به نام او

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری دوم درس آنالیز تابعی مقدماتی ، ۸۹/۸/۱۵

۱- ثابت کنید اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ برای هر $\{x_n\} \in \ell^1$ متناهی باشد، آنگاه $\{\alpha_n\} \in \ell^\infty$.

۲- اگر Z زیرفضای X باشد و $x_\circ \in X \setminus Z$ که $0 < dist(x_\circ, Z)$، آنگاه $f \in X'$ وجود دارد که $f\big|_Z = 0$، $f(x_\circ) = dist(x_\circ, Z)$ و $\|f\|_{X'} = 1$.

۳- نشان دهید تابعک ناصفر $f \in (\ell^\infty)'$ وجود دارد که $f(e_n) = 0$. به کمک آن نشان دهید عملگر طبیعی $T : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ پوشا نیست.

۴- نشان دهید اگر فضای دوگان X' جداپذیر باشد، X نیز جداپذیر است.

۵- اگر S_r کره به مرکز صفر و شعاع r در فضای نرم‌دار X باشد و $x_\circ \in S_r$، نشان دهید تابعک $f \in X'$ وجود دارد که علامت $f(x - x_\circ)$ وقتی x در S_r تغییر می‌کند ثابت می‌ماند.

۶- فرض کنید که X یک فضای ضرب داخلی است. نشان دهید که دو بردار x و y برهم عمودند اگر و تنها اگر $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$.

۷- یک بار با محاسبه مستقیم و بار دیگر به کمک رابطه متوازی‌الاضلاع رابطه زیر را در یک فضای ضرب داخلی اثبات کنید.

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{1}{2}(x + y)\right\|^2$$

۸- اگر نرم فضای برداری حقیقی در قاعده متوازی الاضلاع صدق کند، رابطه زیر ضرب داخلی روی این فضا است.

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

۹- اگر X فضای ضرب داخلی باشد، نشان دهید $A^\perp = \left(\overline{A}\right)^\perp$ برای هر $A \subseteq X$.

۱۰- X و Y زیرفضاهای برداری فضای ضرب داخلی H هستند، ثابت کنید $(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$ که $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$.

۱۱- اگر H فضای هیلبرت باشد، نشان دهید رابطه $(f,g)_{H'} = (b,a)_H$ یک ضرب داخلی روی H' تعریف می‌کند که a و b به کمک نمایش ریس برای تابعکهای f و g به دست می‌آیند، $f(x) = (x,a)_H$ و $g(x) = (x,b)_H$.

۱۲- اگر $\{e_n\}$ یک دنباله متعامد یکه در فضای ضرب داخلی X باشد. برای بردار ثابت $x \in X$ مقدار مینیمم عبارت $\|x-y\|$ وقتی $y \in \overline{Span\{e_n\}}$ تغییر می‌کند را به دست آورید.

۱۳- H فضای هیلبرت و $\{e_n\}$ یک پایه هیلبرتی برای آن است. ثابت کنید $(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)(e_n,y)$ برای هر $x,y \in H$.