(y_1,\dots,y_n)$$
$$\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$$

مثال - ℓ^2

$$X=(x_1,x_2,\dots) \qquad \sum|x_i|^2<\infty$$
$$Y=(y_1,y_2,\dots) \qquad \sum|y_i|^2<\infty$$
$$X\cdot Y=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i}\le\left(\sum x_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum y_i^2\right)^{1/2}<\infty$$

سؤال: آیا ℓ^p فضای ضرب داخلی است؟

سؤال: آیا هر نرمی روی یک فضای برداری نرم‌دار از ضرب داخلی می‌آید.

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$$
$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$$
$$\Rightarrow \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

قاعده متوازی‌الاضلاع

$$x=e_1,\ y=e_2 \Rightarrow \|e_1+e_2\|_p=2^{1/p}=\|e_1-e_2\|_p$$
$$\|e_1\|_p=\|e_2\|_p=1$$
$$\Rightarrow 2\times 2^{2/p}=4$$
$$\Rightarrow p=2$$

قضیه: شرط لازم و کافی برای اینکه یک نرم از یک ضرب داخلی به دست آمده باشد رابطه زیر است:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

اثبات: (برعکس) میدان حقیقی.

$$\langle x,y\rangle := \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

واضح است که اگر تعریف بالا یک ضرب داخلی باشد، نرم القایی از آن همان نرم قبلی است.

5) $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4) $\|x\| = \langle x,x\rangle \geq 0$

3) $$\langle y,x\rangle = \frac{\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2}{4} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \langle x,y\rangle$$

2) $$\langle \alpha x,y\rangle = \frac{\|\alpha x+y\|^2 - \|\alpha x-y\|^2}{4} = \alpha\,\frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}\ ?$$

1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \overset{?}{=} \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 \qquad (*)$$

رابطه متوازی الاضلاع $\quad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$

$$\|x+y+z\|^2 + \|x+z-y\|^2 = 2\left(\|x+z\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad u=x+z,\ v=y$$

$$\|x+y-z\|^2 + \|x-y+z\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y-z\|^2\right) \qquad u=x,\ v=y-z$$

$$2\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right) = 2\left(\|x+z\|^2 - \|y-z\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2\right)$$
$$+2\left(\|y+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

تمرین: قضیه قبل را برای میدان‌های مختلط اثبات کنید.

اثبات 2)

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$$

$$1) \Rightarrow \quad \langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$$

رابطه 2) برای $\alpha \in \mathbb{N}$ برقرار است.

از طرفی بنابر 1) داریم:

$$0 = \langle 0, y\rangle = \langle x-x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$$

بنابراین 2) برای $\alpha \in \mathbb{Z}$ درست است.

$$\alpha = \frac{m}{n} \Rightarrow \left\langle \frac{m}{n}x, y\right\rangle = \left\langle m\frac{x}{n}, y\right\rangle$$

$$= m\left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle$$

$$1) \Rightarrow \Big\langle \underbrace{\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}}_{n \text{ مرتبه}}, y\Big\rangle = n\left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle$$

$\Longrightarrow$ 2) برای $\alpha \in \mathbb{Q}$ درست است. $\Longrightarrow$ بنابر پیوستگی برای $\alpha \in \mathbb{R}$ درست است.

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه نهم ۹۵/۸/۲

فضای هیلبرت.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\|x\| = \left[\langle x, x \rangle\right]^{1/2}$$

گزاره: ضرب داخلی نسبت به توپولوژی القایی از نرم بالا پیوسته است.

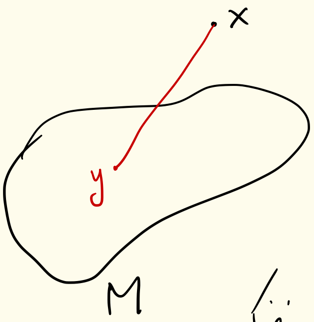
$$\left.\begin{array}{l} \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \\ \|y_n - y\| \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle x_n , y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x_n \pm y_n \longrightarrow x \pm y$$

فضای هیلبرت: فضای برداری ضرب داخلی، که نسبت به نرم القایی یک فضای تام باشد.

مثال: l^2



$$dist(x, M) = \inf_{y \in M} \|x-y\|$$

$y_n \in M$, $\|x-y_n\| \longrightarrow dist$

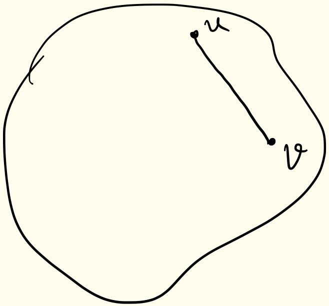
$$\left.\begin{array}{l}\text{اگر } M \text{ فشرده باشد می‌توان فرض کرد} \\ y_n \longrightarrow y\end{array}\right\} \Longrightarrow dist = \|x-y\|$$

قضیه: اگر H فضای هیلبرت باشد و M زیرمجموعه بسته و محدب آنگاه برای هر $x \in H$ بردار یکتای $y \in M$ وجود دارد که

$$\|x-y\| = dist(x, M)$$

تعریف: مجموعه M محدب است هرگاه برای هر $u,v\in M$ و $t\in[0,1]$ داشته باشیم

$$tu+(1-t)v\in M$$



اثبات قضیه: $\exists y_n\in M$ sth. $\|x-y_n\|\longrightarrow dist$

ادعا: $\{y_n\}$ یک دنباله کوشی است.

$$\|y_n-y_m\|^2=\|(x-y_m)-(x-y_n)\|^2$$

$$=2\left(\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2\right)-\|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2$$

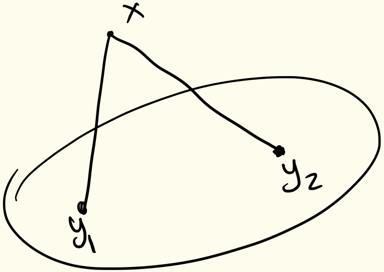
$$=2(\cdots\cdots)-4\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2(\cdots\cdots)-4(dist)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{m,n\to\infty}\|y_n-y_m\|^2=0$$

از نتیجه $y_n\to y$ و چون M بسته است $y\in M$ و $\|x-y\|=dist$.

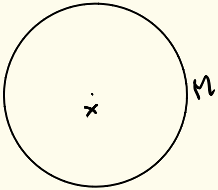
اثبات یکتایی :   قاعده متوازی الاضلاع



$$\underbrace{\|(x-y_1)+(x-y_2)\|^2}_{\substack{=4\|x-\frac{y_1+y_2}{2}\|^2 \\ \geq 4(dist)^2}} + \|y_1-y_2\|^2 = 2\Big(\underbrace{\|x-y_1\|^2+\|x-y_2\|^2}_{2(dist)^2}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \|y_1-y_2\|^2 \leq 4(dist)^2 - 4(dist)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_2 .$$



سؤال: آیا شرط تحدب ضروری است؟

مثال: شرط بسته بودن ضروری است. یک مجموعه محدب که یک نقطه از آن حذف شده است.

مثال: شرط فضای هیلبرت ضروری است.

$M \subseteq \ell^\infty$ همه دنباله‌های همگرا به صفر. $x=(1,1,1,\dots)$

$$\operatorname{dist}(x, M) = 1$$

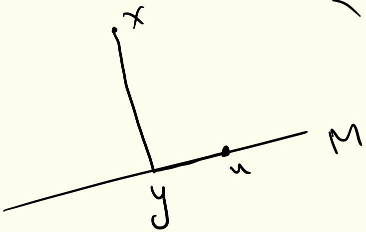
زیرا برای هر $y \in M$ که $(y_n)_{n=1}^{\infty} = y$ که $\lim y_n = 0$

$$\|x-y\|_\infty = \sup_n |x_n - y_n| = \sup_n |1-y_n| \geq 0$$

شرط یکتایی قضیه برقرار نیست.

لم: در قضیه قبل اگر M زیرفضای بسته باشد، آنگاه $z = x-y$ بر M عمود است یعنی برای هر $u \in M$ داریم:

$$\langle x-y, u \rangle = 0$$



اثبات:

$$\langle x-y, u \rangle \neq 0$$

$$\|x-(y+\alpha u)\|^2 \leq \|x-y\|^2$$

$$= \|x-y\|^2 + 2\alpha \langle x-y, u \rangle + \alpha^2 \|u\|^2 \leq \|x-y\|^2$$

$$\alpha^2 \|u\|^2 \leq 2\alpha \langle y-x, u \rangle$$

$$\alpha = \frac{2\langle y-x, u \rangle}{\|u\|} \neq 0 \xRightarrow{\text{یکتایی قضیه}} y + \alpha u = y$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

تعریف: اگر Y زیرفضای بسته در فضای هیلبرت H. آنگاه $Y^{\perp}$ را مکمل عمود Y تعریف می‌کنیم به صورت زیر:

$$Y^{\perp} = \{ z \in H : z \perp Y \}$$

اگر X و Y دو زیرفضای H باشند، Z را جمع مستقیم این دو زیرفضا گوییم، $Z = X \oplus Y$، هرگاه

$$\forall z \in Z \quad \exists!\ x \in X,\ y \in Y \ \text{sth.} \quad z = x + y$$

قضیه: اگر Y زیرفضای بسته فضای هیلبرت H باشد، آنگاه

$$Y^{\perp} \oplus Y = H.$$

اثبات: $x \in H \Rightarrow \exists\, y \in Y \ \text{sth.} \ \|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$,

$$x - y \perp Y$$

$$\Rightarrow x - y \in Y^{\perp} \Rightarrow x = y + (x - y) \in Y \oplus Y^{\perp}$$

یکتایی نمایش : $\quad y_i \in Y,\ z_i \in Y^{\perp}$

$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in Y \cap Y^{\perp}$$

$$\Rightarrow 0 = \langle y_1 - y_2, z_2 - z_1 \rangle = \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_2 \Rightarrow z_1 = z_2 .$$

مثال : شرط بسته بودن زیرفضای H ضروری است. اگر Y یک زیرفضای چگال H باشد، یعنی $\overline{Y} = H$ ، $Y \neq H$.

$$\Rightarrow \quad Y^{\perp} = \{0\}$$

زیرا اگر $x \in Y^{\perp}$ ،

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in H$$

$$\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

تعریف: اگر H فضای هیلبرت و Y زیرفضای بسته آن باشد، عملگر خطی $P : H \longrightarrow Y$ را عملگر تصویر گوییم که برای هر $x \in H$ ، $y = Px \in Y$ برداری است که کمترین فاصله را تا x می دهد.

$$\|x - Px\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$$

$$x - Px \perp Y \Rightarrow \alpha x - \alpha Px \perp Y$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} P(\alpha x) = \alpha Px \quad \checkmark$$

$$P(x+y) = P(x) + P(y)$$

$$\begin{array}{l} x - P(x) \perp Y \\ y - P(y) \perp Y \end{array} \Rightarrow (x+y) - (P(x) + P(y)) \perp Y$$

ادعا: عملگر تصویر کران دار است. (پیوسته است.)

$$x = Px + (x - Px) \Rightarrow \|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$$

$$\geq \|Px\|^2$$

$$\Rightarrow \|Px\| \leq \|x\|$$

$$\Rightarrow \quad \|P\| \leq 1$$

و وقتی $Y \neq \{0\}$ ، داریم $\|P\| = 1$ زیرا $Px = x$ برای $x \in Y$.

خواص عملگر تصویر: $P: H \longrightarrow Y$ عملگر خطی کران دار

۱) پوشا است .

۲) $P|_Y = id$

۳) $Nul\, P = Y^\perp$. $\quad (Px = 0 \Leftrightarrow x \perp Y \Leftrightarrow x \in Y^\perp)$

۴) $P^2 = P$.

تعریف: اگر M زیرمجموعه دلخواه در فضای ضرب داخلی X باشد،

$$M^{\perp} = \{x \in X : \langle x , y \rangle = 0 \quad \forall y \in M\}$$

$M^{\perp}$ زیرفضای بسته X است.

$M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$.

گزاره: اگر Y زیرفضای بسته از فضای هیلبرت H باشد آنگاه $Y^{\perp\perp} = Y$.

$$\left\{\begin{array}{l} Y \oplus Y^{\perp} = H \\ Y^{\perp} \oplus Y^{\perp\perp} = H \\ Y \subseteq Y^{\perp\perp} \end{array}\right. \Rightarrow Y = Y^{\perp\perp}$$

سؤال: آیا شرط تام بودن فضای H ضروری است؟

گزاره: اگر $M \neq \emptyset$ زیرمجموعه فضای هیلبرت H باشد آنگاه $M^{\perp} = \{0\}$ اگر و تنها اگر $H = \overline{\operatorname{Span} M}$.

$$M^{\perp} = (\operatorname{Span} M)^{\perp} = \left(\overline{\operatorname{Span} M}\right)^{\perp}$$

$$\overline{\operatorname{Span} M} \oplus \left(\overline{\operatorname{Span} M}\right)^{\perp} = H$$

سؤال: آیا شرط هیلبرت ضروری است؟

آنالیز ریاضی مقدماتی

جلسه دهم ۹۵/۸/۴

تمرین سری دوم :

ص ۵۷ ۱۴

ص ۶۵ ۱۱ ، ۱۲

ص ۷۰ ۲ ، ۳، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۵

ص ۸۲ ۴

ص ۱۰۱ ۷

ص ۱۱۰ ۶ ، ۱۴

ص ۱۲۶ ۸

تحویل ۹۵/۸/۱۶

تعریف: اگر X فضای ضرب داخلی باشد و $A \subseteq X$ زیرمجموعه، A را متعامد گوییم هرگاه برای هر $u, v \in A$ داشته باشیم $\langle u, v \rangle = 0$ اگر $u \neq v$

قضیه فیثاغورس: اگر $\langle u, v \rangle = 0$ آنگاه $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

اگر $\{x_1, \dots, x_n\}$ یک مجموعه متعامد باشد، آنگاه $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$

گزاره: هر مجموعه متعامد از بردارهای ناصفر، مستقل خطی است.

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$$

$$\to 0 = \langle \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n , u_i \rangle = \alpha_1 \langle u_1, u_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_n, u_i \rangle$$

$$= \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0$$

تعریف: زیرمجموعه A از X را متعامد یکه گوییم هرگاه A یک مجموعه متعامد باشد و طول هر بردار در A برابر یک باشد به عبارتی برای هر $u,v\in A$ داریم:

$$\langle u,v\rangle=\begin{cases}0 & u\neq v\\ 1 & u=v\end{cases}$$

مثال: در l^2 مجموعه بردارهای $e_n=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ n\text{-ام}}}{1},0,\dots)$ یک مجموعه متعامد یکه است.

مثال - $X=C[0,1]$ ، $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

$\{e^{2\pi int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه است.

$$\langle e^{2\pi int},e^{2\pi imt}\rangle=\int_0^1 e^{2\pi int}\cdot e^{-2\pi imt}\,dt$$

$$=\int_0^1 e^{2\pi i(n-m)t}\,dt=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$$

در صورتی که میدان حقیقی باشد $\{\sin(2\pi nt)\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\cos(2\pi nt)\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعه متعامد است. همینطور

$$\int_0^1 \sin(2\pi nt)\sin(2\pi mt)\,dt = \int_0^1 \frac{\cos 2\pi(m-n)t - \cos 2\pi(m+n)t}{2}\,dt$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} & m = n \end{cases}$$

فرض کنید $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله متعامد یکه باشد و $x \in \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_k\}$

$$\Rightarrow \quad x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k \quad \Rightarrow \quad \langle x, e_i \rangle = \alpha_i$$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$$

حال اگر $k = +\infty$ رابطه بالا درست است یعنی اگر $x \in \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \dots\}$

$$\Longrightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$ $\Longrightarrow$ دقت کنید که این مجموع شامل تعداد نامتناهی جمله ناصفر است

سؤال: اگر $x \in \overline{\operatorname{Span}\{e_1, e_2, \dots\}}$ آیا $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ درست است؟

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \stackrel{?}{=} 0$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \Rightarrow \langle y_n, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x - y_n, e_i \rangle = 0 \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\Downarrow$$

$$x - y_n \perp \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \|y_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \\ \|x\|^2 = \|x - y_n\|^2 + \|y_n\|^2 \Leftarrow \langle x - y_n, y_n \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

نامساوی بسل

لم: اگر $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H متعامد یکه باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ همگرا باشد.

اثبات. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ همگرا باشد در نتیجه $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ یک دنباله همگرا در H است فرض کنید $y_n \to y$

$$\Rightarrow \quad \|y_n\| \longrightarrow \|y\|$$

$$\|y_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \longrightarrow \|y\|^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|y\|^2$$

برعکس اگر $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ همگرا باشد ادعا می‌کنیم $\{y_n\}$ یک دنباله کوشی است.

$$n > m \qquad y_n - y_m = \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k e_k$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \sum_{m+1 \leq k \leq n} |\alpha_k|^2 < \varepsilon$$

این رابطه برای m و n به اندازه کافی بزرگ برقرار است.

نتیجه: اگر $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد و $x \in \overline{\operatorname{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$ آنگاه

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$

اثبات- $y_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ بنابر نامساوی بسل و لم قبل دنباله $\{y_n\}$ همگراست. قرار دهید

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \Rightarrow \langle y, e_i \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$$

$$\Rightarrow \langle y-x, e_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow y-x \in \operatorname{Span}\{e_i\}^{\perp}$$

$$\Rightarrow y-x \in \overline{\operatorname{Span}\{e_i\}}^{\perp}$$

از طرفی $y \in \overline{\operatorname{Span}\{e_i\}}$ چون $y_n \in \operatorname{Span}\{e_i\}$.

$$\Rightarrow \langle y-x, y-x \rangle = 0 \Rightarrow y = x.$$

نکته: اگر $H = \overline{\text{Span}\{e_n\}}$ که H یک فضای هیلبرت است برای هر $x \in H$ داریم

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \longrightarrow \text{تساوی پارسوال}$$

تعریف: اگر $\{e_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه باشد که $H = \overline{\text{Span}\{e_n\}}$ آن را یک پایه هیلبرتی گوییم.

در این صورت H جداپذیر است. برعکس اگر H فضای هیلبرت جداپذیر باشد، حتماً یک پایه هیلبرتی دارد. (گرام-اشمیت)

گزاره: اگر H جداپذیر باشد، هر مجموعه متعامد یکه شمارا است.

اثبات- اگر A مجموعه متعامد یکه باشد برای هر $u, v \in A$ داریم $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2$

اگر به مرکز اعضای A گوی به شعاع $\frac{\sqrt{2}}{3}$ در نظر بگیریم این گوی‌ها جدا از هم هستند. و چون H جداپذیر است در این گوی‌ها یک عضو از آن مجموعه چگال و شمارا وجود دارد. در نتیجه تعداد گوی‌ها شمارا است.

قضیه: اگر $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت باشد و $\{e_n\}$ یک دنباله متعامد یکه. آنگاه شرایط زیر هم ارز هستند:

(۱) $\{0\} = \left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)^{\perp}$

(۲) $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$

(۳) برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

(۴) برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.

(۱) $\Longleftrightarrow$ (۲) جلسه قبل

(۲) $\Longrightarrow$ (۳) و (۴) اثبات شد.

(۴) $\Longrightarrow$ (۲) واضح است.

(۳) $\Longrightarrow$ (۱) واضح است.

مثال: در ℓ^2، $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایه هیلبرتی است زیرا اگر $\langle x, e_n\rangle = 0 \quad \forall n \Leftarrow$

$$x=(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$x_n = 0 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow \{e_n\}_{n=1}^{\infty\,\perp} = \{0\}$$

$$\Longrightarrow \overline{\operatorname{Span}\{e_n\}} = \ell^2$$

مثال: $\{e^{2\pi i n t}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ در فضای $C[0,1]$ اگر $f \in \left(\{e^{2\pi i n t}\}_{n=-\infty}^{+\infty}\right)^{\perp}$ آنگاه

$$\langle f, e^{2\pi i n t}\rangle = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i n t}\, dt = 0$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} f \equiv 0$$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه یازدهم ۹۵/۸/۹

$$\{0\} = \left(\operatorname{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)^{\perp} \iff H = \overline{\operatorname{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$$

مثال (سری فوریه) در فضای $C[0,\pi]$ دنباله $e_0 = 1\,,\ e_n = \cos nx \quad n=1,2,3,\dots$

روی این فضا ضرب داخلی $\langle f,g\rangle = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$ قرار دهید و فضای $C[0,\pi]$ را با نرم بدست آمده از این ضرب داخلی تمام کنید. فضای تام جدید را $L^2[0,\pi]$ می‌نامیم. می‌دانیم $C[0,\pi]$ در $L^2[0,\pi]$ چگال است. کافی است نشان دهیم $\operatorname{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,\pi]$ چگال است. در این صورت $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه هیلبرت برای $L^2[0,\pi]$ است.

$f \in C[0,\pi]$ دلخواه در نظر بگیرید $\cos^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ پیوسته و دوسوئی است.

$g(t) = f(\cos^{-1} t) \ : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است.

برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه چندجمله‌ای $p(x)$ وجود دارد که $\|g - p\|_{\infty} < \varepsilon$

$$\hookrightarrow |g(t) - p(t)| < \varepsilon \quad \forall\ t \in [-1,1]$$

$$\hookrightarrow |f(\cos^{-1} t) - p(t)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - p(\cos x)| < \varepsilon \quad 0 \le x \le \pi$$

$$\|f - p\circ\cos\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \|f - p\circ\cos\|_{L^2} = \left[\int_0^\pi |f(x) - p(\cos x)|^2\,dx\right]^{1/2}$$

$$< (\pi\varepsilon^2)^{1/2}$$

در واقع داریم $p(\cos x) \in \operatorname{Span}\{e_n\}_{n=0}^\infty$ کافی است نشان دهیم

$$(\cos x)^m \in \operatorname{Span}\{e_n\}_{n=0}^\infty$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x \in \langle 1, \cos x, \cos 2x\rangle$$

$$\cos 3x = \alpha\cos^3 x + \cdots$$

$$\vdots$$

$$\cos mx = \alpha_m \cos^m x + \cdots$$

مثال- دنباله $\{\sin nx\}_{n=1}^\infty$ یک پایه هیلبرتی در $L^2[0,\pi]$ است.

اثبات-
$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \delta \\ f(x) & \delta \le x \le \pi-\delta \\ 0 & \pi-\delta < x < \pi \end{cases}$$
و داریم $\dfrac{f_\delta(x)}{\sin x} \in L^2[0,\pi]$ زیرا

$$\int_0^\pi \frac{|f_\delta(x)|^2}{|\sin x|^2}\,dx = \int_\delta^{\pi-\delta} \frac{|f(x)|^2}{\sin x} \le \frac{1}{\sin\delta}\|f\|_\infty^2$$

بنابر مطلب قبل $p \in \mathrm{Span}\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ وجود دارد که

$$\left\| \frac{f_\delta(x)}{\sin x} - p(x) \right\|_{L^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \left| \frac{f_\delta(x)}{\sin x} - p(x) \right|^2 dx < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \left| f_\delta(x) - p(x)\sin x \right|^2 dx = \int_0^\pi \left| \frac{f_\delta(x)}{\sin x} - p(x) \right|^2 \cdot \left| \sin x \right|^2 dx$$

$$\leq \int_0^\pi \left| \frac{f_\delta(x)}{\sin x} - p(x) \right|^2 dx < \varepsilon^2$$

$$p \in \mathrm{Span}\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx$$

$$\Rightarrow p(x)\sin x = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin(k+1)x - \sin(k-1)x}{2}$$

$$\in \mathrm{Span}\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \| f_\delta - p(x)\sin x \|_{L^2} < \varepsilon$$

از طرف دیگر:

$$\|f-f_\delta\|_{L^2}^2=\int_0^\pi |f(x)-f_\delta(x)|^2\,dx=\int_0^\delta |f(x)|^2dx+\int_{\pi-\delta}^{\pi}|f(x)|^2\,dx$$

$$\leq \|f\|_\infty^2\times 2\delta$$

$$\Rightarrow \|f-p(x)\sin x\|_{L^2}\leq \varepsilon+\sqrt{2\delta}\,\|f\|_\infty$$

$$H=\overline{\operatorname{span}\{e_n\}} \Longleftrightarrow x=\sum\langle x,e_n\rangle e_n$$

به شرط آنکه $\{e_n\}$ متعامد یکه باشد.

مثال اول $\Leftarrow$ $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ متعامد هستند

$$\int_0^\pi \cos nx\cos mx\,dx$$

$$=\int_0^\pi \frac{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^\pi=0$$

$$\|\cos nx\|_{L^2}^2=\int_0^\pi(\cos nx)^2\,dx=\begin{cases}\pi/2 & n\neq 0\\ \pi & n=0\end{cases}$$

در نتیجه $\left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}_{e_0} , \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx}_{e_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه برای $L^2[0,\pi]$ است. یعنی برای هر $f \in L^2[0,\pi]$ داریم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n(x)$$

$$\langle f, e_n \rangle = \int_0^{\pi} f(x) e_n(x) \, dx$$

در روش دوم: $\left\{ \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx}_{\bar{e}_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه برای $L^2[0,\pi]$ است. اگر $f(x) \equiv 1$ تابع ثابت باشد

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle 1, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n$$

$$\langle 1, \bar{e}_n \rangle = \int_0^{\pi} 1 \cdot \bar{e}_n(x) \, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

این تساوی به معنای همگرایی سری در $L^2[0,\pi]$ است.

مثال: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه در $L^2[-\pi,\pi]$

$$\overline{\operatorname{Span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}} = H \iff \{0\} = \left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)^{\perp}$$

اگر f تابعی باشد که بر این مجموعه عمود باشد باید

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

اگر به جای $f(x)$، $f(-x)$ قرار دهیم روابط بالا برقرار است

$$\int_{0}^{\pi}\left(f(x)+f(-x)\right)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

$$f(x)+f(-x) \in \left(\operatorname{Span}\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}\right)^{\perp} \subseteq L^2[0,\pi]$$

در بازه $[0,\pi]$

$$\Longrightarrow \quad f(x)+f(-x)=0$$

$$\int_0^{\pi}\big(f(x)-f(-x)\big)\sin nx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0$$

به طور مشابه

$$\Longrightarrow \quad f(x)-f(-x)=0$$

$$\Longrightarrow \quad f \equiv 0$$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه دوازدهم ۹۵/۸/۱۱

$\operatorname{Span}\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ در $C[-1,1]$ با نرم سوپریمم چگال است.

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt \longrightarrow \|f\|_{L^2} = \|f\|_2 = \left[\int_{-1}^{1} |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2}$$

متمم‌سازی $C[-1,1]$ با نرم $\|f\|_{L^2}$ فضای $L^2[-1,1]$ می‌نامیم که در آن $C[-1,1]$ چگال است.

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2\,dt \leq \int_{-1}^{1} \left(\|f\|_\infty\right)^2 dt$$

$$= 2\|f\|_\infty^2$$

$f \in C[-1,1]$

$$\Longrightarrow \quad \|f\|_{L^2} \leq \sqrt{2}\,\|f\|_\infty$$

درنتیجه $\operatorname{Span}\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ که همان فضای چند جمله‌ای‌ها است در $L^2[-1,1]$ چگال است.

به روش گرام-اشمیت این پایه را به یک پایه متعامد یکه تبدیل می‌کنیم

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(t)$$

$$f_n(t) = t^n \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|_2}, \quad \|f_0\|_2 = \left[\int_{-1}^{1} 1\, dt\right]^{1/2} = \sqrt{2} \implies e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies P_0(t) \equiv 1$$

$$\tilde{e}_1 = f_1 - \langle f_1, e_0 \rangle e_0, \quad e_1 = \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|_2}$$

$$\tilde{e}_1(t) = t - \left(\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}} dt\right) \frac{1}{\sqrt{2}} = t, \quad \|\tilde{e}_1\|_2 = \left[\int_{-1}^{1} t^2 dt\right]^{1/2} = \sqrt{2/3}$$

$$\implies e_1(t) = \sqrt{3/2}\, t \implies P_1(t) = t$$

$$\tilde{e}_2 = f_2 - \langle f_2, e_0 \rangle e_0 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$$

$$= t^2 - \left(\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{2}} dt\right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{3/2}\, t^3 dt\right) \times \sqrt{3/2}\, t = t^2 - 1/3$$

$$\|\tilde{e}_2\|_2 = \left[\int_{-1}^{1} (t^2 - 1/3)^2 dt\right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} t^4 - 2/3\, t^2 + 1/9\, dt\right]^{1/2}$$

$$= \left[2/5 - 4/9 + 2/9\right] = ?$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

P_n یک چندجمله‌ای درجه n است. که آن چندجمله‌ایهای لژاندر می‌نامیم.

$$\overline{\mathrm{Span}\{P_n\}} = L^2[-1,1]$$

$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعه متعامد است.

$$\|P_n\|_2 = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

ادعا:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]$$

نکته: P_n جوابهای معادله دیفرانسیل $0 = (1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n$ هستند.

اثبات ادعا: $u(t) = t^2-1$ ،

$$u(\pm 1) = 0$$

$$\frac{d^k}{dt^k}(u^n)(\pm 1) = 0 \qquad 0 \le k \le n-1$$

$$\langle q_n, t^m \rangle = 0 \quad 0 \le m \le n-1 \Leftarrow q_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right]$$

$$m=0 \Rightarrow \langle q_n, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} q_n(t)\,dt = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[(t^2-1)^n\right]\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(u^n)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle q_n , t \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n}(u^n) \cdot t \, dt = \underbrace{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(u^n)}_{=0} \cdot t \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(u^n) dt$$

$$= - \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} u^n \Big|_{-1}^{1} = 0$$

بطور مشابه می‌توان دید که $\langle q_n , t^m \rangle = 0$ برای $m = 0, 1, \dots, n-1$

از طرف دیگر q_n یک چندجمله‌ای درجه n است که

$$q_n \perp \operatorname{Span}\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$$

$$\Rightarrow \quad q_n \parallel e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$$

$$\Rightarrow \quad q_n(t) = \alpha P_n(t)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \, \| q_n \|_2$$

$$\|q_n\|_2^2 = \int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n}{dt^n}(u^n)\right]^2 dt$$

$$= \cancel{\underbrace{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(u^n)}_{=0} \cdot \frac{d^n}{dt^n}(u^n)\Big|_{-1}^{1}} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}(u^n)}{dt^{n-1}} \cdot \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(u^n)$$

$$= (-1)^k \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}(u^n)}{dt^{n-k}} \cdot \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}(u^n)\, dt$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} u^n \cdot \underbrace{\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}(u^n)}_{=(2n)!}\, dt$$

$$= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n\, dt$$

$$= (2n)! \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta\, d\theta = (2n)! \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\, d\theta$$

$$= 2\times(2n)! \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \times 2^n \times \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \cdot n! = 2^n \cdot n!$$

$$\Longrightarrow \quad P_n = \frac{1}{2^n \cdot n!}\, q_n$$

چندجمله‌ای‌های هرمیتی: پایه برای $L^2(-\infty,+\infty)$.

دنباله $\{e^{-t^2/2}\, t^n\}_{n=0}^{\infty}$ را در نظر بگیرید و به روش گرام- اشمیت یک پایه متعامد یکه بسازید:

$$e_n(t) = \frac{1}{(2^n\, n!\sqrt{\pi})^{1/2}}\, e^{-t^2/2}\, H_n(t)$$

چندجمله‌ای‌های H_n را چندجمله‌ای‌های هرمیت گویند.

$$e_0 = \alpha e^{-t^2/2}$$

$$e_1 = t e^{-t^2/2} - \langle t e^{-t^2/2}, e_0 \rangle e_0$$

$$e_2 = t^2 e^{-t^2/2} - \langle t^2 e^{-t^2/2}, e_0 \rangle e_0 - \langle t^2 e^{-t^2/2}, e_1 \rangle e_1$$

$$\Rightarrow e_n = e^{-t^2/2} \left(\text{چند جمله ای از درجه } n \right)$$

ادعا: $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \dfrac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$

$$\tilde{H}_{n+1} = 2t \tilde{H}_n - 2n \tilde{H}_{n-1}$$

$$\tilde{H}_n' = (-1)^n \times 2t e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} + (-1)^n e^{t^2} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} e^{-t^2}$$

$$= 2t \tilde{H}_n - \tilde{H}_{n+1}$$

$$\Longrightarrow \tilde{H}_n' = 2n \tilde{H}_{n-1}$$

$\tilde{H}_n =$ [illegible] صحیح

$$H_0(t) \equiv 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t, \quad \cdots$$

$$\left\langle e^{-t^2/2} \tilde{H}_n, \ e^{-t^2/2} \tilde{H}_m \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \tilde{H}_n \cdot \tilde{H}_m \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2} \right) \cdot \tilde{H}_m \, dt$$

$$= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(e^{-t^2} \right) \cdot \tilde{H}_m' \, dt$$

$$= (-1)^{n+1} 2m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(e^{-t^2} \right) \tilde{H}_{m-1} \, dt$$

$m < n$

$$= (-1)^{n+m} 2^m m! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} e^{-t^2} \, dt$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ (-1)^{2n} 2^n n! \sqrt{\pi} & n = m \end{cases}$$

سؤال: چرا $L^2(-\infty,+\infty) = \overline{\operatorname{Span}\{e^{-t^2/2}\, t^n\}_{n=0}^{\infty}}$ ؟

آنالیز ریاضی مقدماتی

جلسه سیزدهم - ۹۵/۸/۱۶

تابعکهای خطی روی فضای هیلبرت .

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f(x) = \langle x, u \rangle$ تابعک خطی پیوسته است .

$$|f(x)| = |\langle x, u \rangle| \le \|x\| \cdot \|u\|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \|f\|_{H'} \le \|u\| \\ f(u) = \|u\|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \|f\|_{H'} = \|u\|_H$$

قضیه نمایش ریس : هر تابعک خطی پیوسته f را روی فضای هیلبرت H به صورت یکتا به شکل $f(x) = \langle x, u \rangle$ نمایش داد. علاوه بر این

$\|u\|_H = \|f\|_{H'}$.

اثبات - $Nulf \subseteq H$ زیرفضای بسته است . اگر $Nulf = H$ آنگاه $f \equiv 0$

در این صورت $u = 0$ وگرنه $0 \neq z \in (Nulf)^{\perp}$ انتخاب کنید .

$$g(x) = f(x) - \alpha \langle x, z \rangle$$

$$g|_{Nulf} \equiv 0 \qquad Nulf \oplus (Nulf)^{\perp} = H$$

$$g(z) = f(z) - \alpha \|z\|^2 = 0$$

اگر بدانیم $1=\dim(\mathrm{Nul} f)^\perp$ ε ثابت می‌شود $g\equiv 0$ و در نتیجه برای $\alpha=\dfrac{f(z)}{\|z\|^2}$ داریم $f(x)=\langle x,\bar{\alpha} z\rangle$.

ادعا: $\dim(\mathrm{Nul} f)^\perp=1$.

اثبات: فرض کنید $0\neq z_1,z_2\in(\mathrm{Nul} f)^\perp \Rightarrow 0\neq f(z_1), f(z_2)$

$$t=\frac{f(z_2)}{f(z_1)} \Rightarrow f(tz_1-z_2)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} tz_1-z_2\in \mathrm{Nul} f \\ z_1,z_2\in(\mathrm{Nul} f)^\perp \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow tz_1-z_2=0 \Rightarrow z_2=tz_1.$$

اثبات دیگر:

$$v=f(x)z-f(z)x \Rightarrow f(v)=0 \Rightarrow v\in \mathrm{Nul} f$$

$$\hookrightarrow \langle z,v\rangle=0 \Rightarrow f(x)\langle z,z\rangle = f(z)\langle x,z\rangle$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{f(z)}{\|z\|^2}\langle x,z\rangle=\langle x,\bar{\alpha} z\rangle.$$

اثبات یکتایی: اگر $f(x) = \langle x, u_1 \rangle = \langle x, u_2 \rangle$

$$\Rightarrow \langle x, u_1 - u_2 \rangle = 0 \quad \forall x \in H$$

$$\Rightarrow \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0$$

نتیجه: H' ایزومتر است با H.

$i_H : H \longrightarrow H'$ ایزومتری دوسویی است.

$$\langle i_H(u), x \rangle = \langle x, u \rangle$$

نتیجه: هر فضای هیلبرت بازتابی است.

$$i : X \longrightarrow X''$$

$i(x) : X' \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \langle i(x), u \rangle = \langle u, x \rangle$

اگر نشاندن طبیعی i پوشا باشه، فضای X بازتابی نامیده می‌شود.

$$i : H \longrightarrow H''$$

$$\langle i(x), u \rangle = u(x) \qquad \forall u \in H'$$

$$u(x) = \langle x, \underbrace{i_H^{-1}(u)}_{\in H} \rangle \Longleftarrow$$ نمایش ریس

$$\boxed{\langle i(x), u \rangle = \langle x, i_H^{-1}(u) \rangle \qquad \forall x \in H, \; u \in H'}$$

نشان می‌دهیم $i : H \to H''$ پوشا است. فرض کنید $T \in H''$ را بگیرید

$$T : H' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H' \xleftarrow{\;i_H\;} H$$

$$\langle f, g \rangle_{H'} := \langle i_H^{-1}(f), i_H^{-1}(g) \rangle_H$$

$$T \circ i_H \in H'$$

$$T \circ i_H(x) = \langle x, z \rangle$$

$$T(u) = \langle i_H^{-1}(u), z \rangle$$

$$= \langle i(z), u \rangle$$

$$T(u) = \langle u, \theta \rangle_{H'} = \langle i_H^{-1}(u), i_H^{-1}(\theta) \rangle_H$$

$$x = i_H^{-1}(\theta), \qquad T(u) = \langle i_H^{-1}(u), x \rangle_H$$

$$= \langle i(x), u \rangle$$

$$\Longrightarrow T = i(x).$$

تعریف: $h : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ فرم دوخطی (یک و نیم خطی)

برای هر y ، $h(\cdot, y)$ نسبت به مؤلفه اول خطی است.

برای هر x ، $h(x, \cdot)$ نسبت به مؤلفه دوم مزدوج خطی است.

مثال- اگر $X = H$ فضای ضرب داخلی باشد، $h(x,y) = \langle x,y \rangle_H$ یک فرم دوخطی (یا یک و نیم خطی) است.

قضیه: اگر H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت باشند و $h : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ فرم دوخطی (یا یک و نیم خطی) کران دار باشد، آنگاه عملگر خطی کران دار $S : H_1 \longrightarrow H_2$ وجود دارد که

$$h(x,y) = \langle Sx, y \rangle_{H_2}$$

و $\|h\| = \|S\|$.

تعریف: نرم دوخطی h را کران دار (پیوسته) $\quad h: X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|h\| = \sup_{\substack{\|x\|_X\le 1\\ \|y\|_Y\le 1}} |h(x,y)| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|_X\cdot\|y\|_Y}$$

$$\Longrightarrow |h(x,y)| \le \|h\|\cdot\|x\|_X\cdot\|y\|_Y$$

اثبات قضیه: برای هر $x\in H_1$ دلخواه تابع $\overline{h(x,y)}$ نسبت به y یک تابع خطی کران دار روی H_2 است. بنابراین قضیه ریس

$$h(x,y) = \langle Sx, y\rangle_{H_2} \Longleftarrow \overline{h(x,y)} = \langle y, Sx\rangle_{H_2}$$

بنابراین عملگر $S: H_1 \longrightarrow H_2$ وجود دارد که رابطه بالا را برقرار دهد.

$$h(x_1+x_2, y) = \langle S(x_1+x_2), y\rangle_{H_2}$$

$$\parallel$$

$$h(x_1,y)+h(x_2,y) = \langle S(x_1), y\rangle_{H_2} + \langle Sx_2, y\rangle_{H_2} = \langle Sx_1+Sx_2, y\rangle_{H_2}$$

$\Leftarrow$ S خطی است.

$$\|Sx\|_{H_2}^2 = \langle Sx, Sx\rangle_{H_2} = h(x, Sx) \le \|h\| \cdot \|x\|_{H_1} \cdot \|Sx\|_{H_2}$$

$$\Longrightarrow \quad \|Sx\|_{H_2} \le \|h\| \cdot \|x\|_{H_1} \Longrightarrow \quad \|S\| \le \|h\|$$

$$|h(x,y)| = |\langle Sx, y\rangle_{H_2}| \le \|Sx\|_{H_2} \cdot \|y\|_{H_2} \le \|S\| \cdot \|x\|_{H_1} \cdot \|y\|_{H_2}$$

$$\Longrightarrow \quad \|h\| \le \|S\|$$

عملگرهای الحاقی Adjoint Operator

تعریف: اگر $T: H_1 \to H_2$ خطی و کران‌دار باشد عملگر $T^*: H_2 \to H_1$ را عملگر الحاقی T گوییم هرگاه

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^*y\rangle_{H_1}$$

مثال: اگر $H_1 = \mathbb{C}^n$ ، $H_2 = \mathbb{C}^m$ و T یک ماتریس $m \times n$.

$$\left.\begin{aligned} \langle Tx, y\rangle &= \bar{y}\cdot(Tx)^t \\ \langle x, T^*y\rangle &= \overline{(T^*y)}\cdot x^t \end{aligned}\right\} \Rightarrow (Tx)^t\,\bar{y} = x^t\cdot\overline{T^*y}$$

$$\Rightarrow T^* = \overline{T}^t$$

نکته: T^* وجود دارد.

$$h(y,x) = \langle y, Tx\rangle_{H_2} \longrightarrow \text{پیوسته است}$$

بنابر قضیه قبل عملگر $T^*: H_2 \to H_1$ وجود دارد که

$$h(y,x) = \langle T^*y, x\rangle_{H_1} \quad \text{و} \quad \|h\| = \|T^*\|$$

گزاره : T^* کراندار است و $\|T\|=\|T^*\|$.

مثال : $H=\ell^2$. $R:\ell^2 \longrightarrow \ell^2$ شیفت به راست .

$$R(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,x_1,x_2,x_3,\dots)$$

$$R^*=?$$

$$\langle Rx,y\rangle=\langle x,R^*y\rangle$$

$x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}$ $\qquad R^*y=(z_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\langle Rx,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_{n+1}$$

$$\langle x,R^*y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n z_n$$

$y=(0,0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ k\text{ام}}}{1},0,\dots)=e_k \Rightarrow \quad x_{k-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x_n z_n \Rightarrow R^*e_k=e_{k-1}$

x دلخواه است .

$$R^*y=(y_2,y_3,\dots)$$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه چهاردهم ۹۵/۸/۱۸

عملگر الحاقی: $T: H_1 \longrightarrow H_2$ فرض کراندار، $T^*: H_2 \longrightarrow H_1$ را عملگر الحاقی T گوییم هرگاه

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^*y\rangle_{H_1} \qquad \forall x \in H_1,\ y \in H_2$$

خواص: فرض کنید $S: H_1 \longrightarrow H_2$ ، $T: H_1 \longrightarrow H_2$ آنگاه داریم:

(۱) $(S+T)^* = S^* + T^*$

(۲) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}\, T^*$

(۳) $(T^*)^* = T$

(۴) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

(۵) $T^*T = 0 \Longleftrightarrow T = 0$

(۶) $(TS)^* = S^*T^*$ (در این حالت $H_1 = H_2$)

(۷) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

(۸) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ ، $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$

اثبات (۲)

$$\alpha \langle Tx, y \rangle = \langle (\alpha T)(x), y \rangle = \langle x, (\alpha T)^* y \rangle$$

$$\parallel$$

$$\alpha \langle x, T^* y \rangle = \langle x, \bar{\alpha} T^* y \rangle \Longrightarrow (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

یکتایی تعریف عملگر الحاقی

اثبات (۴)

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2$$

$$\|Tx\|^2 \leq |\langle T^*Tx, x \rangle| \leq \|T^*T\| \cdot \|x\|^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \|T\|^2 \leq \|T^*T\| \\ \|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2 \end{array}\right\} \longrightarrow (۴)$$

اثبات (۸)

$$y \in \operatorname{Ker} T^* \Longleftrightarrow 0 = \langle x, T^* y \rangle = \langle Tx, y \rangle \quad \forall x$$

$$\Longleftrightarrow y \perp Tx \quad \forall x \Longleftrightarrow y \perp \operatorname{Im} T$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} T^* \underset{\supseteq}{\subseteq} (\operatorname{Im} T)^{\perp}$$

تعریف: $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$

عملگر خودالحاق (هرمیتی) $T^*=T$

عملگر یکانی $T^*=T^{-1}$

عملگر نرمال $TT^*=T^*T$.

نکته: خودالحاق یا یکانی $\longrightarrow$ نرمال

مثال: $T=\alpha I \longrightarrow T^*=\bar{\alpha} I$

خودالحاق $\Longleftrightarrow$ $\alpha\in\mathbb{R}$

یکانی $\Longleftrightarrow$ $|\alpha|=1$

$\forall \alpha\in\mathbb{C}$ نرمال است.

مثال: اگر $L:\ell^2\to\ell^2$ شیفت به چپ باشد آنگاه $L^*=R:\ell^2\to\ell^2$ شیفت به راست است.

$L^*L(X)=(0,x_2,x_3,\dots)$, $LL^*=I$

پس نرمال نیست.

مثال: $T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$T[(x_n)_{n=1}^\infty] = (a_n x_n)_{n=1}^\infty$ که $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$.

$$T^*[(x_n)_{n=1}^\infty] = (\bar{a}_n x_n)_{n=1}^\infty$$

گزاره: اگر $T: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ عملگر خطی و کران دار باشد آنگاه:

(۱) اگر T خودالحاق باشد مقدار $\langle Tx, x\rangle$ برای هر $x \in \mathcal{H}$ حقیقی است.

(۲) برعکس گزاره قبل درست است اگر $\mathcal{H}$ مختلط باشد.

اثبات:

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \Longrightarrow (1)$$

برعکس

$$\langle x, T^*x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle x, (T^* - T)x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

$\Longrightarrow T^* - T = 0$ بنابر لم بعد

لم: $S : H \longrightarrow H$ و $\langle Sx, x \rangle = 0$ برای هر $x \in H$ و H فضای مختلط است. در این صورت $S = 0$.

$$0 = \langle S(\alpha x + y), \alpha x + y \rangle = \underbrace{\cancel{\langle S\alpha x, \alpha x \rangle}}_{0} + \langle Sy, \alpha x \rangle + \langle S\alpha x, y \rangle + \underbrace{\cancel{\langle Sy, y \rangle}}_{0}$$

$$\Rightarrow \alpha \langle Sx, y \rangle = -\bar{\alpha} \langle Sy, x \rangle \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 1 \Rightarrow \langle Sx, y \rangle = -\langle Sy, x \rangle \\ \alpha = i \Rightarrow \langle Sx, y \rangle = \langle Sy, x \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \langle Sx, y \rangle = 0 \quad \forall y, x$$

$$\Rightarrow S \equiv 0$$

مثال- اگر S یک دوران $\pi/2$ در صفحه باشد آنگاه $\langle Sx, x \rangle = 0$ برای هر x. این مثال نشان می‌دهد که لم فوق وقتی میدان حقیقی است درست نیست.

گزاره: اگر T و S دو عملگر خودالحاق باشند، آنگاه TS خودالحاق است اگر و تنها اگر $TS=ST$.

اثبات: TS خودالحاق است $\Longleftarrow$

$$TS=(TS)^*=S^*T^*=ST$$

$$(TS)^*=S^*T^*=ST=TS \longrightarrow TS \text{ خودالحاق است}$$

نکته: اگر اسکالرها حقیقی باشند، مجموعه همه عملگرهای خودالحاق یک زیرفضای $B(H)$ است.

گزاره: مجموعه عملگرهای خودالحاق یک زیرمجموعه بسته از $B(H)$ است.

اثبات: اگر $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگر خودالحاق باشند که $\|T_n-T\|\longrightarrow 0$

$$T_n=T_n^* \Longrightarrow \underset{\|T_n-T\|}{\|(T_n-T)^*\|}=\|T_n-T^*\|\longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow T=T^*.$$

گزاره: اگر T نرمال باشد آنگاه $\|Tx\| = \|T^*x\|$ و برعکس اگر H مختلط باشد.

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle \underset{\text{تعریف عملگر الحاقی}}{=} \langle x, T^*Tx\rangle \underset{\text{نرمالیت}}{=} \langle x, TT^*x\rangle \underset{\text{تعریف عملگر الحاقی}}{=} \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$$

برعکس $\|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2$ نتیجه می‌دهد که $\langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle$ برای هر x. و بنابر لم قبل

$$TT^* = T^*T.$$

نتیجه: $\|T\|^2 = \|T^2\|$ اگر T نرمال باشد.

$$\|Tx\| = \|T^*x\|$$

$$\Longrightarrow \|T^2x\| = \|T^*Tx\|$$

$$\Longrightarrow \|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$$

گزاره : عملگرهای یکانی U و V را در نظر بگیرید آنگاه

(۱) U ایزومتری است یعنی $\|Ux\| = \|x\|$ برای هر $x \in \mathcal{H}$.

(۲) $\|U\| = 1$ به شرط آنکه $\mathcal{H} \neq \{0\}$.

(۳) $U^* = U^{-1}$ یکانی است .

(۴) UV یکانی است .

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

تذکر : الف) اگر U ایزومتری باشد و $\mathcal{H}$ مختلط آنگاه $U^*U = I$.

ب) U یکانی است اگر و تنها اگر U ایزومتری و پوشا باشد .

$U^*U = I$

U یک به یک و پوشا است .

U^{-1} وجود دارد

$U^{-1} = U^*$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه پانزدهم ۹۵/۸/۲۳

قضیه نگاشت باز:

اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$ عملگر خطی کران دار باشد که پوشا است. در این صورت T نگاشت باز است. در نتیجه اگر T یک نگاشت دوسویی باشد، آنگاه T^{-1} پیوسته و در نتیجه کران دار است.

قضیه کاتگوری بئر: اگر $X \neq \emptyset$ فضای متریک تام باشد و $X=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ که $\{A_j\}$ بسته هستند، آنگاه درون یکی از این مجموعه‌های A_j ناتهی است. (به عبارت دیگر اگر B_j یک دنباله شمارا از مجموعه‌های باز و چگال در X باشند آنگاه $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \neq \emptyset$.)

اثبات:

$$A_1 \neq X \Rightarrow B_{r_1}(x_1) \subseteq X - A_1$$

$$\Rightarrow B_{r_1/3}(x_1) \not\subseteq A_2, \quad \exists x_2 \in B_{r_1/2}(x_1), \quad 0<r_2 \leq \frac{r_1}{3}$$

$$\text{s.th. } B_{r_2}(x_2) \subseteq X - A_2$$

$$\Rightarrow B_{r_n}(x_n) \subseteq X-(A_1\cup\cdots\cup A_n)$$

$$x_n \in B_{\frac{r_{n-1}}{3}}(x_{n-1}), \quad r_n \leq \frac{r_{n-1}}{3}$$

$\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است اگر $x_n \to x_*$، به راحتی کران دیگر

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{r_m}{3} + \frac{r_{m+1}}{3} + \cdots + \frac{r_{n-1}}{3} \leq \frac{r_m}{3} + \frac{r_m}{3^2} + \cdots + \frac{r_m}{3^{n-m}}.$$

وقتی $n\to\infty$ $\Longrightarrow d(x_m, x_*) < r_m \Longrightarrow x_* \in B_{r_m}(x_m) \subseteq X - A_1\cup\cdots\cup A_m$

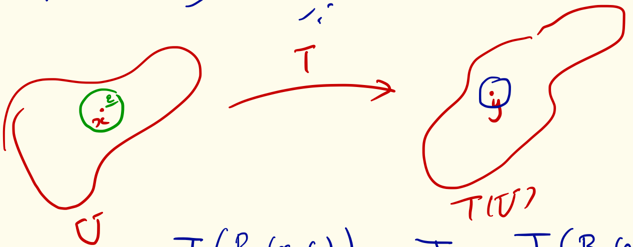
$$\Longrightarrow x_* \notin \bigcup A_i = X \,.$$

<u>اثبات قضیه نگاشت باز:</u> کافی است ثابت کنیم:

(۱) عدد $0<r$ وجود دارد که $B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$.

(۲) $B_Y(0, r/2) \subseteq T(B_X(0,1))$

فعلاً فرض کنید این دو گزاره درست باشند. برای اینکه اثبات کنیم T نگاشت باز است کافی است برای مجموعه باز $U \subseteq X$ ثابت کنیم $T(U) \subseteq Y$ باز است. فرض کنید $y = Tx$ که $x\in U$. همچنین فرض کنید $B_X(x,\varepsilon)\subseteq U$.



$$T(B_X(x,\varepsilon)) = Tx + T(B_X(0,\varepsilon)) = Tx + \varepsilon T(B_X(0,1))$$
$$\supseteq y + \varepsilon B_Y(0, r/2) = B_Y(y, \tfrac{\varepsilon r}{2})$$

$$A_n = \overline{T(B_X(0,n))} = n\,\overline{T(B_X(0,1))} = n A_1 \Big\} \Rightarrow$$ درون A_1 بازاست.

T پوشا است $\Rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ درون یکی از A_n ها بازاست. (بر اساس بئر)

$$\Rightarrow \exists y_0 \in Y,\ r>0,\quad B_Y(y_0,r) \subseteq A_1$$

ادعا: $B_Y(0,r) \subseteq A_1$.

$$y \in B_Y(0,r) \Rightarrow y+y_0,\ -y+y_0 \in B_Y(y_0,r) \subseteq A_1$$

A_1 نسبت به مبدأ متقارن است. $\Rightarrow y+y_0,\ y-y_0 \in A_1 = \overline{T(B_X(0,1))}$

A_1 محدب است. $\Rightarrow \dfrac{(y+y_0)+(y-y_0)}{2} \in A_1$

$$\Rightarrow \quad y \in A_1$$

اثبات (۲)

$$\|y\| < r/2 \Rightarrow 2y \in A_1 = \overline{T(B_X(0,1))}$$

$$\Rightarrow \exists x_1 \in B_X(0,1), \quad \|2y - Tx_1\| < r/2$$

$$\Rightarrow \|y - T(\tfrac{x_1}{2})\| < r/4$$

$$\Rightarrow \exists x_2 \in B_X(0,1): \quad \|4y - 2Tx_1 - Tx_2\| < r/2$$

$$\Rightarrow \|y - T(\tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_2}{4})\| < r/8$$

$$\vdots$$

$$\|y - T(\underbrace{\tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_2}{4} + \cdots + \tfrac{x_n}{2^n}}_{z_n})\| < \frac{r}{2^{n+1}}$$

$$z_n \longrightarrow z_*$$

$$\Rightarrow y = Tz_*$$

از طرفی

$$\|z_*\| \le \frac{\|x_1\|}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\le \frac{1 + \|x_1\|}{2} < 1$$

بنابراین $y \in T(B_X(0,1))$

مثال: $X=Y\subseteq \ell^\infty$ دنباله‌های از یکی به بعد صفر $T\left((x_n)_{n=1}^\infty\right) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^\infty$ دوسویی است ولی T^{-1} پیوسته نیست.

$$T^{-1}(e_n) = n e_n$$

مثال: $X=C[0,1]$ با نرم سوپریمم و $Y=C[0,1]$ با نرم انتگرالی $\|\cdot\|_1$. $T: X \longrightarrow Y$ نگاشت همانی

$$\|T(f)\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad T \text{ پیوسته است.}$$

ولی T^{-1} پیوسته نیست

$$f_n(t) = t^n, \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

اگر قرار باشد T^{-1} پیوسته باشد باید $\|f_n\|_\infty \le \|T^{-1}\|\cdot\|f_n\|_1$ که تناقض است.

قضیه گراف بسته اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T: X \longrightarrow Y$ عملگر خطی که گراف آن در $X\times Y$ بسته است. در این صورت T پیوسته است.

نکته: $G=\{(x,Tx) : x\in X\}\subseteq X\times Y$ گراف T. که روی $X\times Y$ نرم

$$\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

اثبات: چون G بسته است پس گراف آن را فضای باناخ در نظر گرفت. نگاشت تصویر X با ضابطه $P: G \longrightarrow X$ ، $P(x,Tx)=x$.

در نظر بگیرید P کراندار، خطی و دوسویی است. $\Longleftarrow$ بنابر قضیه نگاشت باز P^{-1} پیوسته است

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{پیوسته}"] \arrow[rr, bend right, "T"'] & G\subseteq X\times Y \arrow[r, "\text{تصویر به مؤلفه دوم}"] & Y \end{tikzcd}$$

($P^{-1}: X \to G$)

درنتیجه T پیوسته است.

آنالیز آماری مقدماتی

جلسه شانزدهم ۹۵/۹/۲

قضیه کرانداری یکنواخت:

X باناخ، Y فضای نرم‌دار و $T_n : X \longrightarrow Y$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی و کران‌دار به طوری‌که برای هر $x \in X$، دنباله $\{T_n x\}$ در Y کران‌دار باشد. در این صورت $\{\|T_n\|\}$ کران‌دار است.

اثبات:

$$\|T_n x\| \le \|T_n\| . \|x\| \overset{?}{\le} M . \|x\|$$

$$A_k = \{x : \|T_n x\| \le K \quad \text{، برای هر } n\}$$ بسته است.

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Longrightarrow$$ درون یکی از A_kها باز است.

$$B(x_0, r) \subseteq A_k \Rightarrow \forall n, \|T_n(x_0 + rx)\| \le K \quad \forall x \in B(0,1)$$

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T_n x\| \le \frac{K + \|T_n x_0\|}{r}$$

$$\le M$$

مثال: شرط باناخ برای X در قضیه قبل ضروری است.

$\mathcal{A} \subseteq \ell^{\infty}$ همه دنباله‌هایی از یک جا به بعد صفر.

$$T_n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T_n\left[\left(x_m\right)_{m=1}^{\infty}\right] = \sum_{m=1}^{n} x_m$$

$$\left|T_n(X)\right| \leq \sum_{m=1}^{n} |x_m| \leq n \|X\|_{\infty}$$

$$\|T_n\| = n \longrightarrow \infty$$

و برای هر $X \in \mathcal{A}$ دنباله $\{T_n(X)\}$ کران‌دار است زیرا $X = (x_m)_{m=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$

$$X = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, 0, \dots) \Rightarrow T_n(X) = T_N(X) \qquad n \geq N$$

مثال: تابع پیوسته ای وجود دارد که سری فوریه آن لااقل در یک نقطه واگرا است.

$$f \in C[0,2\pi] \qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$T_m(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \longrightarrow$$ مقدار سری فوریه در نقطه $x=0$

اگر تابع f وجود داشته باشد که $\{T_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ بیکران شود در این صورت سری فوریه f در نقطه $x=0$ واگرا است.

از قضیه کران داری یکنواخت نتیجه می شود که تنها کافی است نشان دهیم $\{\|T_m\|\}$ بیکران است.

$$|T_m(f)| = \left|\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}f(x)\,\underbrace{\left[1 + 2\sum_{n=1}^{m}\cos nx\right]}_{q_m(x)}\,dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_m(x)|\,dx \cdot \|f\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \|T_m\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_m(x)|\,dx$$

$$q_m(x)\sin x/2 = \sin x/2 + \sum_{n=1}^{m}\left[\sin(n+1/2)x - \sin(n-1/2)x\right]$$

$$= \sin x/2 + \sin(m+1/2)x - \sin x/2$$

$$\Longrightarrow \quad q_m(x) = \frac{\sin(m+1/2)x}{\sin x/2}$$

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(m+1/2)x}{\sin x/2}\right|dx > \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(m+1/2)x}{x/2}\right|dx$$

$$= \int_0^{(2m+1)\pi}\left|\frac{\sin y}{\frac{y}{2(m+1/2)}}\right|\frac{dy}{m+1/2}$$

$$= 2\int_0^{(2m+1)\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy$$

$$= 2\sum_{k=0}^{2m}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy >$$

$$> \sum_{k=0}^{2m}\frac{2}{(k+1)\pi}\underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy}_{=2} = \sum_{k=0}^{m}\frac{4}{(k+1)\pi} \longrightarrow \infty$$

$$\|T_m\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_m(x)|\,dx$$ تنها کافی است نشان دهیم

$$T_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, q_m(x)\,dx$$

$$f = \operatorname{Sgn}(q_m) = \begin{cases} +1 & q_m > 0 \\ -1 & q_m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q_m(x)|\,dx \longrightarrow$$ ایراد : f پیوسته نیست.

$$\forall \varepsilon \quad \exists g \in C[0,2\pi], \quad \|f-g\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \varepsilon$$

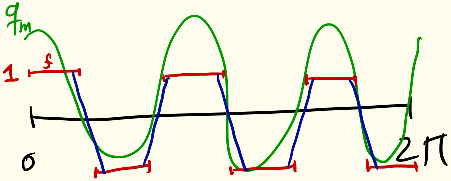
$$|T_m(g) - T_m(f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} (g(x)-f(x))\, q_m(x)\,dx\right|$$

$$\leq \|g-f\|_2 \cdot \|q_m\|_2$$

$$\leq \varepsilon \, \|q_m\|_2$$

$$|T_m(g)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_m(x)|\, dx - \varepsilon \|g_m\|_2$$

g را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که $\|g\|_\infty = 1$



$$\Longrightarrow \|T_m\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_m(x)|\, dx - \varepsilon \|g_m\|_2$$

نتیجه: اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای X باشد بطوری که برای هر $f\in X'$ دنباله $\{f(x_n)\}$ کران دار باشد

آنگاه $\{x_n\}$ در X کران دار است.

$$T_n : X' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T_n(f) = f(x_n) \implies \|T_n\| = \sup_{0\neq f\in X'} \frac{|f(x_n)|}{\|f\|_{X'}} = \|x_n\|_X$$

همگرایی ضعیف:

$(X, \|\cdot\|)$ اگر $\|x_n - x\| \to 0$ آنگاه دنباله x_n به x همگرا (بطور قوی) است.

اگر ضعیف‌ترین توپولوژی روی X را در نظر بگیریم که اعضای X' نسبت به آن توپولوژی پیوسته باشند

آن را توپولوژی ضعیف گوییم.

$x_n \xrightarrow{w} x$ یا $x_n \longrightarrow x$ در صورتیکه برای هر $f\in X'$

$$f(x_n) \longrightarrow f(x)$$

اگر $x_n \to x$ بطور قوی در اینصورت $x_n \longrightarrow x$.

<u>مثال</u> : $e_n \xrightarrow{w\text{-}\ell^p} 0 \quad (1<p<\infty)$.

$$\forall f \in (\ell^p)' \cong \ell^q , \qquad f(e_n) \longrightarrow 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^q < \infty \Longleftarrow \ell^q \ni f = (y_m)_{m=1}^{\infty} , \qquad f\big((x_m)_{m=1}^{\infty}\big) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$$

$$f(e_n) = y_n \longrightarrow 0$$

مثال : $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ پایه هیلبرتی در اینصورت $e_n \longrightarrow 0$.

$$\forall f \in \mathcal{H}' \; \exists y_f \in \mathcal{H} , \qquad f(x) = \langle x, y_f \rangle$$

$$f(e_n) = \langle e_n, y_f \rangle$$

$$\|y_f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y_f \rangle|^2$$

$$\Longrightarrow \quad f(e_n) \longrightarrow 0$$

سؤال: آیا حد در توپولوژی ضعیف یکتا است؟

$$x_n \rightharpoonup x \quad , \quad x_n \rightharpoonup y$$

$$\forall f\in X' , \quad \lim f(x_n) = f(x) = f(y) \implies x=y$$

گزاره: اگر $x_n \rightharpoonup x$ هر زیردنباله $\{x_n\}$ نیز به طور ضعیف به x همگرا است. (بنابر تعریف واضح است.)

گزاره: اگر $x_n \rightharpoonup x$ آنگاه دنباله $\{x_n\}$ کران‌دار است. (یکی از نتایج قضیه کرانداری یکنواخت)

گزاره: اگر $x_n \rightharpoonup x$ آنگاه

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \ge \|x\|$$

$$|f(x_n)| \le \|f\|\cdot\|x_n\|$$

$$|f(x)| = \lim |f(x_n)| \le \|f\|\cdot \liminf \|x_n\|$$

$$\Rightarrow \sup_{0\neq f\in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \le \liminf \|x_n\|$$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه هفتم ۹۵/۹/۷

همگرایی ضعیف: $x_n \xrightarrow{w} x \iff \forall f \in X', \ f(x_n) \longrightarrow f(x)$

گزاره: $x_n \xrightarrow{w} x$ آنگاه $\{\|x_n\|\}$ کراندار است و

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$$

مثال: $e_n \xrightarrow{\ell^p} 0$ که $1 < p < \infty$.

اگر $p=1$ ، $(\ell^1)' = \ell^\infty$, $\langle x, e_n \rangle = x_n = 1 \not\to 0$, $(1,1,1,\cdots) = x \in \ell^\infty$

$$e_n \overset{\ell^1}{\not\longrightarrow} 0$$

نکته: اگر X فضای برداری متناهی بعد باشد، همگرایی ضعیف معادل همگرایی قوی است.

$$X = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

$$X' = \langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle \qquad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

$$x_m \longrightarrow x \implies e_i^*(x_m) \longrightarrow e_i^*(x)$$

$$x_m = a_m^1 e_1 + \cdots + a_m^n e_n \implies \lim_{m\to\infty} a_m^i = a^i$$

$$x = a^1 e_1 + \cdots + a^n e_n$$

قضیه: در فضای نرم‌دار X، $x_n \longrightarrow x$ اگر و تنها اگر

(۱) دنباله $\{x_n\}$ در X کران‌دار باشد.

(۲) برای هر عضو f از یک زیرمجموعه چگال X'، داشته باشیم $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

اثبات ـ $g \in X'$ دلخواه در نظر بگیرید و برای ε دلخواه، f را از زیرمجموعه چگال داده (۲) انتخاب کنید که

$$\|f-g\|_{X'} < \varepsilon$$

$$|g(x_n)-g(x)| \le |g(x_n)-f(x_n)| + |f(x_n)-f(x)| + |f(x)-g(x)|$$

$$\le \|g-f\|_{X'} \cdot \|x_n\| + |f(x_n)-f(x)| + \|f-g\|_{X'} \cdot \|x\|$$

اگر $\|x_n\| \le M$ باشد، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} |g(x_n)-g(x)| \le \varepsilon(M+\|x\|)$$

و چون ε دلخواه است نتیجه را می‌گیریم که

$$g(x_n) \longrightarrow g(x)$$

نتیجه: اگر H فضای هیلبرت باشد و $\{e_n\}$ پایه متعامد یکه باشد، آنگاه $x_n \rightharpoonup x$ اگر و تنها اگر

① $\{x_n\}$ کراندار باشد

② $\langle x_n , e_m \rangle \longrightarrow \langle x, e_m \rangle$ وقتی $n \to \infty$.

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x_n , e_m \rangle e_m \quad , \quad x = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle e_m$$

قضیه: اگر $x_n \rightharpoonup x$ در فضای نرم‌دار X، آنگاه $x \in \overline{\text{Span}\{x_n\}}$.

اثبات:

$$x \notin \overline{\text{Span}\{x_n\}} = Y \implies \exists f \in X' , \quad f|_Y = 0$$

$$f(x) = \|x\|$$

$$\implies f(x_n) \not\longrightarrow f(x) \quad \times$$

نتیجه: اگر $x_n \xrightarrow{w} x$ در فضای نرم دار X، آنگاه دنباله $\{y_n\}$ از ترکیبهای خطی $\{x_n\}$ وجود دارد که $y_n \to x$ به طور قوی در X.

$$y_n = a_1^n x_1 + \cdots + a_m^n x_m \in \operatorname{Span}\{x_n\}$$

نتیجه: اگر $Y \subseteq X$ زیرفضای بسته باشد، آنگاه در توپولوژی ضعیف نیز بسته است.

$$x_n \in Y \,,\; x_n \xrightarrow{w} x \implies x \in Y$$

همگرایی در $B(X,Y)$: ① همگرایی در نرم $B(X,Y)$ ← همگرایی عملگری یکنواخت

$$T_n \to T \iff \|T_n - T\| \to 0 \Rightarrow \forall x,\ T_n x \to Tx$$

② همگرایی قوی $T_n x$ در Y ← همگرایی عملگری قوی

$$T_n \to T \iff \forall x,\ \lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$$

③ همگرایی ضعیف $T_n x$ در Y ← همگرایی عملگری ضعیف

$$T_n \to T \iff \forall x,\ T_n x \rightharpoonup Tx$$

$$① \Rightarrow ② \Rightarrow ③$$

مثال : ① $\not\Leftarrow$ ②

$$T_n : l^2 \to l^2$$

$$T_n(x) = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

$$\|T_n\| = 1 \quad , \quad T_n(x) \to 0 \text{ in } l^2$$

مثال: ۳ $\not\Rightarrow$ ۲

$$T_n(x) = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n \text{ تا}}, x_1, x_2, \dots)$$

$$T_n x \longrightarrow 0 \quad , \quad T_n x \not\longrightarrow 0$$

قضیه: اگر X فضای باناخ و Y فضای نرم‌دار و $T_n \in B(X,Y)$ که $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ به ازای هر $x \in X$. در این صورت $T \in B(X,Y)$.

اثبات: بنابر قضیه کران‌داری یکنواخت $\{\|T_n\|\}$ کران‌دار است اگر $\|T_n\| \le M$

$$\Rightarrow \|Tx\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \le \limsup \|T_n\| \cdot \|x\|_X \le M \cdot \|x\|_X$$

قضیه: اگر X و Y فضای باناخ باشند، T_n همگرای عملگری قوی به T است اگر و تنها اگر

(۱) دنباله $\{\|T_n\|\}$ کران‌دار است

(۲) دنباله $\{T_n x\}$ در Y کوشی است برای هر x در یک زیرمجموعه چگال X.

حالت $Y=\mathbb{R}$ ، $X' = B(X,\mathbb{R})$ دو نوع همگرایی داریم:

① همگرایی در نرم (قوی) $\quad f_n \to f \iff \|f_n - f\|_{X'} \to 0$

② همگرایی ضعیف * $\quad f_n \xrightarrow{*} f \iff \forall x\in X,\ f_n(x) \to f(x)$

همگرایی ضعیف در X' ، $\quad f_n \rightharpoonup f \iff \forall T\in X'',\ T(f_n) \to T(f)$

اگر X بازتابی باشد، آنگاه $X'' \cong X$ و شرط بالا معادل این است که

$$\forall x\in X,\quad f_n(x) \to f(x)$$

قضیه: اگر $\varphi : X' \to \mathbb{R}$ نسبت به توپولوژی ضعیف * پیوسته باشد، آنگاه $x_0 \in X$ وجود دارد که

$$\varphi(f) = \langle f, x_0\rangle \quad \forall f\in X'$$

قضیه: $\{f \in X' : \|f\|_{X'} \leq 1\}$ در توپولوژی ضعیف* فشرده است. (X باناخ است)

قضیه: اگر X بازتابی باشد، آنگاه $\{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ در توپولوژی ضعیف فشرده است.

نتیجه: اگر $\{x_n\}$ در فضای بازتابی کران دار باشد، آنگاه زیردنباله‌ای دارد که همگرای ضعیف است.

گزاره: دنباله f_n در X' همگرای ضعیف* است (X باناخ است) اگر و تنها اگر

- دنباله $\{\|f_n\|\}$ کران دار است

- دنباله $\{f_n(x)\}$ برای هر x در یک زیرمجموعه چگال X همگرا است.

کاربرد: جمع پذیری دنباله‌ها

$X=(x_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \quad y_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

اگر $y_n \to y$ ، در این صورت $\{x_n\}$ را جمع پذیر به y گوییم.

مثال: $(0,1,0,1,0,\dots) \longrightarrow (0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{5},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{7},\dots)$

$y_n \to 1$ ؟

الگوی جمع پذیری: $A=(a_{mn})$ ماتریس نامتناهی، $Y=AX$

$$y_n=\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x_m$$

A منظم است هرگاه همگرایی $x_n \to x$ نتیجه بدهد $y_n \to x$.

قضیه: A منظم است اگر و تنها اگر

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm} = 0 \qquad \text{for } m = 1, 2, 3, \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$

3) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \leq \gamma \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$

که γ مستقل از n است.

اثبات (شرط لازم):

$$X = e_m = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ام-}m}}{1}, 0, \ldots)$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0$$

$$Y = AX \Leftarrow X = (1, 1, 1, \ldots)$$

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \longrightarrow 1$$

c فضای همه دنباله‌ای همگرا با نرم سوپریمم.

$$f_{nm}(X) = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k$$

$$f_{nm} \in C' \Longleftarrow |f_{nm}(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |a_{nk}|\right) \cdot \|X\|_\infty$$

$$\forall X \in C, \quad f_{nm}(x) \longrightarrow f_n(X) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \quad \text{as } m \to \infty$$

$$\Rightarrow f_n \in C'$$

از طرفی برای هر $X \in C$ ، دنباله $\{f_n(X)\}$ همگرا است. (به علت اینکه A منظم است)

$\Longrightarrow$ $\|f_n\| \leq \gamma$ کران دار است.

$$x_k^{(n,m)} = \begin{cases} \dfrac{|a_{nk}|}{a_{nk}} & k \le m\ ,\ a_{nk} \neq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$X^{(n,m)} = \left(x_k^{(n,m)} \right)_{k \ge 1}$$

$$f_{nm}(X^{(n,m)}) = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\, x_k^{(n,m)} = \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}|$$

$$\|X^{(n,m)}\|_\infty = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \|f_{nm}\|_{c'} = \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}|$$

$$\gamma \ge \|f_n\|_{c'} \ge |f_n(X^{(n,m)})| = \sum_{k=1}^{m} |a_{nk}|$$

$$\Longrightarrow (3)$$

شرط کافی

$M \subset C$ زیرمجموعه شامل همه دنباله‌های از یکجا به بعد ثابت

$$X \in M, \quad x_N = x_{N+1} = \cdots = x$$

$$f_n(X) = \sum_{k=1}^{N-1} a_{nk} x_k + x \sum_{k=N}^{\infty} a_{nk}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_{nk}(x_k - x) + x \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \longrightarrow x$$

وقتی $n \to \infty$

$$f : C \to \mathbb{R}, \quad f(X) = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow f \in C'$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{برای هر } X \in M \quad f_n(X) \longrightarrow f(X) \\ \{\|f_n\|\} \text{ کران دار} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow{*} f$$

$$\Rightarrow \quad f_n(X) \longrightarrow f(X) = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{برای هر } X \in C$$

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \cdot |x_k| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \right) \cdot \|X\|_\infty$$

$$\|f_n\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \gamma$$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه هجدهم ۹۵/۹/۱۴

تمرین سری چهارم :

ص ۲۴۵ ۳، ۴

ص ۲۵۵ ۹، ۱۰، ۱۴

ص ۲۶۲ ۱، ۸، ۱۰

ص ۲۶۹ ۵، ۱۰

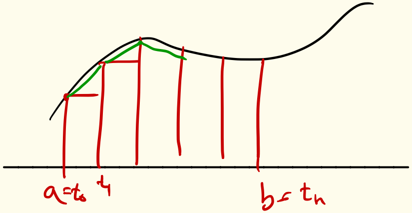
مهلت ۹۵/۹/۲۸

ص ۲۷۵ ۷، ۸

ص ۲۹۰ ۵

ص ۲۹۷ ۱۵

محاسبه عددی انتگرال



$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\,\Delta t_k \sim \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(t_{k+1})+f(t_k)}{2}\,\Delta t_k \sim$$

$$T(f)=\int_a^b f(t)\,dt \sim \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f(t_k^{(n)}) := T_n(f)$$

$$\{\alpha_0^{(n)},\dots,\alpha_n^{(n)}\}$$

$$\{a\le t_0^{(n)}\le t_1^{(n)}<\dots<t_n^{(n)}=b\}$$

$$T,\ T_n : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$X=C[a,b]$ با نرم سوپریمم آنگاه $T, T_n \in X'$

$$|T(f)| \le \int_a^b |f(t)|\,dt \le \|f\|\cdot(b-a)$$

$$|T_n(f)| \le \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|\cdot\|f\|$$

روش انتگرال‌گیری دقیق است هرگاه برای هر $f \in X$ داشته باشیم

$$T_n(f) \longrightarrow T(f)$$

یا به عبارتی $T_n \xrightarrow{*} T$ این هنگامی برقرار است به شرط آنکه

① $\{\|T_n\|\}$ کران‌دار باشد

② برای یک زیرمجموعه چگال در X رابطه $T_n(f) \longrightarrow T(f)$ برقرار باشد.

به راحتی می‌توان دید که $\|T_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$. برای برقراری ① باید داشته باشیم

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \le C$$

برای هر n

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \longrightarrow T(1) = \int_a^b dt = b-a$$

نکته: اگر $0 \le \alpha_k^{(n)}$ آنگاه ② $\Rightarrow$ ① .

② $T_n(f)=T(f) \Longrightarrow$ هرگاه f یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشد.

$$f_j(t)=t^j \qquad 0\le j\le n$$

لازم است که $T_n(f_j)=T(f_j)$ برای $0\le j\le n$

$$T_n(f_j)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right)^j=\int_a^b t^j\,dt=\frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1}$$

اگر $\{t_0^{(n)},\dots,t_n^{(n)}\}$ مشخص باشند، از دستگاه فوق ضرایب $\{\alpha_0^{(n)},\dots,\alpha_n^{(n)}\}$ به دست می‌آید

به شرط آنکه ماتریس ضرایب وارون‌پذیر باشد.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_0^{(n)} & t_1^{(n)} & \cdots & t_n^{(n)} \\ \left(t_0^{(n)}\right)^2 & \left(t_1^{(n)}\right)^2 & \cdots & \left(t_n^{(n)}\right)^2 \\ \vdots & & & \end{bmatrix}\neq 0$$

نظریه تقریب :

X فضای نرم دار و Y زیرفضای X ، $x\in X$ را می‌خواهیم به وسیله Y تقریب بزنیم.

$$d(x,Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\|$$

بهترین تقریب زمانی اتفاق می‌افتد که $y_0\in Y$ وجود داشته باشد که $d(x,Y)=\|x-y_0\|$

سؤال ① وجود بهترین تقریب

② یکتایی بهترین تقریب

یادآوری: X هیلبرت، Y زیرفضای بسته $\Longleftarrow$ بهترین تقریب وجود دارد و یکتا است.

قضیه: اگر $\dim Y<\infty$ آنگاه، بهترین تقریب را داریم.

X فضای برداری نرم دار و

اثبات: $x \notin Y$ ، $y_n \in Y$ در نظر بگیرید که $\|x-y_n\| \longrightarrow d(x,Y)$

$$\|y_n\| \le \|x-y_n\| + \|x\| \le M$$

در نتیجه $\{y_n\}$ کران دار است و چون بعد Y متناهی است یک زیر دنباله همگرا دارد.

$$y_{n_k} \longrightarrow y \Rightarrow \|x-y\| = d(x,Y)$$

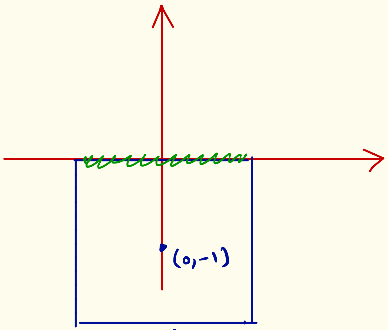
مثال: اگر Y در X چگال باشد (مثل چندجمله‌ای‌ها در $C[a,b]$) آنگاه برای هر $x \notin Y$ ، $d(x,Y)=0$

و هیچ موقع بهترین تقریب به دست نمی‌آید.

$Y_n =$ زیرفضای چندجمله‌ای‌ها از درجه حداکثر n $\subseteq X=C[a,b]$ با نرم سوپریمم

سؤال ② آیا بهترین تقریب در این حالت یکتا است؟ جواب: مثبت.

مثال: بهترین تقریب در بعضی شرایط یکتا نمی‌باشد.



با نرم سوپریمم

لم: اگر X فضای نرم‌دار باشد و M مجموعه همه بهترین تقریب‌های x در Y باشد، آنگاه M یک مجموعه محدب است.

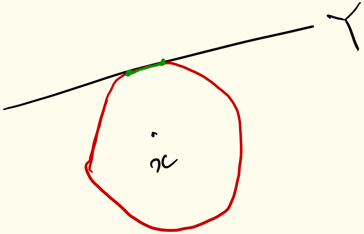
اثبات: $d(x,Y)=\|x-y\|=\|x-z\|$ و $u=\alpha y+(1-\alpha)z$ ثابت می‌کنیم

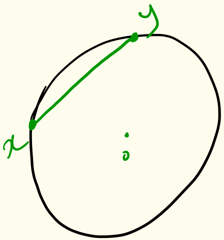
$$\|x-u\|=d(x,Y)$$

$$\|x-u\|=\|\alpha(x-y)+(1-\alpha)(x-z)\|\le\alpha\|x-y\|+(1-\alpha)\|x-z\|=d(x,Y)$$

از طرفی $u\in Y$ و همواره داریم

$$d(x,Y)\le\|x-u\|$$





تعریف: فضای X اکیداً محدب است هرگاه

$$\|x+y\|<2$$

برای هر $\|x\|=\|y\|=1$

قضیه: اگر X اکیداً محدب باشد و Y زیرفضای آن. آنگاه بهترین تقریب یکتا است.
(در صورت وجود)

لم: فضای هیلبرت اکیداً محدب است.

اثبات: تساوی متوازی الاضلاع $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4$

$$\Rightarrow \|x+y\|<2$$

لم: $C[a,b]$ با نرم سوپریمم اکیداً محدب نیست.

$f_1(t)=t$, $f_2(t)=1$, $\|f_1\|=\|f_2\|=1$

$\|f_1+f_2\|=2$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه نوزدهم ۹۵/۹/۱۶

نظریه تقریب

$X=C[a,b]$ با نرم سوپریمم، $Y\subseteq X$ که $\dim Y<\infty$.

$$u\in X,\quad d(u,Y)=\inf_{v\in Y}\|u-v\|$$

w بهترین تقریب u در Y است هرگاه $\|u-w\|=d(u,Y)$.

اگر $\dim Y<\infty$ بهترین تقریب همیشه وجود دارد.

اکیداً محدب: اگر $\|x\|=\|y\|=1$ آنگاه $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$.

اگر X اکیداً محدب باشد آنگاه بهترین تقریب یکتا است.

با این وجود $C[a,b]$ اکیداً محدب نیست.

__تعریف__: زیرفضای n-بعدی Y از $C[a,b]$ دارای شرط هار (Haar) است
اگر هر $0\neq y\in Y$ حداکثر دارای $n-1$ __ریشه__ در $[a,b]$ باشد.
$(y(t)=0)$

این تعریف معادل است با اینکه برای هر پایه $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ و هر n مقدار متمایز $\{t_1, \dots, t_n\}$ داشته باشیم

$$\det [y_i(t_j)]_{1\leq i,j\leq n} \neq 0$$

زیرا در غیر این صورت بردار $0 \neq (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ وجود دارد که

$$\alpha_1 y_1(t_j) + \alpha_2 y_2(t_j) + \dots + \alpha_n y_n(t_j) = 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

تابع $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \in Y$ دارای n ریشه متمایز $\{t_1, \dots, t_n\}$ است.

بنابر شرط هار باید $y = 0$ و چون $y_1, \dots, y_n$ مستقل بودند و $0 \neq (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ که تناقض است.

تعریف - برای تابع $u \in C[a,b]$ نقطه $t_0 \in [a,b]$ را نقطه بهینه گوییم هرگاه $|u(t_0)| = \|u\|$.

$$\|u\| = \max_{a\leq t\leq b} |u(t)|$$

لم: اگر Y زیرفضای n بعدی C[a,b] باشد که در شرط هار صدق می‌کند و برای $u \in C[a,b]$ تابع $v \in Y$ بهترین تقریب u در Y باشد، آنگاه $u-v$ حداقل $n+1$ نقطه بسته دارد.

اثبات - فرض کنید $y = u-v$ دارای $m \le n$ نقطه بسته $t_1, \dots, t_m$ باشد و آن را به $\{t_1, \dots, t_n\}$ بطور دلخواه توسعه دهید و $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ یک پایه باشد.

$$\det [y_i(t_j)] \neq 0$$

بنابراین دستگاه $1 \le i \le n$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(t_i) = y(t_i)$$

جواب دارد.

اگر $y_0 = \sum \alpha_k y_k$ ادعا می‌کنیم $v + \varepsilon y_0$ برای ε به اندازه کافی کوچک تقریب بهتری است یعنی

$$\| u - v - \varepsilon y_0 \| < \| u - v \| = \| y \|$$

برای هر t_i $(1 \le i \le m)$ همسایگی N_i به اندازه کافی کوچک انتخاب کنید که

$$\inf_{t \in N_i} |y_0(t)| \ge \frac{1}{2} \| y \|$$

(این همسایگی وجود دارد به جهت آنکه $y_0(t_i) = \| y \|$)

اگر $t \in N_1 \cup \cdots \cup N_m$ آنگاه

$$\frac{y_0(t)}{y(t)} = \frac{|y_0(t)|}{|y(t)|} \geq \frac{\frac{1}{2}\|y\|}{\|y\|} \geq \frac{1}{2}$$

$$|u(t) - v(t) - \varepsilon y_0(t)| = |y(t) - \varepsilon y_0(t)| = |y(t)| \cdot \underbrace{\left|1 - \varepsilon \frac{y_0(t)}{y(t)}\right|}_{-1< \quad <1} < |y(t)| = \|y\|$$

(در انتخاب همسایگی N_i باید دقت کنیم که y ناصفر باشد و این شده است چون $|y(t_i)| = \|y\|$)

$$0 < \varepsilon \frac{y_0}{y} < 2$$

اگر $t \in [a,b] - N_1 \cup \cdots \cup N_m = J$

$$|y(t) - \varepsilon y_0(t)| \leq |y(t)| + \varepsilon |y_0(t)|$$
$$\leq M + \varepsilon \|y_0\| < \|y\|$$

که

$$M = \max_{t \in J} |y(t)| < \|y\| \rightsquigarrow$$

چون تنها در نقاط $\{t_1, \ldots, t_m\}$ مقدار $|y(t)|$ برابر $\|y\|$ است.

قضیه یکتایی هار

Y زیرفضای با بعد متناهی $C[a,b]$ باشد. آنگاه بهترین تقریب در Y یکتا است اگر و تنها اگر Y در شرط هار صدق کند.

اثبات ـ $\Longleftarrow$ فرض کنید برای تابع x دو بهترین تقریب y_1 و y_2 وجود داشته باشد

$$v_1 = x - y_1 \quad , \quad v_2 = x - y_2 \quad , \quad \|v_1\| = \|v_2\| = \delta = d(x,Y)$$

$$y = \frac{y_1+y_2}{2} \quad , \quad v = \frac{v_1+v_2}{2} \Longrightarrow$$ y بهترین تقریب است $\Longrightarrow \|v\| = \|v_1\| = \|v_2\| = \delta$

$\Longrightarrow$ بنابر لم قبل، تابع v حداقل $n+1$ نقطه بیشینه دارد. $1 \le i \le n+1$

$$|v(t_i)| = \delta \Longrightarrow |v_1(t_i) + v_2(t_i)| = 2\delta$$

$$\Longrightarrow v_1(t_i) = v_2(t_i) = \delta$$ یا $-\delta$

درنتیجه $y_1 - y_2 = v_2 - v_1$ حداقل $n+1$ ریشه متمایز در $[a,b]$ دارد.

بنابر شرط هار $y_1 - y_2 \equiv 0 \Longrightarrow y_1 \equiv y_2$.

⇐ $\langle y_1,\dots,y_n\rangle$ یک پایه برای Y بگیرید. فرض کنید برای n مقدار متمایز $\{t_1,\dots,t_n\}$ شرط هار نقض شود یعنی

$$\det\left[y_i(t_j)\right]=0$$

$$\Rightarrow \exists\,(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\neq 0\ ,\quad \gamma_1 y_k(t_1)+\gamma_2 y_k(t_2)+\dots+\gamma_n y_k(t_n)=0 \qquad 1\le k\le n$$

اگر $y\in Y$ یک عضو دلخواه باشد آنگاه $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$ از روابط بالا نتیجه می‌شود که

$$(*)\qquad \gamma_1 y(t_1)+\dots+\gamma_n y(t_n)=0 \qquad \forall y\in Y$$

از طرف دیگر $(\beta_1,\dots,\beta_n)\neq 0$ وجود دارد که $\beta_1 y_1(t_i)+\beta_2 y_2(t_i)+\dots+\beta_n y_n(t_i)=0$ برای $1\le i\le n$

یعنی تابع $y_0=\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i$ دارای n ریشه $\{t_1,\dots,t_n\}$ است. $(y_0\neq 0)$

λ را به گونه‌ای بگیرید که $\lambda\|y_0\|\le 1$ و تابع پیوسته $1=\|z\|$ انتخاب کنید که

$$z(t_i)=\operatorname{sgn}\gamma_i$$

ادعا می‌کنیم $x=z(1-\lambda|y_0|)$ شرط مشخصه بهترین تقریب را نقض می‌کند.

اگر $y \in Y$ تابع دلخواه باشد، آنگاه، $\|x-y\| \geq 1$ چون در غیر اینصورت

$$1 > |x(t_i) - y(t_i)| = |z(t_i)(1-\lambda|\underset{0}{\cancel{y_0}}(t_i)|) - y(t_i)|$$

$$= |z(t_i) - y(t_i)|$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Sgn} z(t_i) = \operatorname{Sgn} y(t_i)$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Sgn} y(t_i) = \operatorname{Sgn} \gamma_i$$

که با رابطه $(*)$ تناقض دارد.

همچنین نشان می‌دهیم که برای هر $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ ، $\|x - \varepsilon\lambda y_0\| \leq 1$ که در اینصورت همه توابع $\{\varepsilon\lambda y_0\}$ بهترین تقریب x در Y هستند.

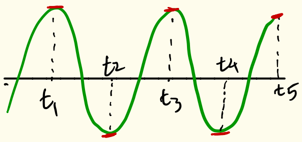
$$|x(t) - \varepsilon\lambda y_0(t)| = |z(t)(1-\lambda|y_0(t)|) - \varepsilon\lambda y_0(t)|$$

$$\leq |z(t)|(1-\lambda|y_0(t)|) + |\varepsilon|\lambda|y_0(t)|$$

$$\leq 1 - \lambda(1-|\varepsilon|)|y_0(t)| \leq 1$$

نتیجه: اگر Y_n فضای تولید شده توسط همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر n باشد آنگاه بهترین تقریب در Y_n یکتاست.

سؤال: به چه روشی می‌توان بهترین تقریب را در Y پیدا کرد؟



$x-y=u \leftarrow$ حداکثر $n+1$ نقطه بیشینه دارد.

تعریف: اگر $t_1<\dots<t_k$ همه نقاط بیشینه تابع u باشند، آنها را متناوب نامیم هرگاه به صورت متناوب $u(t_i)$ برابر $\|u\|$ و $-\|u\|$ شوند.

گزاره: اگر Y زیرفضای n بعدی $C[a,b]$ باشد که در شرط هار صدق کند و برای $x\in C[a,b]$ تابع $y\in Y$ وجود داشته باشد که $x-y$ دارای $n+1$ نقطه بیشینه متناوب باشد. آنگاه y بهترین تقریب برای x است.

اثبات ـ فرض کنید y بهترین تقریب نباشد و $\|x-y_0\| < \|x-y\|$ در این صورت تابع

$$y_0-y = (x-y)-(x-y_0)$$

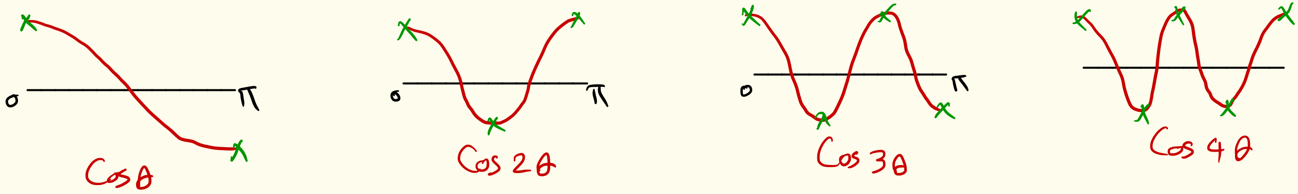
دارای حداقل n ریشه است. زیرا در نقاط بهینه $x-y$ که $\|x-y\|$ $(x-y)(t_i)=\|x-y\|$ مقدار $(y_0-y)(t_i)>0$ و در نقاط $(x-y)(t_i)=-\|x-y\|$ مقدار $(y_0-y)(t_i)$ منفی است.

مثال : در $Y=\langle 1,t,\dots,t^{n-1}\rangle$ تابع $x(t)=t^n$ را در $C[-1,1]$ تقریب بزنید.

تابع یکتای $y(t)=a_0+a_1t+\dots+a_{n-1}t^{n-1}$ وجود دارد که بهترین تقریب است. کافی است تابع y ارائه کنیم که در گزاره قبل صدق کند.

$$t=\cos\theta$$

می‌خواهیم $(\cos\theta)^n - y(\cos\theta)=P(\cos\theta)$ دارای $n+1$ نقطه بهینه متناوب در $[0,\pi]$ داشته باشد.



اگر y به گونه‌ای انتخاب شود که

$$(\cos\theta)^n - y(\cos\theta) = \alpha \cos n\theta$$

آنگاه y بهترین تقریب است.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\begin{cases} \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta \\ \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta - \cos(n-1)\theta$$

$$\cos 3\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - \cos\theta$$

$$= 2^2 \cos^3\theta + \cdots$$

$$\cos n\theta = 2^{n-1}(\cos\theta)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\cos\theta)^k = P_n(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2^{n-1}} P(t) - t^n \in \langle 1, t, \dots, t^{n-1} \rangle$$

$P_n(t)$ چندجمله‌ای چبیشف نامیده میگرد .

آنالیز تابعی تقریبی

جلسه ۹۵/۹/۲۱

طیف عملگر (Spectrum)

مقدار ویژه ماتریس : $(A-\lambda I)$ وارون پذیر نباشد $\leftarrow$ هر عملگر خطی روی فضای متناهی البعد (مختلط) حداقل یک λ وجود دارد که $A-\lambda I$ وارون پذیر نیست.

$T: X \longrightarrow X$ عملگر خطی پیوسته باشد،

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{وارون پیوسته ندارد } T-\lambda I\}$$ طیف عملگر T

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{پیوسته است } (T-\lambda I)^{-1}\}$$ مجموعه حلال

$$R_\lambda(T) = (T-\lambda I)^{-1}$$

نتیجه قضیه نگاشت باز : $\lambda \in \rho(T) \iff T-\lambda I$ یک به یک و پوشا باشد.

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ess}(T)$$

$\sigma_p(T)$ = مقادیر ویژه T (طیف نقطه‌ای) شامل همه λ هایی است که $T-\lambda I$ یک به یک نیست.

$$Nul(T-\lambda I) \neq \{0\} \Rightarrow \exists u \in X \ , \ Tu = \lambda u$$

در این حالت u را بردار ویژه متناظر λ می‌نامیم.

$\sigma_{ess}(T)$ = طیف اساسی (طیف پیوسته) $T-\lambda I$ پوشا نیست

مثال. $T = Id$. $\Leftarrow$ $T-\lambda I = (1-\lambda)I$ که برای $\lambda \neq 1$ وارون‌پذیر است پس $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{1\}$

مثال $R : l^2 \longrightarrow l^2$ شیفت به راست

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$\lambda \in \sigma_p(R) \Rightarrow Ru = \lambda u \Rightarrow (0, x_1, x_2, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots)$$

$$\Rightarrow u = 0$$

$\Rightarrow$ $R-\lambda I$ یک به یک است

$$\sigma_p = \phi$$

$$(R-\lambda I)(x_1,x_2,\dots) = (0,x_1,x_2,\dots) - \lambda(x_1,x_2,\dots)$$
$$= (-\lambda x_1,\ x_1-\lambda x_2,\ x_2-\lambda x_3,\ \dots)$$

به ازای $y\in \ell^2$ اگر معادله $(R-\lambda I)u = y$ را حل کنیم خواهیم داشت

$$\begin{cases} -\lambda x_1 = y_1 \\ x_n - \lambda x_{n+1} = y_{n+1} \qquad n=1,2,\dots \end{cases}$$

اگر $\lambda = 0$ دستگاه لزوماً جواب ندارد پس $0\in\sigma_{ess}$. فرض کنید $\lambda\neq 0$ و برای $y=e_1$ جواب زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = -1/\lambda \ , \quad x_n = -1/\lambda^n \qquad n=2,3,\dots$$

برای اینکه جواب به دست آمده در ℓ^2 باشد باید $|\lambda|>1$.

در نتیجه اگر $|\lambda|\le 1$، $e_1\notin Im(R-\lambda I)$ یعنی $\{\lambda : |\lambda|\le 1\}\subseteq \sigma(R)$

به طور مشابه اگر $|\lambda|>1$ می‌توان دید که $e_m\in Im(R-\lambda I)$ در نتیجه

$$Span\{e_m\}\subseteq Im(R-\lambda I)$$

تمرین: $Im(R-\lambda I)$ بسته است. ← اشتباه است. در واقع بسته نیست. $(1, 1/2, 1/3, \cdots)$

نتیجه: $(R-\lambda I)$ برای $|\lambda|<1$ پوشا است و درنتیجه وارون پیوسته دارد.

مثال: $L : \ell^2 \to \ell^2$ شیفت چپ $L(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3 \cdots)$

$$\lambda \in \sigma_p \Rightarrow Nul(L-\lambda I) \neq \{0\}$$

$$Lu = \lambda u \Rightarrow (x_2, x_3, \cdots) = \lambda(x_1, x_2, \cdots)$$

$$\lambda x_n = x_{n+1}$$

$$\Rightarrow x_n = \lambda^{n-1} x_1 \Rightarrow u = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \cdots) \overset{?}{\in} \ell^2$$

$$\Rightarrow |\lambda| < 1$$

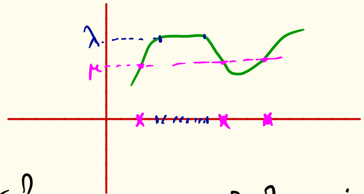
مثال -

$$T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

$$T_\varphi(f) = f\varphi$$

$$\lambda \in \sigma_p(T_\varphi) \Longrightarrow f\varphi = \lambda f \Rightarrow (\varphi(x)-\lambda)f(x) = 0$$

$\Rightarrow \quad f = 0$ یا $\varphi = \lambda$



$\lambda \in \sigma_p \iff \varphi(x) - \lambda$ لااقل در یک مجموعه باز صفر باشد.

$T_\varphi - \lambda I$ پوشا است $\iff$ به ازای هر $g \in C[0,1]$ ، $f(\varphi-\lambda) = g$ جواب داشته باشد.

$$\Updownarrow$$

$\varphi - \lambda = 0$ در $[0,1]$ ریشه نداشته باشد.

$$\Longrightarrow \sigma(T_\varphi) = \mathrm{Im}\,\varphi$$

قضیه: مجموعه حلال $\rho(T)$ از یک عملگر خطی پیوسته T روی فضای باناخ X، باز است یا به طور معادل $\sigma(T)$ بسته است.

لم: اگر X باناخ باشد و $T \in B(X,X)$ که $\|T\|<1$ آنگاه $I-T$ وارون‌پذیر است و

$$(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} T^n$$

اثبات ـ $S_k = \sum_{n=0}^{k} T^n$ یک دنباله کوشی در $B(X,X)$ است.

$k>l$

$$\|S_k - S_l\| = \|T^{l+1} + \cdots + T^k\| \leq \|T^{l+1}\| + \cdots + \|T^k\|$$
$$\leq \|T\|^{l+1} + \cdots + \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{l+1}}{1-\|T\|} \longrightarrow 0$$

از طرفی $B(X,X)$ فضای باناخ است و دنباله $\{S_k\}$ همگرا است. $S_k \longrightarrow S$

$$(I-T)S = \lim_{k\to\infty}(I-T)S_k = \lim_{k\to\infty}(I - T^{k+1}) = I$$

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$$ اثبات:

$\lambda_0 \in \rho(T)$ یعنی $R_{\lambda_0} \in B(X,X)$.

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) + (\lambda_0 - \lambda) I$$

$$= (T - \lambda_0 I)\left(I + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0} \right)$$

اگر $|\lambda - \lambda_0|$ به اندازه کافی کوچک باشد به طوری که $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|R_{\lambda_0}\| < 1$ بنابر لم قبل

$I + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}$ وارون پذیر است در نتیجه $T - \lambda I$

وارون پذیر است.

نتیجه:

$$R_\lambda = \left(I + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}\right)^{-1} \cdot R_{\lambda_0}$$

$$= \sum_{n \geq 0} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}$$ برای $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$

قضیه: X باناخ است و $T \in B(X,X)$ آنگاه $\sigma(T)$ فشرده است. درحقیقت $|\lambda| \le \|T\|$ برای $\lambda \in \sigma(T)$. درنتیجه $\rho(T)$ ناتهی است.

اثبات - اگر $|\lambda| > \|T\|$ آنگاه $T - \lambda I$ وارون‌پذیر است.

$$T - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)$$

$\left\|\frac{T}{\lambda}\right\| < 1$ ودرنتیجه $I - \lambda^{-1}T$ وارون‌پذیر است. (لم قبل)

تعریف: $r_\sigma(T) := \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ شعاع طیفی عملگر T.

قضیه بالا نشان می‌دهد که $r_\sigma(T) \le \|T\|$.

جلسه آینده اثبات می‌کنیم $r_\sigma(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه بیست‌ویکم ۹۵/۹/۲۳

$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} :$ وارون پذیر نباشد $T - \lambda I \}$

سوال: آیا $\sigma(T) \neq \emptyset$ اگر $T \in B(X, X)$؟

قبلاً نشان دادیم که $\sigma(T)$ فشرده است و $r_\sigma(T) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ شعاع طیفی و $r_\sigma(T) \leq \|T\|$

سوال: $r_\sigma(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$

$\lambda \in \rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T), \quad R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$

گزاره: X باناخ و $T \in B(X,X)$ ، $\lambda, \mu \in \rho(T)$ آنگاه

الف- $R_\lambda - R_\mu = (\lambda-\mu) R_\lambda R_\mu$

ب- R_λ با هر عملگر خطی $S \in B(X,X)$ که با T جابجا شود، جابجا می‌شود.

ج- $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$

قضیه: اگر X باناخ و $T \in B(X,X)$ آنگاه $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ برای هر چندجمله‌ای p.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$p(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_0 I$$

$$p(\sigma(T)) = \{ p(z) : z \in \sigma(T) \}$$

اثبات - حالت $n=0$، $p(x)=a_0$ ، $\checkmark\ \sigma(p(T)) = \sigma(a_0 I) = \{a_0\}$

$$\checkmark\ p(\sigma(T)) = \{a_0\}$$

در حالت $n>0$: $\mu \in \sigma(p(T)) \subseteq p(\sigma(T))$

$$p(x) - \mu = a_n (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_n)$$

اگر $\lambda_i \notin \sigma(T)$ آنگاه $T-\lambda_i I$ وارون پذیر است. اگر این اتفاق برای $1\le i\le n$ برقرار باشد آنگاه

$p(T)-\mu I$ وارون پذیر است که با شرط $\mu \in \sigma(p(T))$ تناقض دارد. بنابراین $\lambda_i \in \sigma(T)$ لااقل

برای یک $1\le i\le n$ و در نتیجه $p(\sigma(T)) \ni p(\lambda_i)=\mu$.

برعکس $p(\sigma(T)) \subseteq \sigma(p(T))$ ، $\lambda\in\sigma(T)$ وجود دارد و $\mu = p(\lambda)$

فرض کنید (از فرض خلف) $\mu \notin \sigma(p(T))$ در این صورت $p(T)-\mu I$ وارون پذیر است.

از طرفی می‌توان نوشت $p(x)-\mu = (x-\lambda)\, g(x)$

$$p(T)-\mu I = (T-\lambda I)\, g(T) = g(T)\,(T-\lambda I)$$

$\Rightarrow$ $T-\lambda I$ وارون پذیر است

یادآوری:

$$|\lambda| > \|T\|, \qquad R_\lambda = (T-\lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

گزاره: برای هر بردار ثابت $x \in X$ و تابعک $f \in X'$، تابع $h(\lambda) = f(R_\lambda x)$ در $\rho(T)$ تحلیلی است.

اثبات- برای هر $\lambda_0 \in \rho(T)$ برای $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ داریم

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1} \longrightarrow \text{همگرایی در } B(X,X)$$

$$h(\lambda) = f(R_\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n f(R_{\lambda_0}^{n+1} x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda-\lambda_0)^n$$

همگرایی در $\mathbb{C}$

این همگرایی در $|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ معتبر است.

قضیه: اگر $X\neq\{0\}$ فضای باناخ مختلط و $T\in B(X,X)$ آنگاه $\sigma(T)\neq\emptyset$.

اثبات ـ اگر $\sigma(T)=\emptyset \Longrightarrow \rho(T)=\mathbb{C}$. به ازای بردار دلخواه $x\in X$ و تابعک دلخواه $f\in X'$ ،

$h(\lambda)=f(R_\lambda x)$ روی $\mathbb{C}$ تحلیلی است (تام است)

$$|h(\lambda)|=|f(R_\lambda x)|\le \|f\|_{X'}\cdot\|R_\lambda\|\cdot\|x\|_X$$

$$R_\lambda=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \quad \text{برای } |\lambda|>\|T\| \Longrightarrow \|R_\lambda\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|T\|^n}{|\lambda|^{n+1}}=\frac{1}{|\lambda|}\times\frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}}$$

$$\Longrightarrow \|R_\lambda\|\le\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}$$

در نتیجه برای $|\lambda|\ge 2\|T\|$ داریم $\|R_\lambda\|\le\frac{1}{\|T\|}$ که کران دار است و روی مجموعه فشرده $|\lambda|\le 2\|T\|$ ، h تابع تحلیلی کران دار است. در نتیجه h تابع کران دار تام است و بنابر قضیه لیوویل یک تابع ثابت است.

$$\Rightarrow \quad f(R_\lambda x) = f(R_\mu x) \xrightarrow{f \text{ دلخواه}} R_\lambda x = R_\mu x$$

$$\Rightarrow \quad R_\lambda = R_\mu \quad \forall \lambda, \mu$$

$\cancel{\ }$

قضیه (شعاع طیفی) $\quad r_\sigma(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$

اثبات - $\quad r_\sigma(T) \leq \|T\|$ همیشه داریم

$$p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$$

$$\Rightarrow p(r_\sigma(T)) = r_{\sigma(p(T))}$$

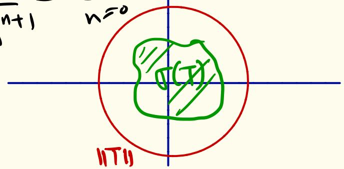
اگر $p(x) = x^n$ آنگاه

$$(r_\sigma(T))^n = r_{\sigma(T^n)} \leq \|T^n\|$$

$$r_\sigma(T) \leq \sqrt[n]{\|T^n\|} \Rightarrow r_\sigma(T) \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

$$R_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \qquad |\lambda| > \|T\|$$

$$h(\lambda) = f(R_\lambda x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(T^n x)}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu^{n+1}$$ ← روی $\rho(T)$ تحلیلی است.



لذا سری لوران به مرکز $\lambda=0$ که باید در $|\lambda| > r_\sigma(T)$ معتبر باشد.

$\left(|\mu| < \frac{1}{r_\sigma}\right)$

از طرفی شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر است با $\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r_\sigma + \varepsilon} h(\lambda)\, \lambda^n \, d\lambda \Rightarrow |c_n| \leq |r_\sigma + \varepsilon|^{n+1} \times \max_{|\lambda| = r_\sigma + \varepsilon} |h(\lambda)|$$

$$\Rightarrow |f(T^n x)| \leq |r_\sigma + \varepsilon|^{n+1} \times \|f\| \cdot \|x\| \times \max_{|\lambda| = r_\sigma + \varepsilon} \|R_\lambda\|$$

$$\|T^n\| = \sup_{\substack{f \neq 0 \\ x \neq 0}} \frac{|f(T^n x)|}{\|f\| \cdot \|x\|} \leq |r_\sigma + \varepsilon|^{n+1} \times \max_{|\lambda| = r_\sigma + \varepsilon} \|R_\lambda\|$$

$$\limsup \|T^n\|^{1/n} \leq r_\sigma + \varepsilon \implies \limsup \|T^n\|^{1/n} \leq r_\sigma$$

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه بیست و دوم ۹۵،۹،۲۸

عملگرهای فشرده

عملگر خطی $T: X \to Y$ فشرده گوییم هرگاه برای هر مجموعه کراندار $M \subseteq X$، $\overline{T(M)}$ در Y فشرده باشد.

فضای همه عملگرهای خطی فشرده را با $K(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

در واقع $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$ زیرا $\overline{T(B_1)}$ در Y فشرده است که B_1 گوی واحد در X است.

بنابراین $\overline{T(B_1)}$ کراندار است یعنی $\exists M,\ \|Tx\|_Y \le M$ به ازای هر $x \in B_1$.

$$\Rightarrow \|Tx\|_Y \le M \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

مثال- $I: X \to X$ فشرده نیست اگر $\dim X = \infty$.

چون B_1 در X فشرده نیست و $\overline{I(B_1)} = \overline{B_1}$.

مثال- اگر $\dim Y < \infty$ آنگاه هر عملگر پیوسته $T \in B(X,Y)$ فشرده است.

مثال- $T: C[a,b] \to C[a,b]$, $(Tu)(t) = \int_a^b K(s,t)\, u(s)\, ds$ که $K: [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته است.

عملگر T فشرده است.

$$|(Tu)(t)| \le \int_a^b |K(s,t)|\,|u(s)|\,ds$$

$$\le \int_a^b |K(s,t)|\,ds \times \|u\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|Tu\|_\infty \le \left(\int_a^b |K(s,t)|\,ds\right) \times \|u\|_\infty \Rightarrow \text{کراندار است.}$$

$$|(Tu)(t_1) - T(u)(t_2)| \le \int_a^b |K(s,t_1) - K(s,t_2)| \cdot |u(s)|\,ds$$

$\Rightarrow$ $\{T(B)\}$ یک مجموعه هم‌پیوسته است.

بنابر آرزلا-اسکولی $\overline{T(B)}$ فشرده است.

نکته: در تعریف عملگر فشرده، می‌توان گفت که T فشرده است اگر و تنها اگر $\overline{T(B_1)}$ در Y فشرده باشد که B_1 گوی واحد در X است.

نکته: T فشرده است اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله کران‌دار $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X داشته باشیم $\{Tu_n\}_{n=1}^{\infty}$ در Y زیردنباله همگرا داشته باشد.

اثبات. $\Leftarrow$ واضح است.

$\Rightarrow$ اگر $\overline{T(M)}$ فشرده نباشد، بنابر خاصیت فشردگی دنباله‌ای، دنباله $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $T(M)$ وجود دارد که هیچ زیردنباله همگرایی ندارد. از طرفی $y_n = Tx_n$ به طوری که $x_n \in M$ در نتیجه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله کران‌دار در X است. (زیرا M کران‌دار است.)

<u>گزاره</u>: اگر $T\in B(X,Y)$ و $S\in B(Y,Z)$ باشند، آنگاه ST فشرده است اگر لااقل یکی از عملگرهای T یا S فشرده باشند.

اثبات. فرض کنید مثلاً T فشرده باشد، آنگاه $\overline{T(B_1)}$ در Y فشرده است. S یک عملگر پیوسته است و $S(\overline{T(B_1)})$ در Z فشرده است در نتیجه

$$\overline{ST(B_1)} = S(\overline{T(B_1)})$$ فشرده است.

(نکته: اگر A فشرده باشد $S(A)=\overline{S(A)}$)

نتیجه: عملگرهای وارون‌پذیر در فضاهای با بعد نامتناهی فشرده نیستند.

تعریف: $T: X \to Y$ عملگر پیوسته باشد، $\operatorname{rank} T = \dim \operatorname{Im} T$

اگر $\operatorname{rank} T < \infty$ آن را عملگر با رتبه متناهی گوییم.

با این تعریف، هر عملگر با رتبه متناهی فشرده است.

فشرده

قضیه: اگر $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای رتبه متناهی باشد که $\|T_n - T\| \to 0$ آنگاه T فشرده است.

اثبات: اگر $\{x_n\}$ یک دنباله کران‌دار در X باشد، باید ثابت کنیم $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ در Y زیردنباله همگرا دارد.

از طرفی به ازای هر m، $\{T_m x_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله همگرا دارد. اگر $\{T_1 x_{n,1}\}$ همگرا باشد

یک زیردنباله از $\{T_2 x_{n,1}\}_{n_1=1}^{\infty}$ وجود دارد که همگرا است مانند $\{T_2 x_{n,2}\}^{\infty}$

به همین شیوه زیردنباله $\{x_{n,m}\}$ از $\{x_{n,m}\}$ وجود دارد که $\{T_m x_{n,m}\}$ همگرا است.

می‌توان دید که زیردنباله $\{x_{n,n}\}$ برای x داریم که $\{T_m x_{n,n}\}$ همگرا است به ازای هر m.

$$\|Tx_{n,n} - Tx_{k,k}\| \le \|Tx_{n,n} - T_m x_{n,n}\| + \|T_m x_{n,n} - T_m x_{k,k}\| + \|T_m x_{k,k} - Tx_{k,k}\|$$

$$\le \|T - T_m\| \cdot \|x_{n,n}\| + \|T_m x_{n,n} - T_m x_{k,k}\| + \|T_m - T\| \cdot \|x_{k,k}\|$$

دنباله $\{x_n\}$ کراندار است پس می‌توان m را به‌گونه‌ای تعیین کرد که جمله اول و سوم رابطه بالا هرکدام از $\varepsilon/3$ کوچکتر باشند بازای آن مقدار m ، می‌توان k و n را به اندازه کافی بزرگ کرد که جمله دوم از $\varepsilon/3$ کوچکتر باشد.

مثال- $T: \ell^p \to \ell^p$

$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$ فشرده است.

$T_n(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \cdots) \leftarrow$ عملگر با رتبه متناهی و در نتیجه فشرده است.

$$\|(T - T_n)(X)\|_{\ell^p} = \|(0, \dots, 0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \cdots)\|_{\ell^p}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \|X\|_{\ell^p}$$

$$\Rightarrow \|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow$ T فشرده است.

نکته: اگر در قضیه قبل به جای همگرایی $\|T_n - T\| \to 0$ فرض کنیم $T_n(x) \to T(x)$ به ازای هر $x \in X$

نتیجه به دست آمده درست نیست. به عنوان مثال

$T_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ $\leftarrow$ رتبه متناهی و فشرده هستند.

$$T_n x \longrightarrow Tx = x$$

ولی عملگر همانی فشرده نیست.

گزاره: اگر T فشرده باشد، ImT و $\overline{ImT}$ جدایی‌پذیر هستند.

$$ImT = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n)}$$

گوی به شعاع

فشرده است

قضیه: اگر X فضای نرمدار و $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت و $T \in K(X,\mathcal{H})$ آنگاه دنباله $\{T_n\}$ از عملگرها

با رتبه متناهی وجود دارد که $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.

اثبات. می‌توان به جای $\mathcal{H}$، $\overline{Im T}$ قرارداد و بنابراین از قبل فرض کرد که تصویر T فضای هیلبرت جدایی‌پذیر است.

در نتیجه پایه هیلبرتی $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد. $\overline{Im T} = \overline{Span\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$

عملگر تصویر $P_n : \overline{Im T} \longrightarrow Span\{e_1, \dots, e_n\}$

$T_n := P_n \circ T$ یک عملگر رتبه متناهی است.

ادعا می‌کنیم که $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. فرض کنیم چنین نباشد. زیردنباله‌ای وجود دارد که $\|T_n - T\| \geq \varepsilon$. در نتیجه $\|x_n\| = 1$ وجود دارد که

$$\|(T_n - T)(x_n)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

T فشرده است ، در نتیجه $\{Tx_n\}$ زیردنباله همگرا دارد ، فرض کنید $Tx_n \longrightarrow y$

$$(T_n - T)(x_n) = P_n \circ T(x_n) - T(x_n) - P_n y + y + (P_n y - y)$$

$$= P_n(Tx_n - y) - (Tx_n - y) + (P_n y - y)$$

$$\| P_n (Tx_n - y) \| \leq \underbrace{\|P_n\|}_{=1} \cdot \|Tx_n - y\| \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \quad \|(T_n - T)(x_n)\| \longrightarrow 0$$

آنالیز آماری مقدماتی

جلسه بیست و سه ۹۵/۹/۳۰

$$T : H_1 \longrightarrow H_2$$ H هیلبرت

$$T^* : H_2 \longrightarrow H_1$$

$$\langle T^* x , y \rangle_{H_1} = \langle x , Ty \rangle_{H_2}$$

<u>گزاره:</u> اگر $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

اثبات - T فشرده است $\Leftarrow$ $T_n \longrightarrow T$ که $\operatorname{rank} T_n < \infty$. $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$

$$\Downarrow$$

$$\|T_n^* - T^*\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{rank} T_n^* < \infty$$ اگر بدانیم T^* فشرده است

$$\operatorname{Ker} T_n^* = (\operatorname{Im} T_n)^{\perp} \Rightarrow (\operatorname{Ker} T_n^*)^{\perp} = (\operatorname{Im} T_n)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} T_n}$$

$$\mathcal{H}_2 = \operatorname{Ker} T_n^* \oplus (\operatorname{Ker} T_n^*)^{\perp} = \operatorname{Ker} T_n^* \oplus \overline{\operatorname{Im} T_n}$$

$$\operatorname{Im} T_n^* = T_n^*(\mathcal{H}_2) = T_n^*(\overline{\operatorname{Im} T_n})$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T_n^* \leq \dim \operatorname{Im} T_n$$

قضیه: X و Y فضاهای نرم‌دار و $T: X \longrightarrow Y$ فشرده، اگر $\{x_n\}$ در X همگرای ضعیف به x باشد، آنگاه $\{Tx_n\}$ در Y همگرای قوی به $y = Tx$ است.

اثبات_ $\left(x_n \xrightarrow{w} x\right) \Rightarrow \left(\forall f \in X', \quad f(x_n) \longrightarrow f(x)\right)$

واضح است که $Tx_n \xrightarrow{w} y$ زیرا برای $g \in Y'$ آنگاه $g \circ T \in X'$

$$\Rightarrow \quad g\circ T(x_n) \longrightarrow g\circ Tx \Rightarrow g(Tx_n) \longrightarrow g(y)$$

اگر $Tx_n \not\longrightarrow y$ آنگاه زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ وجود دارد که $\|Tx_{n_k} - y\| > \varepsilon$ از طرفی دنباله $\{x_n\}$ همگرای ضعیف است و درنتیجه کران‌دار. بنابراین $\{Tx_{n_k}\}$ زیردنباله‌ای دارد که به طور قوی همگرا است. حد این زیردنباله نمی‌تواند y باشد و از طرف دیگر همگرای ضعیف است به y. این تناقض است زیرا حد همگرای ضعیف یکتا است.

طیفِ عملگرهای فشرده

$T: X \longrightarrow X$ فشرده

(۱) $0 \in \sigma(T)$ اگر بعد فضا نامتناهی باشد.

(۲) $\sigma_{ess}(T) \subseteq \{0\}$

(۳) $\sigma_p(T)$ شمارا است و تنها نقطه تجمع ممکن آن صفر است.

(۴) بعد هر فضای ویژه، متناهی است (برای هر مقدار ویژه ناصفر)

مثال- $R: l^2 \longrightarrow l^2$ ، $Rx = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$

$0 \notin \sigma(R) \iff R$ وارون پذیر است

$R^{-1}x = (x_2, 2x_3, 3x_4, \dots)$

پیوسته نیست.

$$Rx = \lambda x \Rightarrow (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots)$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = 0 \Rightarrow \sigma_p = \emptyset$$

$\lambda \notin \sigma_{ess} \iff R - \lambda I$ پوشا است

$$Rx-\lambda x=e_n \Rightarrow \left(-\lambda x_1,\ x_1-\lambda x_2,\ \frac{x_2}{2}-\lambda x_3,\ \cdots\right)=(0,\dots,0,1,0,\cdots)$$

$$x_1=\dots=x_{n-1}=0\ ,\quad -\lambda x_n=1$$

$$\frac{x_n}{n}=\lambda x_{n+1}\ ,\ \dots\quad -\lambda x=\left(0,\dots,0,1,\frac{1}{n},\frac{1}{n(n+1)},\cdots\right)\in\ell^2$$

$$e_n\in \mathrm{Im}(R-\lambda)$$

ازطرفی $\mathrm{Im}(R-\lambda)$ بسته است (بعداً نشان می‌دهیم) $\Leftarrow$ $R-\lambda$ پوشا است.

نتیجه - $\sigma(R)=\sigma_{ess}(R)=\{0\}$

مثال - $Lx=\left(x_2,\frac{x_3}{2},\frac{x_4}{3},\cdots\right)$

$$Lx=\lambda x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\lambda x_1\\ x_3=2\lambda x_2\\ \vdots\end{cases} \Leftrightarrow x=x_1(1,\lambda,2\lambda^2,6\lambda^3,\dots)\in\ell^2$$

$$\Leftrightarrow \sum (n!)^2\lambda^{2n}<\infty$$

$$\Rightarrow \lambda=0\in\sigma_p$$

$$\mathrm{Nul}(L)=\langle e_1\rangle$$

اثبات خاصیت 1 : اگر $0 \notin \sigma(T)$ آنگاه T^{-1} پیوسته است و در نتیجه $T \circ T^{-1} = Id$ فشرده است.

اگر بعد فضا نامتناهی باشد این تناقض است.

اثبات خاصیت 3 در واقع نشان میدهیم برای هر $r > 0$ تعداد مقادیر ویژه $|\lambda| \geq r$ متناهی است.

فرض کنیم چنین نباشد و $Tx_n = \lambda_n x_n$ که $|\lambda_n| \geq r$ و $\|x_n\| = 1$. (λ_n مقادیر ویژه متمایز)

در نتیجه دنباله بردارهای $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ مستقل خطی هستند.

$$M_n = Span\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$T - \lambda_n I : M_n \longrightarrow M_{n-1}$$

بنابر لم ریس $y_n \in M_n$ وجود دارد که

$$\frac{1}{2} \leq dist(y_n, M_{n-1}) \quad , \quad \|y_n\| = 1$$

ادعا: $\|Ty_n - Ty_m\| \geq r/2$ که متناقض است با فشردگی T.

$n>m:$ $$Ty_n - Ty_m = \underbrace{(T-\lambda_n I)y_n}_{\in M_{n-1}} + \lambda_n y_n - \underbrace{Ty_m}_{\in M_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda_n| \cdot \operatorname{dist}(y_n, M_{n-1}) \geq r/2$$

اثبات خصیصه ۴) فرض کنید $\lambda \neq 0$ مقدار ویژه است به ازای هر $x \in Nul(T-\lambda I)$ داریم $Tx = \lambda x$

بنابراین گوی واحد در $Nul(T-\lambda I)$ تحت عملگر T به گوی به شعاع λ تصویر می‌شود. چون T فشرده است

پس گوی به شعاع λ فشرده است و در نتیجه بعد فضای $Nul(T-\lambda I)$ متناهی است.

آنالیز تابعی مقدماتی

جلسه بیست و چهارم ۹۵/۱۰/۵

طیف عملگرهای فشرده

$$\sigma_{ess}(T) \subseteq \{0\}$$

$T: X \longrightarrow X$ فشرده ، X فضای باناخ

$$T_\lambda = T - \lambda I$$

ایده کلی اثبات : $\lambda \neq 0$ ،

$N(T_\lambda^0) \subseteq N(T_\lambda) \subseteq N(T_\lambda^2) \subseteq \cdots$ از جایی به بعد ثابت است.

$\mathrm{Im}(T_\lambda^0) \supseteq \mathrm{Im}(T_\lambda) \supseteq \mathrm{Im}(T_\lambda^2) \supseteq \cdots$ همچنین این زنجیره از جایی به بعد ثابت است.

درحقیقت این دو زنجیره هم زمان هر دو ثابت می‌باشند.

$\lambda \in \sigma_p \iff N(T_\lambda) \neq \{0\}$ ، $\lambda \in \sigma_{ess} \iff N(T_\lambda) = \{0\}$ و $\mathrm{Im}(T_\lambda) \neq X$.

گزاره ۱ $\dim(N(T_\lambda^n))<\infty$ برای $\lambda\neq 0$.

اثبات: $n=1$ ← طبق قبل اثبات شد.

$n=2$ ← $T_\lambda^2=(T-\lambda I)^2=\underbrace{T^2-2\lambda T}_{\text{فشرده}}+\lambda^2 I$

n دلخواه $(T-\lambda I)^n = S+(-\lambda)^n I$ که S یک عملگر فشرده است درنتیجه $\infty > \dim(Nul(S+(-\lambda)^n I))$

گزاره ۲ عدد صحیح r وجود دارد که برای $n\geq r$ همه فضاهای پوچ $Nul(T_\lambda^n)$ برابر هستند

$$\{0\}=N(T_\lambda^0)\subsetneq N(T_\lambda)\subsetneq N(T_\lambda^2)\subsetneq\cdots\subsetneq N(T_\lambda^r)=N(T_\lambda^{r+1})=\cdots$$

تعریف: r را اکثر مقدار ویژه λ می‌نامیم.

اثبات - قرار دهید $N_n = N(T_\lambda^n)$ ، اگر $N_m = N_{m+1}$ آنگاه برای هر $n \geq m$ داریم $N_n = N_{n+1}$.

زیرا در غیر اینصورت $x \in N_{n+1} \setminus N_n$ ، $T_\lambda^{n+1} x = 0$ ولی $T_\lambda^n x \neq 0$.

$$T_\lambda^{m+1}(T_\lambda^{n-m} x) = 0 \quad , \quad T_\lambda^m (T_\lambda^{n-m} x) \neq 0$$

$$\Longrightarrow N_{m+1} \neq N_m \quad \times$$

فرض کنید $N_n \subsetneq N_{n+1}$ بنابراین $y_{n+1} \in N_{n+1}$ وجود دارد که $\|y_{n+1}\| = 1$ ، $\mathrm{dist}(y_{n+1}, N_n) \geq \frac{1}{2}$

چون T فشرده است باید $\{Ty_n\}$ زیر دنباله همگرا داشته باشد ولی

$$n > m \quad Ty_n - Ty_m = T_\lambda y_n - T_\lambda y_m + \lambda(y_m - y_n) = \tilde{x} - \lambda y_n$$

که $\tilde{x} \in N_{n-1}$

$$T_\lambda : N^{k+1} \longrightarrow N^k$$

$$\Longrightarrow \|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda| \cdot \mathrm{dist}(y_n, N_{n-1}) \geq \frac{|\lambda|}{2}$$

$\Longrightarrow$ $\{Ty_n\}$ کوشی نیست $\times$

گزاره ۳ $Im(T_\lambda^n)$ بسته است برای $\lambda\neq 0$.

اثبات ـ کافیست برای $n=1$ ثابت شود زیرا $T_\lambda^n = S+\mu I$ که $\mu\neq 0$ و S فشرده است.

فرض کنید $Im\, T_\lambda$ بسته نباشد و $0\neq y\in \overline{Im\, T_\lambda}\setminus Im\, T_\lambda$ دنباله $x_n\in X$ وجود دارد که $y_n = T_\lambda x_n \longrightarrow y$

فرض کنید $y_n\neq 0$ یعنی $x_n\notin Nul(T_\lambda)$.

x_n کراندار $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} Tx_n \longrightarrow v \\ T_\lambda x_n \longrightarrow y \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n \longrightarrow \omega \Rightarrow T_\lambda \omega = y \in Im\, T_\lambda$$

لزومی ندارد که $\{x_n\}$ کراندار باشد برای رفع این مشکل $z_n\in Nul(T_\lambda)$ در نظر می‌گیریم که

$$\|x_n - z_n\| \leq 2\, dist(x_n, Nul(T_\lambda)) = a_n$$

اگر a_n کراندار باشد آنگاه $T_\lambda(x_n - z_n) = y_n$ و اثبات بالا برای دنباله کراندار $\{x_n - z_n\}$ به جای $\{x_n\}$ درست است.

اگر a_n بیکران باشد، $w_n = \frac{x_n - z_n}{a_n}$ آنگاه $\|w_n\| = 1$

$$T_\lambda w_n = \frac{1}{a_n}\left(T_\lambda(x_n - z_n)\right) = \frac{1}{a_n} y_n \longrightarrow 0$$

از طرف دیگر دنباله $\{Tw_n\}$ زیردنباله همگرا دارد زیرا T فشرده و $\{w_n\}$ کراندار. درنتیجه

$$w_n = \frac{Tw_n - T_\lambda w_n}{\lambda}$$

درحد زیردنباله همگرا است. اگر $w_n \longrightarrow w \Longleftarrow T_\lambda w = 0$

$$\Longrightarrow w \in Nul(T_\lambda)$$

$$x_n = a_n w_n + z_n, \qquad \|x_n - \underbrace{(a_n w + z_n)}_{\in Nul}\| \geq dist(x_n, Nul) = \frac{a_n}{2}$$

$$\Longrightarrow a_n \|w_n - w\| \geq \frac{a_n}{2}$$

$$\Longrightarrow \|w_n - w\| \geq 1/2$$

گزاره ۴: عدد صحیح q وجود دارد که برای $n \geq q$، $\mathrm{Im}(T_\lambda^n) = \mathrm{Im}(T_\lambda^{n+1})$.

$$\mathrm{Im}(T_\lambda^0) \supsetneq \mathrm{Im}(T_\lambda) \supsetneq \mathrm{Im}(T_\lambda^2) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Im}(T_\lambda^q) = \mathrm{Im}(T_\lambda^{q+1})$$

اثبات - $R_n = \mathrm{Im}(T_\lambda^n)$ ، $T_\lambda : R^n \longrightarrow R^{n+1}$.

اگر $R_{n-1} \supsetneq R_n$ چون R_n بسته است بنابراین طبق گزاره ۲ $x_{n-1} \in R_{n-1}$ که $\|x_{n-1}\| = 1$ و

$$\mathrm{dist}(x_{n-1}, R_n) \geq 1/2$$

$m<n$ $\quad \|Tx_n - Tx_m\| = \|T_\lambda x_n - T_\lambda x_m + \lambda(x_m - x_n)\|$

$$= \|\lambda x_m + \underbrace{(T_\lambda x_n - T_\lambda x_m - \lambda x_n)}_{\in R_{m+1}}\| \geq |\lambda|/2$$

$\Leftarrow \{Tx_n\}$ زیردنباله همگرا ندارد که با فشرده بودن T تناقض دارد.

گزاره ۵ دو عدد صحیح r و q که در گزاره‌های ۲ و ۴ به دست آمدند برابرند.

اثبات:

$$\{0\} \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots \subsetneq N_r = N_{r+1} = \cdots$$

$$X \supsetneq R_1 \supsetneq R_2 \supsetneq \cdots \supsetneq R_q = R_{q+1} = \cdots$$

$T_\lambda : R_q \longrightarrow R_q$ پوشا است.

ادعا: $T_\lambda : R_q \longrightarrow R_q$ یک به یک است. $\Leftarrow$ $R_q = Im(T_\lambda^q)$, $N_q = N_{q+1}$ زیرا در غیر اینصورت

$$\left.\begin{array}{l} x \in N_{q+1} \setminus N_q \Rightarrow T_\lambda^{q+1} x = 0 \neq T_\lambda^q x \in R_q \\ T_\lambda (T_\lambda^q x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Nul(T_\lambda|_{R_q}) \neq \{0\}$$

تناقض با ادعای بالا.

در نتیجه ادعای بالا ثابت می‌کند که $r \le q$.

اثبات ادعا: فرض کنید $T_\lambda : R_q \longrightarrow R_q$ یک به یک نباشد. $\Leftarrow$ $\exists\, 0 \neq x_1 \in R_q$ که $T_\lambda x_1 = 0$

از طرفی $T_\lambda : R_q \to R_q$ پوشا است پس $x_1 = T_\lambda x_2$ که $0 \neq x_2 \in R_q$ به همین ترتیب

$$0 \neq x_n \in N_n \Leftarrow 0 = T_\lambda^n x_n \Leftarrow x_n = T_\lambda x_{n+1}$$

اما $T_\lambda^{n-1} x_n = x_1 \neq 0$ یعنی $x_n \notin N_{n-1}$ یعنی زنجیره در هیچ مرحله توقف نمی‌کند که با گزاره ۲ تناقض است.

$$N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots$$

اکنون نشان می‌دهیم $r \geq q$. برای این کار کافی است ثابت کنیم $N_{q-1} \neq N_q$.

$R_q \neq R_{q-1} \Rightarrow y \in R_{q-1} \setminus R_q \Rightarrow y = T_\lambda^{q-1} x$ که $x \notin R_1$.

$$T_\lambda y \in R_q = R_{q+1} \Rightarrow T_\lambda y = T_\lambda^{q+1} z$$

$$T_\lambda^{q} (x - T_\lambda z) = 0 \Rightarrow x - T_\lambda z \in N_q$$

$$T_\lambda^{q-1} (x - T_\lambda z) = y - T_\lambda^{q} z \neq 0$$

زیرا $y \notin R_q$. در نتیجه $x - T_\lambda z \in N_q \setminus N_{q-1}$.