به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری سوم درس آنالیز تابعی مقدماتی ، ۸۹/۸/۲۴

۱ -عملگر $T:\ell^{2}\to\ell^{2}$ با ضابطه $T(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,4x_1,x_2,4x_3,x_4,\dots)$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید T پیوسته است و نرم آن را محاسبه کنید. عملگر الحاقی آن را محاسبه کنید.

۲ -در فضای هیلبرت مختلط H آنگاه عملگر $T\in B(H)$، وارونپذیر است اگر و تنها اگر $KerT^{*}=0$ و ثابت $\alpha>0$ وجود داشته باشد که $\|Tx\|\geq\alpha\|x\|$.

۳ -در فضای هیلبرت مختلط H آنگاه عملگر نرمال $T\in B(H)$ ، وارونپذیر است اگر و تنها اگر ثابت $\alpha>0$ وجود داشته باشد که $\|Tx\|\geq\alpha\|x\|$.

۴ -ثابت کنید برای هر $T\in B(H)$، عملگر $I+T^{*}T$ وارونپذیر است.

۵ -اگر $0\neq T\in B(H)$ خودالحاق باشد، ثابت کنید که $T^{n}\neq 0$ برای هر n.

۶ -در فضای هیلبرت مختلط H اگر عملگر $T\in B(H)$ در رابطه $\|Tx\|=\|T^{*}x\|$ برای هر $x\in H$ صدق کند، آنگاه T نرمال خواهد بود.

۷ -نشان دهید مجموعه عملگرهای نرمال یک زیرمجموعه بسته $B(H)$ است.

۸ -نشان دهید عملگر $T\in B(H)$ تصویر متناهی بعد دارد اگر و تنها اگر بردارهای $\{v_i,w_i\}_{i=1}^{n}\in H$ وجود داشته باشند که عملگر T نمایشی به صورت زیر داشته باشد

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}\langle x,v_i\rangle w_i$$

۹ -نشان دهید نگاشت $P\in B(H)$ تصویری است (تصویر روی یک زیرفضای بسته H) اگر و تنها اگر P خودالحاق بوده و $P^{2}=P$.

۱۰ -الف- نشان دهید در فضای هیلبرت مختلط H هر عملگر $T\in B(H)$ نمایش یکتایی به صورت $T=S_1+iS_2$ دارد که S_1 و S_2 خودالحاق هستند.

ب- ثابت کنید عملگر T نرمال است اگر و تنها اگر S_1 و S_2 جابهجا شوند.