به نام او

تمرین سری اول درس آنالیز تابعی مقدماتی ، ۸۹/۷/۲۴

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

۱- اگر $X \neq 0$ فضای برداری نرم‌دار باشد، نشان دهید متر زیر نمی‌تواند از یک نرم به دست بیاید.

$d(x,y) = \|x-y\| + 1$ برای $x \neq y$ و $d(x,x) = 0$

۲- آیا فضای برداری $C[a,b]$ با نرم سوپریمم یک فضای جداپذیر است؟ فضای توابع کران‌دار $B[a,b]$ با همین نرم چه‌طور؟

۳- الف- اگر Y زیرفضای بسته فضای برداری نرم‌دار $(X, \| \ \|_X)$ باشد، نشان دهید $\| \ \|_0$ یک نرم روی فضای برداری خارج قسمتی $\frac{X}{Y}$ است.

$$\|x+Y\|_0 = \inf_{z \in x+Y} \|z\|_X$$

ب- نشان دهید اگر X فضای باناخ باشد، فضای $\frac{X}{Y}$ نیز باناخ است.

۴- یک عملگر خطی مثال بزنید که فضای پوچ آن بسته نباشد.

۵- یک مثال از فضاهای برداری Y و Z بزنید که Y زیرفضای بسته Z است ولی بردار $z \in Z$ وجود ندارد که $\|z\| = 1$ و $d(z,Y) = 1$.

۶- فضاهای نرم‌دار X را در نظر بگیرید که $\dim X = \infty$. نشان دهید دو فضای X' و X^* متفاوت هستند.

۷- فرض کنید c_0 زیرفضای ℓ^∞ شامل همه دنباله‌های همگرا به صفر باشد. ثابت کنید $(c_0)'$ به طور ایزومتری با ℓ^1 یکریخت است.

۸- تمرینهای ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۴ و ۱۵ صفحه ۱۱۰ کتاب.