تمرین سری دوم درس آنالیز تابعی مقدماتی

۱-فضاهای نرم‌دار X و $Y\neq 0$ را در نظر بگیرید که $\dim X=\infty$. نشان دهید حداقل یک عملگر خطی بیکران $T:X\to Y$ وجود دارد.

۲-ثابت کنید اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ برای هر $\{x_n\}\in \ell^1$ متناهی باشد، آنگاه $\{\alpha_n\}\in \ell^\infty$.

۳-نشان دهید تابعک ناصفر $f\in(\ell^\infty)'$ وجود دارد که $f(e_n)=0$. به کمک آن نشان دهید عملگر طبیعی $T:\ell^1\to(\ell^\infty)'$ پوشا نیست.

۴-فرض کنید c_0 زیرفضای ℓ^∞ شامل همه دنباله‌های همگرا به صفر باشد. ثابت کنید $(c_0)'$ به طور ایزومتری با ℓ^1 یکریخت است.

۵-نشان دهید اگر فضای دوگان X' جداپذیر باشد، X نیز جداپذیر است.

۶-عملگر $T:\ell^2\to\ell^2$ با ضابطه $T(x_1,x_2,x_3,...)=(0,4x_1,x_2,4x_3,x_4,...)$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید T پیوسته است و نرم آن را محاسبه کنید. عملگر الحاقی آن را محاسبه کرده و به کمک آن $\sigma(T)$ را محاسبه کنید.

۷-اگر H فضای هیلبرت باشد، نشان دهید رابطه $(f,g)_{H'}=(b,a)_H$ یک ضرب داخلی روی H' تعریف می‌کند که a و b به کمک نمایش ریس برای تابعکهای f و g به دست می‌آیند، $f(x)=(x,a)_H$ و $g(x)=(x,b)_H$.

۸-اگر S_r کره به مرکز صفر و شعاع r در فضای نرم‌دار X باشد و $x_0\in S_r$، نشان دهید تابعک $f\in X'$ وجود دارد که علامت $f(x-x_0)$ وقتی x در S_r تغییر می‌کند ثابت می‌ماند.

۹-فرض کنید X فضای باناخ بوده و $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای وارون‌پذیر در $B(X)$ باشد که به $T\in B(X)$ همگرا است. با فرض $\left\|T_n^{-1}\right\|<1$ برای هر n، نشان دهید T وارون‌پذیر است.

۱۰- در فضای هیلبرت مختلط H اگر عملگر $T\in B(H)$ در رابطه $\left\|Tx\right\|=\left\|T^*x\right\|$ برای هر $x\in H$ صدق کند، آنگاه T نرمال خواهد بود.

۱۱- ثابت کنید برای هر $T\in B(H)$، عملگر $I+T^*T$ وارون‌پذیر است.

۱۲- اگر $0\neq T\in B(H)$ خودالحاق باشد، ثابت کنید که $T^n\neq 0$ برای هر n.

۱۳- اگر $\{c_n\} \in \ell^\infty$ باشد. $T \in B(\ell^2)$ را با ضابطه $T(\{x_n\}) = \{c_n x_n\}$ در نظر بگیرید و نشان دهید $\sigma(T) \subseteq \overline{\{c_n | n \in \mathbb{N}\}}$.

۱۴- مثالی از عملگر $0 \neq T \in B(\ell^2)$ بزنید که $\sigma(T) = \{0\}$.

۱۵- اگر $P \in B(H)$ در رابطه $P^2 = P$ صدق کند، نشان دهید $\sigma(P) \subseteq \{0,1\}$. (راهنمایی: از عملگر $S = (2P - I)^2$ استفاده کنید.)

۱۶- نشان دهید نگاشت $P \in B(H)$ تصویری است (تصویر روی یک زیرفضای بسته H) اگر و تنها اگر P خودالحاق بوده و $P^2 = P$.

۱۷- اگر $S \in B(H)$ خودالحاق بوده و $\sigma(S) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ نشان دهید که عملگرهای تصویری $P_1, P_2, ..., P_n \in B(H)$ وجود دارند که $P_j P_k = 0$ برای $j \neq k$ و $\sum_{j=1}^n P_j = I$، به علاوه $S = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$.

۱۸- اگر $S \in B(H)$ خودالحاق بوده و $\|S\| \leq 1$ نشان دهید $I - S^2$ مثبت است. همچنین $S \pm i(I - S^2)^{\frac{1}{2}}$ یکانی است.

۱۹- اگر $TS = ST$ ثابت کنید که $r_\sigma(ST) \leq r_\sigma(S) r_\sigma(T)$. به علاوه نشان دهید شرط جابجایی S و T الزامی است.

۲۰- اگر دو عملگر مثبت S و T باهم جابجا شوند، ثابت کنید که ST هم مثبت است.