به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس آنالیز تابعی مقدماتی، ۸۹/۱۰/۲۱

۱ -اگر Y زیرفضای بسته فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، ثابت کنید $\mathcal{H} = Y \oplus Y^{\perp}$. با یک مثال نشان دهید شرط بسته بودن زیرفضا الزامی است.

۲ -اگر $x_n \rightharpoonup x$ به طور ضعیف در فضای نرمدار X، آنگاه دنباله $\{y_n\}$ از ترکیبات خطی $\{x_n\}$ وجود دارد که $y_n \to x$ به طور قوی.

۳ -اگر $T : X \to X$ عملگر فشرده روی فضای نرمدار X باشد و $\lambda \neq 0$، نشان دهید تعداد جوابهای مستقل معادلههای $Tx = \lambda x$ و $T^* f = \lambda f$ برابرند. برای $\lambda = 0$ مثال نقض بیاورید.

۴ -مثالی از یک عملگرخطی $0 \neq T \in B(\ell^2)$ بزنید که $\sigma(T) = \{0\}$.

۵ -اگر بعد تصویر عملگر $T \in B(X)$ متناهی باشد، ثابت کنید $\sigma(T)$ یک مجموعه متناهی است.

۶ -ثابت کنید فضای باناخ X بازتابی است اگر و تنها اگر X' بازتابی باشد.

۷ -نشان دهید برای هر عملگر تصویری $P \in B(\mathcal{H})$ داریم $\sigma(P) \subseteq \{0, 1\}$.

۸ -اگر $TS = ST$ ثابت کنید که $r_\sigma(ST) \le r_\sigma(S) r_\sigma(T)$. به علاوه نشان دهید شرط جابجایی S و T الزامی است.

۹ -اگر $S \in B(\mathcal{H})$ خودالحاق بوده و $\sigma(S) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ نشان دهید که عملگرهای تصویری $P_1, P_2, \dots, P_n \in B(\mathcal{H})$ وجود دارند که $P_j P_k = 0$ برای $j \neq k$ و $\sum_{j=1}^{n} P_j = I$، به علاوه $S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$.

۱۰ -فرض کنید $f \neq 0$ تابعک خطی پیوسته روی فضای نرمدار X باشد و $M = \ker f$.

الف- ثابت کنید برای هر $x \in X$، داریم: $dist(x, M) = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$.

ب- برای فضای $X = \{u \in C[0,1] : u(0) = 0\}$ و تابعک $f(u) = \int_0^1 u(t)dt$ نشان دهید برای هر $u \in X$ داریم: $dist(u, M) = \left| \int_0^1 u(t)dt \right|$ و به علاوه برای هر بردارهای $u \in X - M$ مقدار $\inf_{v \in M} \|u - v\|$ اتخاذ نمیشود.