به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس آنالیز تابعی مقدماتی، ۸۹/۸/۲۹

۱- نشان دهید هر دو نرم در فضای با بعد متناهی هم‌ارز هستند.

۲- فرض کنید c_0 زیرفضای ℓ^∞ شامل همه دنباله‌های همگرا به صفر باشد.

الف- نشان دهید c_0 زیرفضای بسته ℓ^∞ است.

ب- فاصله $x = (1,1,1,\ldots)$ را از این زیرفضا محاسبه کنید.

ج- ثابت کنید $(c_0)'$ به طور ایزومتری با ℓ^1 یکریخت است.

۳- یک زیرفضای غیر بسته در ℓ^∞ مثال بزنید. (همراه با اثبات)

۴- ثابت کنید یک فضای هیلبرت پایه هیلبرتی دارد اگر و تنها اگر جدایی‌پذیر باشد.

۵- فضای بازتابی را تعریف کنید. از فضاهای ℓ^p کدامیک بازتابی هستند؟ (همراه با اثبات)

۶- عملگر $T : \ell^2 \to \ell^2$ با ضابطه $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots)$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید T پیوسته است و نرم آن را محاسبه کنید. عملگر الحاقی آن را محاسبه کنید.

۷- برای هر عدد حقیقی $s > 0$، قرار دهید $H^s = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)^s \left| a_n \right|^2 < \infty \right\}$. نشان دهید

الف- برای هر $s > 0$، H^s زیرفضای چگال و سره ℓ^2 است.

ب- H^s با نرم $\left\| (a_n) \right\|_s = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)^s \left| a_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای هیلبرت است. ضرب داخلی متناظر این نرم را بنویسید.

ج- یک تابعک خطی روی H^s وجود دارد که نسبت به نرم $\| \ \|_s$ پیوسته است ولی نسبت به نرم ℓ^2 پیوسته نیست. (دقت کنید که روی H^s دو نوع نرم می‌توان گذاشت، یکی $\| \ \|_s$ که در بالا تعریف شده است و دیگری نرمی که به عنوان زیرفضای ℓ^2 به ارث می‌برد.)